Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Острик, Когомологические носители для
квантовых групп, *Функц. анализ и его прил.*,
1998, том 32, выпуск 4, 22–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:13:26

УДК 517.9

Когомологические носители для квантовых групп^{*}

© 1998. В. В. Острик

§1. Введение

По корневым данным $(Y, X, \dots)$ и нечетному целому числу l Дж. Люстиг определил конечномерную алгебру Хопфа $\mathbf{u}$ над циклотомическим полем $k := \mathbb{Q}(\xi)$, где ξ — примитивный l -й корень из единицы, см. [11]. Предположим, что $l > h$, где h — число Кокстера расщепимой редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над k , ассоциированной с корневыми данными $(Y, X, \dots)$. В этом случае когомологии $H^\bullet(\mathbf{u}, k)$ алгебры $\mathbf{u}$ с тривиальными коэффициентами были вычислены В. Гинзбургом и С. Кумаром (см. [5]). Для каждого $\mathbf{u}$ -модуля M определяется *когомологический носитель* $|\mathbf{u}|_M$ (копируются соответствующие конструкции из теории модулярных представлений конечных групп и из теории ограниченных алгебр Ли); см. определение 3.1 ниже. Из результата Гинзбурга и Кумара следует, что $|\mathbf{u}|_M$ — замкнутое коническое подмногообразие нильпотентного конуса $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$.

Пусть $\mathbf{U}_\xi$ — квантовая группа с разделенными степенями, ассоциированная с корневыми данными $(Y, X, \dots)$. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$ конечномерных $\mathbf{U}_\xi$ -модулей типа 1. Всякий $M \in \mathcal{C}$ является $\mathbf{u}$ -модулем. Следовательно, мы можем рассмотреть когомологический носитель $|\mathbf{u}|_M$. Он является G -стабильным подмножеством нильпотентного конуса, где G — расщепимая алгебраическая группа над k , ассоциированная с $(Y, X, \dots)$. Пусть $2a$ обозначает коразмерность носителя $|\mathbf{u}|_M$ в $\mathcal{N}$. Наш первый главный результат (теорема 4.1) соотносит целое число a с размерностью модуля M . А именно, мы доказываем, что если l — простое число, то $\dim M$ делится на l^a .

Напомним, что категория $\mathcal{C}$ является прямой суммой некоторых своих подкатегорий, называемых классами зацепленности (linkage classes); см. [2]. Наш второй главный результат (теорема 5.1) дает *априорную* оценку когомологического носителя модуля из фиксированного класса зацепленности.

В качестве приложения мы вычисляем (комбинируя теоремы 4.1 и 5.1) когомологические носители модулей Вейля (см. теорему 6.1). Другое приложение (и третий главный результат этой заметки) — вычисление когомологического носителя *наклонных* модулей над квантовой группой типа A_n (см. теорему 6.8). Это вычисление подтверждает замечательные гипотезы Хамфриса (в квантовой ситуации) о когомологических носителях наклонных модулей и биекции Люстига между двусторонними клетками в аффинной

^{*} Работа частично поддержана грантом CRDF RM1-265.

группе Вейля и нильпотентными орбитами (см. [7] и конец §3). В действительности попытки продвинуться в доказательстве этих гипотез были от правными точками настоящей работы.

Наши рассуждения (за исключением вычисления когомологических носителей для наклонных модулей) применимы также к ситуации в характеристике $p > 0$. В этом контексте алгебра $\mathfrak{u}$ становится *ограниченной обер-твояющей алгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (рассматриваемой над полем характеристики p). В этом случае наша теорема 6.1 дает положительный ответ на вопрос Янтцена [9, 2.7 (1)] в случае $p > h$.

Я счастлив выразить мою искреннюю благодарность Дж. И. Ши, который научил меня всему, что я знаю о клетках в аффинной группе Вейля типа A_n . Более того, эта работа выросла из попыток применить его результаты о клетках к гипотезам Хамфриса. Я также благодарен М. Финкельбергу за полезные обсуждения и бесконечное терпение и Й. К. Янтцену, нашедшему пробел в первом варианте этой статьи. Я признателен Дж. Хамфрису за многие полезные комментарии.

§2. Обозначения

Мы фиксируем основное поле k . С этого момента, если противное явно не оговорено, все объекты и тензорные произведения будут рассматриваться над k .

Зафиксируем односвязные корневые данные $(Y, X, \dots)$, соответствующие неразложимой матрице Картана. Пусть $G, \mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}, W, R, R_+, \check{R}$ обозначают соответствующие расщепимую алгебраическую группу, ее алгебру Ли, ее борелевскую подалгебру, нильпотентный радикал борелевской подалгебры, группу Вейля, систему корней, множество положительных корней и дуальную корневую систему соответственно. Для любого $\alpha \in R$ пусть $\check{\alpha}$ — соответствующий кокорень. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$ обозначает каноническое спаривание. Пусть $\rho \in X$ — полусумма положительных корней. Мы будем обозначать точкой (например $w \cdot \lambda$) действие W на X с неподвижной точкой $-\rho$. Пусть I — множество простых кокорней. Для каждого $i \in I$ обозначим через α_i соответствующий простой корень. Пусть $X_+ = \{\lambda \in X \mid \langle \lambda, \check{\alpha}_i \rangle \geq 0, i \in I\}$ — множество доминантных весов, а h — число Кокстера алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Фиксируем нечетное целое число $l > h$. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа G_2 , то мы предполагаем, что l не делится на 3. Пусть ξ — примитивный корень из единицы степени l .

Пусть $\mathbf{U}_\xi$ — квантовая группа с разделенными степенями, соответствующая $(Y, X, \dots)$ (см. [13]), и $\mathcal{C}$ — категория конечномерных $\mathbf{U}_\xi$ -модулей типа 1. Пусть $E_i^{(s)}, F_i^{(s)}, K_i^{\pm 1}, i \in I, s > 0$, — стандартные образующие алгебры $\mathbf{U}_\xi$. Положим

$$\mathbf{U} := \mathbf{U}_\xi / (\text{идеал, порожденный } \{K_i^l - 1\}).$$

Пусть $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$ — борелевская подалгебра. Для любых $\lambda \in X, k \geq 0$ обозначим через $H^k(\lambda) \in \mathcal{C}$ высший индуцированный с одномерного представления $\mathbf{V}$, соответствующего λ , модуль (см. [2]). Для $\lambda \in X_+$ поколь $L(\lambda)$

модуля $H^0(\lambda)$ является простым ненулевым модулем. Модули $L(\lambda)$ различны и любой простой модуль из $\mathcal{C}$ изоморфен некоторому $L(\lambda)$.

Пусть W_a обозначает аффинную группу Вейля: она порождена группой Вейля W и сдвигами на $l\lambda$ для всех $\lambda \in Y$. Пусть X/W_a — множество W_a -орбит на X при действии с центром в $-\rho$. Для всякой орбиты $\Omega \in X/W_a$ пусть $\mathcal{C}(\Omega)$ обозначает полную подкатегорию в $\mathcal{C}$, состоящую из модулей с композиционными факторами вида $L(\lambda)$, где $\lambda \in \Omega$. Принцип зацепленности (the Linkage Principle) (см. [2]), утверждает, что

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{\Omega \in X/W_a} \mathcal{C}(\Omega).$$

Более того, все композиционные факторы любого модуля $H^i(\lambda)$ имеют вид $L(\mu)$, где $\mu \in W_a \cdot \lambda$.

Мы отсылаем читателя к [1] за определением и свойствами наклонных модулей над $\mathbf{U}$. Напомним, что:

- (i) любой наклонный модуль — сумма неразложимых наклонных модулей;
- (ii) неразложимые наклонные модули $Q(\lambda)$ естественно нумеруются доминантными весами $\lambda \in X_+$;
- (iii) тензорное произведение наклонных модулей — наклонный модуль.
- (iv) модуль $H^0(\lambda)$ является наклонным тогда и только тогда, когда он неприводим.

Пусть $\mathcal{Q}$ обозначает категорию наклонных модулей над $\mathbf{U}$. Полная подкатегория $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ называется *тензорным идеалом*, если для всех $M \in \mathcal{Q}'$ и $N \in \mathcal{Q}$

- (a) любое прямое слагаемое модуля M принадлежит $\mathcal{Q}'$;
- (b) $M \otimes N \in \mathcal{Q}'$.

Все тензорные идеалы в $\mathcal{Q}$ были описаны в [15] с помощью результатов работ [16] и [17] (эти результаты доказаны для систем корней типа A_n , D_n , E_n ; в случае систем корней типа B_n , C_n , F_4 , G_2 доказательство еще не опубликовано полностью).

Мы будем говорить, что веса $\lambda, \mu \in X_+$ лежат в одной и той же *весовой клетке*, если тензорные идеалы, порожденные $Q(\lambda)$ и $Q(\mu)$, совпадают. Таким образом, мы получаем разбиение X_+ на весовые клетки (это разбиение зависит от l). Из результатов [15] следует, что между множеством весовых клеток и множеством канонических правых клеток в аффинной группе Вейля W_a (см. [14]) имеется биективное соответствие.

Пусть $\mathbf{u}$ — квантованная ограниченная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$ (см. [11]). Алгебра $\mathbf{u}$ является алгеброй Хопфа размерности $l^{\dim \mathfrak{g}}$. Пусть $\mathbf{b}$ обозначает ее борелевскую подалгебру.

Дж. Люстиг определил отображение Фробениуса $\mathbf{U} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ (см. [13]). Его ядро совпадает с $\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_+ \cdot \mathbf{U}$, где $\mathbf{u}_+$ — идеал аугментации в $\mathbf{u}$. В частности, существует естественная структура $U(\mathfrak{g})$ -модуля на когомологиях $H^\bullet(\mathbf{u}, M)$ любого $\mathbf{U}$ -модуля M .

§3. Когомологические носители

В этом параграфе мы определяем когомологические носители для алгебр Хопфа (повторяя определения для конечных групп или для ограниченных алгебр Ли) и напоминаем некоторые их основные свойства.

Пусть $\mathbf{a}$ — конечномерная алгебра Хопфа. Известно, что алгебра когомологий с тривиальными коэффициентами $H^\bullet(\mathbf{a}) = H^\bullet(\mathbf{a}, k)$ коммутативна (см. [5]). Предположим, что $H^\bullet(\mathbf{a})$ конечно порождена. Пусть $|\mathbf{a}|$ обозначает аффинное алгебраическое многообразие, ассоциированное с алгеброй $H^{\text{ev}}(\mathbf{a})$ (когомологии четных степеней). Многообразие $|\mathbf{a}|$ снабжено естественным K^* -действием и выделенной точкой $0 \in |\mathbf{a}|$. Пусть M — конечномерный $\mathbf{a}$ -модуль. Пусть $|\mathbf{a}|_M$ — подмногообразие в $|\mathbf{a}|$, соответствующее ядру естественного морфизма $H^{\text{ev}}(\mathbf{a}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{a}}^\bullet(M, M)$.

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие $|\mathbf{a}|_M$ называется *когомологическим носителем* модуля M .

Ясно, что $|\mathbf{a}|_M$ является коническим по отношению к естественному K^* -действию и $M \neq 0$ влечет за собой включение $0 \in |\mathbf{a}|_M$.

3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\{L_k\}$, $k \in K$, — полный набор представителей классов изоморфизма простых $\mathbf{a}$ -модулей. Тогда $|\mathbf{a}|_M$ — объединение носителей пучков $H^\bullet(\mathbf{a}, L_k \otimes M)$ на $|\mathbf{a}|$. Доказательство дословно повторяет аргументы из [4, 1.4].

3.3. ПРИМЕРЫ. (i) Рассмотрим случай алгебры $\mathbf{a} = \mathbf{u}$. В этом случае известно, что $H^\bullet(\mathbf{u}) = H^{\text{ev}}(\mathbf{u}) = \mathbb{C}[\mathcal{N}]$, где $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ обозначает алгебру функций на нильпотентном конусе $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ (см. [5]). Следовательно, $|\mathbf{u}| = \mathcal{N}$.

(ii) Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. В этом случае $H^\bullet(\mathbf{b}) = H^{\text{ev}}(\mathbf{b}) = S^\bullet(\mathfrak{n}^*)$ (см. *loc. cit.*). Следовательно, $|\mathbf{b}| = \mathfrak{n}$.

(iii) Пусть M — тривиальный одномерный $\mathbf{a}$ -модуль. Тогда, очевидно, $|\mathbf{a}|_M = |\mathbf{a}|$.

(iv) Если M проективен, то $|\mathbf{a}|_M = 0$.

Следующая лемма является хопфовым аналогом свойств когомологических носителей, установленных в [8] в случае ограниченных алгебр Ли.

3.4. ЛЕММА (ср. [8, 3.3(3), 2.2(1), 3.3(1)]). (i) Пусть M, N — произвольные $\mathbf{a}$ -модули. Тогда $|\mathbf{a}|_{M \oplus N} = |\mathbf{a}|_M \cup |\mathbf{a}|_N$.

(ii) Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ — алгебры Хопфа и $\phi: \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_2$ — гомоморфизм алгебр. Он определяет морфизм $\phi: |\mathbf{a}_1| \rightarrow |\mathbf{a}_2|$. Для любого $\mathbf{a}_2$ -модуля M имеем $|\mathbf{a}_1|_M \subset \phi^{-1}|\mathbf{a}_2|_M$.

(iii) Пусть $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ — точная последовательность $\mathbf{a}$ -модулей. Тогда $|\mathbf{a}|_{M_i} \subset |\mathbf{a}|_{M_j} \cup |\mathbf{a}|_{M_k}$ для любой перестановки (i, j, k) множества $(1, 2, 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) непосредственно следует из замечания 3.2.

(ii) непосредственно вытекает из функториальности когомологий.

(iii) получается с помощью длинной точной последовательности для когомологий. $\square$

Пусть $M \in \mathcal{C}$. Мы будем писать $|\mathbf{u}|_M$ вместо $|\mathbf{u}|_{\text{Res}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{U}} M}$.

3.5. ЛЕММА. Для любого $\mathbf{U}$ -модуля M многообразие $|\mathbf{u}|_M$ является G -инвариантным подмножеством нильпотентного конуса $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5]. $\square$

3.6. ЛЕММА (ср. [8, 3.3(5)]). *Предположим, что отображение $H^{\text{ev}}(\mathbf{a}) \otimes H^{\text{ev}}(\mathbf{a}) \rightarrow H^{\text{ev}}(\mathbf{a})$, индуцированное копроизведением $\delta: \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$, соответствует диагональному вложению $|\mathbf{a}| \rightarrow |\mathbf{a}| \times |\mathbf{a}|$. Тогда $|\mathbf{a}|_{M \otimes N} \subset |\mathbf{a}|_M \cap |\mathbf{a}|_N$ для любых $\mathbf{a}$ -модулей M и N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно. $\square$

3.7. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Для всех алгебр, которые мы будем рассматривать, предположение леммы выполнено, и мы будем опускать проверку этого факта.

(ii) Можно предположить, что имеет место равенство $|\mathbf{u}|_{M \otimes N} = |\mathbf{u}|_M \cap |\mathbf{u}|_N$, ср. [3, 2.1(c)].

3.8. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что $\lambda, \mu \in X_+$ лежат в одной весовой клетке. Тогда $|\mathbf{u}|_{Q(\lambda)} = |\mathbf{u}|_{Q(\mu)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $Q(\lambda)$ — прямое слагаемое в $Q(\mu) \otimes Q$ для некоторого $Q \in \mathcal{Q}$. Согласно леммам 3.4(i) и 3.6, получаем включение $|\mathbf{u}|_{Q(\lambda)} \subset |\mathbf{u}|_{Q(\mu)}$. По симметрии выполняется и обратное включение. $\square$

3.9. СЛЕДСТВИЕ. *Существует корректно определенное отображение $\mathcal{H}$ упорядоченных множеств из множества канонических правых клеток в множество замкнутых G -инвариантных подмножеств нильпотентного конуса $\mathcal{N}$.*

Сформулируем теперь гипотезы Хамфриса. Напомним, что между множеством канонических правых клеток множеством двусторонних клеток в аффинной группе Вейля W_a имеется биективное соответствие (см. [14]). Далее, Дж. Люстиг построил биекцию между множеством двусторонних клеток в W_a и множеством нильпотентных орбит в $\mathfrak{g}$ (см. [12]). Беря композицию этих биекций, мы получаем биекцию между множеством канонических правых клеток и множеством замкнутых неприводимых G -инвариантных подмножеств конуса $\mathcal{N}$. Гипотеза 1 ниже является квантовой версией гипотезы из [7, Sec. 12]. Гипотеза 2 была неявно сформулирована в последнем абзаце [7, Sec. 12].

ГИПОТЕЗА 1. *Отображение $\mathcal{H}$ совпадает с биекцией Люстига.*

Предположим, что l — простое число.

ГИПОТЕЗА 2. *Пусть $|\mathbf{u}|_{Q(\lambda)}$ имеет коразмерность $2a$ в $\mathcal{N}$. Тогда $\dim Q(\lambda)$ делится на l^a .*

Дж. Хамфрис предположил, что существует более сильная связь между размерностями наклонных модулей с регулярным старшим весом и размерностью их когомологического носителя.

§4. Размерности U -модулей

Положим $d_R = \prod_{\alpha \in R_+} \langle \rho, \check{\alpha} \rangle$ (знаменатель формулы Вейля для размерности). Этот параграф посвящен доказательству следующего результата:

4.1. ТЕОРЕМА. *Пусть $M \in \mathcal{C}$. Предположим, что коразмерность когомологического носителя $|\mathbf{u}|_M$ в $|\mathbf{u}|$ равна $2a$. Тогда $d_R \dim M$ делится на l^a .*

4.2. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Коразмерности замкнутых G -инвариантных подмножеств конуса $\mathcal{N}$ всегда четны, так как число нильпотентных орбит конечно и каждая такая орбита — симплектическое многообразие.

(ii) Если l — простое число, то мы получаем делимость $\dim M$ на l^a .

(iii) Теорема дает доказательство гипотезы 2 из §3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Будем писать $|\mathbf{b}|_M$ вместо $|\mathbf{b}|_{\text{Res}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{U}}(M)}$. Многообразие $|\mathbf{b}|_M$ — замкнутое подмножество в $\mathfrak{n} = |\mathbf{b}|$, см. пример 3.3(ii).

4.3. ЛЕММА. $\dim |\mathbf{b}| - \dim |\mathbf{b}|_M \geq a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.4(ii), имеем $|\mathbf{b}|_M \subset \mathfrak{n} \cap |\mathbf{u}|_M$. Далее, $|\mathbf{u}|_M$ — объединение конечного числа нильпотентных орбит. Пусть $\mathbb{O}$ — нильпотентная орбита. Тогда $\mathbb{O} \cap \mathfrak{n}$ — лагранжево подмногообразие в $\mathbb{O}$ (см. [6]). В частности, $\dim(\mathbb{O} \cap \mathfrak{n}) = \frac{1}{2} \dim \mathbb{O}$. Так как $\dim \mathfrak{n} = \frac{1}{2} \dim \mathcal{N}$, то $\dim \mathfrak{n} - \dim(\mathbb{O} \cap \mathfrak{n}) = \frac{1}{2}(\dim \mathcal{N} - \dim \mathbb{O})$. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы используем интерпретацию размерности когомологического носителя как *сложности* модуля (см. [4, 3.1]).

4.4. ЛЕММА. Для любого $\mathbf{b}$ -модуля N существует проективная резольвента $P^\bullet \rightarrow N$ и константа C , такие, что $\dim(P^i) \leq C i^{\dim |\mathbf{b}|_N - 1}$, $i \geq 1$.

Доказательство дословно повторяет [4, 3.2]. $\square$

Напомним, что алгебра $\mathbf{b}$ имеет естественную Y -градуировку (см. [13]). Рассмотрим индуцированную $\mathbb{Z}$ -градуировку, такую, что всякий простой корень имеет степень 1 (главная градуировка). Модуль M , очевидно, имеет $\mathbb{Z}$ -градуировку, согласованную с главной градуировкой алгебры $\mathbf{b}$, так как M — ограничение $\mathbf{U}$ -модуля. Мы будем говорить, что $\mathbf{b}$ -модуль градуирован, если на нем имеется $\mathbb{Z}$ -градуировка, согласованная с главной градуировкой алгебры $\mathbf{b}$.

Для произвольного конечномерного $\mathbb{Z}$ -градуированного пространства $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ пусть $\dim_t N$ обозначает его градуированную размерность, $\dim_t N = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim N_i t^i$. Пусть

$$p(t) := \prod_{\alpha \in R_+} \frac{1 - t^{\langle \rho, \check{\alpha} \rangle l}}{1 - t^{\langle \rho, \check{\alpha} \rangle}}.$$

Следующий результат хорошо известен:

4.5. ЛЕММА. Пусть P — неразложимый проективный $\mathbf{b}$ -модуль. Он допускает градуировку, такую, что $\dim_t P = t^c p(t)$ для некоторого целого числа c .

Мы будем называть число c *высотой* градуированного модуля P .

4.6. ЛЕММА. Существует проективная $\mathbf{b}$ -резольвента $P^\bullet \rightarrow M$ и константа C , такие, что

- (i) резольвента градуирована;
- (ii) неразложимые проективные модули высоты c появляются с ненулевой кратностью только в P^i при $0 \leq i \leq c$;
- (iii) $\dim(P^i) \leq C i^{\dim |\mathbf{b}|_M - 1}$, $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно. $\square$

Вернемся к модулю M . Мы можем (и будем) предполагать, что $\dim_t M$ является многочленом с ненулевым постоянным членом (сдвигая градуировку).

4.7. ЛЕММА. *Существует константа C , такая, что $\dim_t M = p(t)s(t)$, где $s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i t^i$ — ряд Тейлора с целочисленными коэффициентами и $|s_i| \leq C i^{\dim |\mathbf{b}|_M - 1}$, $i \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $s(t) = \dim_t M / p(t)$. Это рациональная функция с полюсами в некоторых корнях из единицы степени $d_R l$, так как $p(t) = 0$ влечет за собой $t^{d_R l} = 1$. Рассмотрим разложение Тейлора $s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i t^i$. Предположим, что неравенство леммы не выполнено. Для каждого $1 \leq k \leq d_R l$ рассмотрим последовательность $p_k(i) = s_{k+id_R l}$. Мы утверждаем, что для достаточно больших i все эти последовательности полиномиально зависят от i . Более того, для некоторого k последовательность $p_k(i)$ — полином степени $\geq \dim |\mathbf{b}|_M$ согласно нашему предположению. Следовательно, сумма $\sum_{i=1}^j |s_i|$ растет быстрее, чем $C' j^{\dim |\mathbf{b}|_M + 1}$. Но это невозможно, так как $s(t)$ может быть получена вычислением эйлеровой характеристики резольвенты из леммы 4.6. Лемма доказана. $\square$

4.8. СЛЕДСТВИЕ. *Ряд $s(t)$ задает рациональную функцию. Ее полюсы имеют порядок не больше, чем $\dim |\mathbf{b}|_M$.*

Положим $d_R(t) = \prod_{\alpha \in R_+} (1 - t^{\langle \rho, \check{\alpha} \rangle}) / (1 - t)$. Заметим, что многочлен $d_R(t)p(t)$ имеет нуль порядка $\dim \mathfrak{n}$ в любом нетривиальном l -м корне из единицы. Из леммы 4.7 и следствия 4.8 вытекает, что многочлен $d_R(t) \dim_t M$ имеет нуль порядка не меньше, чем $\dim \mathfrak{n} - \dim |\mathbf{b}|_M \geq a$, в любом нетривиальном l -м корне из единицы. Следовательно, многочлен $d_R(t) \dim_t M$ с целочисленными коэффициентами делится на $((t^l - 1)/(t - 1))^a$. Следовательно, $d_R \dim M$ делится на l^a . Теорема доказана. $\square$

4.9. СЛЕДСТВИЕ (из доказательства). *В обозначениях теоремы многочлен $\dim_t(M)$ имеет нуль порядка $\geq a$ в любом примитивном корне l -й степени из единицы. Обратно, пусть $\dim_t(M)$ имеет нуль порядка $\leq a$ в любом примитивном l -м корне из единицы. Тогда коразмерность $|\mathbf{u}|_M$ в $|\mathbf{u}|$ меньше или равна $2a$.*

4.10. ПРИМЕР. Пусть $M = H^0(\lambda)$ для $\lambda \in X_+$. Согласно формуле Вейля для характера (см. [2]), имеем

$$\dim_t(M) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{t^{\langle \lambda + \rho, \check{\alpha} \rangle} - 1}{t^{\langle \rho, \check{\alpha} \rangle} - 1}.$$

В частности порядок нуля в l -м примитивном корне из единицы равен числу положительных корней α , таких, что $\langle \lambda + \rho, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}$.

§5. Оценивание когомологического носителя

В этом параграфе мы получаем оценку когомологического носителя для $\mathbf{U}$ -модулей из данного класса зацепленности. Мы доказываем квантовый аналог гипотезы Янтцена [9, 2.7(1)]. Предполагается, что l взаимно просто со всеми плохими простыми числами для системы R .

Для любого $\lambda \in X$ рассмотрим следующую корневую подсистему в R :

$$R_\lambda = \{\alpha \in R \mid \langle \lambda + \rho, \check{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Легко видеть, что если λ и μ лежат в одном классе зацепленности, то R_λ и R_μ сопряжены при помощи элемента группы Вейля. Фиксируем некоторый класс зацепленности Ω , содержащий вес λ . Выберем $J \subset I$ так, что R_λ W -сопряжена параболической корневой подсистеме R_J (это возможно, см. [9, 2.7]). Пусть $\mathfrak{p}_J \subset \mathfrak{g}$ обозначает соответствующую параболическую подалгебру, и пусть $\mathfrak{u}_J \subset \mathfrak{p}_J$ (соответственно $\mathfrak{l}_J$) обозначает ее нильпотентный радикал (соответственно подалгебру Леви).

Сформулируем основной результат этого параграфа.

5.1. ТЕОРЕМА. *Когомологический носитель любого модуля из класса зацепленности $\mathcal{C}(\Omega)$ содержится в $G \cdot \mathfrak{u}_J$.*

5.2. ЗАМЕЧАНИЕ. $G \cdot \mathfrak{u}_J$ — неприводимое G -инвариантное подмногообразие конуса $\mathcal{N}$. Следовательно, $G \cdot \mathfrak{u}_J$ — замыкание нильпотентной орбиты $\mathbb{O}$. Эта орбита называется орбитой Ричардсона (соответствующей J). Известно, что $\dim G \cdot \mathfrak{u}_J = \dim \mathbb{O} = 2 \dim \mathfrak{u}_J$.

Для доказательства нам нужны некоторые приготовления.

Для любого $J \subset I$ рассмотрим параболическую квантовую группу $\mathbf{P}_J$: это хопфова подалгебра в $\mathbf{U}$, порожденная образующими $F_i^{(s)}$, $K_i^{\pm 1}$, $i \in I$, $s > 0$, и $E_i^{(s)}$, $i \in J$, $s > 0$ (в обозначениях статьи [2] $\mathbf{P}_J = \mathbf{U}(J)$). Рассмотрим также «подгруппу Леви» в $\mathbf{L}_J$: это хопфова подалгебра в $\mathbf{U}$, порожденная $K_i^{\pm 1}$, $i \in I$, и $E_i^{(s)}$, $F_i^{(s)}$, $i \in J$, $s > 0$. Имеется каноническая сюръекция $\mathbf{P}_J \rightarrow \mathbf{L}_J$, переводящая $F_i^{(s)}$, $i \notin J$, $s > 0$, в нуль, а остальные образующие в себя. Пусть $\text{Inf}_{\mathbf{L}_J}^{\mathbf{P}_J}$ — соответствующий функтор инфляции из $\mathbf{L}_J$ -модулей в $\mathbf{P}_J$ -модули. Очевидно, этот функтор точен.

Определим аналогичным образом параболические подалгебры $\mathbf{p}_J$ и подалгебры Леви $\mathbf{l}_J$ в $\mathbf{u}$. Существует отображение Фробениуса $\mathbf{P}_J \rightarrow U(\mathfrak{p}_J)$ (соответственно $\mathbf{L}_J \rightarrow U(\mathfrak{l}_J)$) с ядром $\mathbf{P}_J \cdot (\mathfrak{p}_J)_+ = (\mathfrak{p}_J)_+ \cdot \mathbf{P}_J$ (соответственно $\mathbf{L}_J \cdot (\mathfrak{l}_J)_+ = (\mathfrak{l}_J)_+ \cdot \mathbf{L}_J$), где $(\mathfrak{p}_J)_+ \subset \mathfrak{p}_J$ (соответственно $(\mathfrak{l}_J)_+ \subset \mathfrak{l}_J$) — идеал аугментации.

Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}_\emptyset$ — подалгебра в $\mathbf{U}$, порожденная $K_i^{\pm 1}$, $i \in I$. Имеем каноническую сюръекцию $\mathbf{B} = \mathbf{P}_\emptyset \rightarrow \mathbf{H}$. Для любой параболической подалгебры $\mathbf{P}$ с подалгеброй Леви $\mathbf{L}$ рассмотрим функторы F_1, F_2 : {интегрируемые $\mathbf{H}$ -модули} $\rightarrow$ {интегрируемые $\mathbf{P}$ -модули}, $F_1(M) = \text{Ind}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{P}}(\text{Inf}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{B}}(M))$, $F_2(M) = \text{Inf}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{P}}(\text{Ind}_{\mathbf{L} \cap \mathbf{B}}^{\mathbf{L}}(\text{Inf}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{L} \cap \mathbf{B}}(M)))$. Здесь используются функторы индукции, определенные в [2].

5.3. ЛЕММА. *Функторы F_1, F_2 изоморфны. В частности, для любого интегрируемого $\mathbf{H}$ -модуля M и $i \geq 0$*

$$R^i \text{Ind}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{P}}(\text{Inf}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{B}}(M)) = \text{Inf}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{P}}(R^i \text{Ind}_{\mathbf{L} \cap \mathbf{B}}^{\mathbf{L}}(\text{Inf}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{L} \cap \mathbf{B}}(M))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сравнить правые сопряженные функторы. $\square$

5.4. ЛЕММА (ср. [5]). *Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}$ — параболическая подалгебра, а $\mathfrak{l}$ — соответствующая подалгебра Леви. Тогда $H^\bullet(\mathfrak{p}) = H^{\text{ev}}(\mathfrak{p})$ — алгебра регулярных функций на $\mathcal{N} \cap \mathfrak{p}$ и естественные морфизмы $|\mathfrak{p}| \rightarrow |\mathfrak{u}|$ и $|\mathfrak{p}| \rightarrow |\mathfrak{l}|$ являются естественным включением и проекцией соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству основной теоремы в [5]. Напомним основные моменты этого доказательства. Первый шаг — вычисление когомологий алгебры $\mathbf{b}$. Здесь имеется $\mathbf{b}$ -эквивариантный изоморфизм алгебр $H^{\bullet}(\mathbf{b}) = S^{\bullet}(\mathbf{n}^*)$, см. [5, §2]. Далее, существуют две спектральные последовательности $'E$ и $''E$, сходящиеся к одному и тому же пределу, с начальными членами

$$'E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{p}, R^q \operatorname{Ind}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{P}}(k)) \quad \text{и} \quad ''E_2^{p,q} = R^p \operatorname{Ind}_{U(\mathbf{b})}^{U(\mathbf{p})}(H^q(\mathbf{b}, k)).$$

Обе спектральные последовательности вырождаются в члене E_2 и вторая из них сходится к алгебре $\mathbb{C}[\mathbf{p} \cap \mathcal{N}]$ регулярных функций на $\mathbf{p} \cap \mathcal{N}$. Отсюда легко получаются все утверждения леммы. Объясним равенства $\operatorname{Ind}_{U(\mathbf{b})}^{U(\mathbf{p})}(S^{\bullet}(\mathbf{n}^*)) = \mathbb{C}[\mathbf{p} \cap \mathcal{N}]$ и $R^i \operatorname{Ind}_{U(\mathbf{b})}^{U(\mathbf{p})}(S^{\bullet}(\mathbf{n}^*)) = 0$, $i > 0$. Из точной последовательности $U(\mathbf{b})$ -модулей $0 \rightarrow (\mathbf{n}/\mathbf{u})^* \rightarrow \mathbf{n}^* \rightarrow \mathbf{u}^* \rightarrow 0$ получаем, что $S^n(\mathbf{n}^*)$ имеет фильтрацию с факторами вида $S^i((\mathbf{n}/\mathbf{u})^*) \otimes S^{n-i}(\mathbf{u}^*)$. Заметим, что $\mathbf{u}^*$ — ограничение $U(\mathbf{p})$ -модуля и $(\mathbf{n}/\mathbf{u})^*$ — инфляция с $U(\mathbf{b} \cap \mathbf{l})$ -модуля $(\mathbf{n} \cap \mathbf{l})^*$. Следовательно, $\operatorname{Ind}_{U(\mathbf{b})}^{U(\mathbf{p})}(S^{\bullet}((\mathbf{n}/\mathbf{u})^*) \otimes S^{\bullet}(\mathbf{u}^*)) = \mathbb{C}[\mathbf{l} \cap \mathcal{N}] \otimes S^{\bullet}(\mathbf{u}^*)$ и высшие функторы индукции обнуляются. Значит, естественное включение $\mathbb{C}[\mathbf{p} \cap \mathcal{N}] \hookrightarrow \operatorname{Ind}_{U(\mathbf{b})}^{U(\mathbf{p})}(S^{\bullet}(\mathbf{n}^*))$, индуцированное отображением ограничения $\mathbb{C}[\mathbf{p} \cap \mathcal{N}] \rightarrow S^{\bullet}(\mathbf{n}^*)$, является изоморфизмом (так как имеется изоморфизм аффинных алгебраических многообразий $\mathbf{p} \cap \mathcal{N} \simeq \mathbf{u} \times (\mathbf{l} \cap \mathcal{N})$) и высшие функторы индукции обнуляются. $\square$

5.5. ЛЕММА. Пусть M — проективный $\mathbf{l}$ -модуль. Рассмотрим его как $\mathbf{p}$ -модуль, используя каноническую сюръекцию $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{l}$. Тогда $|\mathbf{p}|_M$ содержится в $\mathbf{u}$ — унитарном радикале $\mathbf{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из естественности когомологического носителя (см. утверждение (ii) леммы 3.4). $\square$

Пусть L — некоторый $\mathbf{U}$ -модуль.

5.6. ЛЕММА (ср. [10, I.6.12]). Для любого $\mathbf{P}$ -модуля M существуют две спектральные последовательности, сходящиеся к одному и тому же пределу, с E_2 -членами

$$'E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{u}, L \otimes R^q \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{U}}(M)) \quad \text{и} \quad ''E_2^{p,q} = R^p \operatorname{Ind}_{U(\mathbf{p})}^{U(\mathbf{g})}(H^q(\mathbf{p}, L \otimes M)).$$

Более того, алгебра $H^{\bullet}(\mathbf{u})$ действует на обеих спектральных последовательностях, коммутируя со всеми дифференциалами, и ее действия на $'E_{\infty}$ и $''E_{\infty}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие функторы F_1, F_2 из категории интегрируемых $\mathbf{P}$ -модулей в интегрируемые $U(\mathbf{g})$ -модули: $F_1 = (?)^{\mathbf{u}} \circ \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{U}}(?)$, $F_2 = \operatorname{Ind}_{U(\mathbf{p})}^{U(\mathbf{g})}(?) \circ (?)^{\mathbf{P}}$. Мы утверждаем, что эти функторы изоморфны. Действительно, левый сопряженный функтор к F_1 изоморфен левому сопряженному функтору к F_2 , так как $\operatorname{Res}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{U}}(?) \circ \operatorname{Inf}_{U(\mathbf{g})}^{\mathbf{U}}(?) = \operatorname{Inf}_{U(\mathbf{p})}^{\mathbf{P}}(?) \circ \operatorname{Res}_{U(\mathbf{p})}^{U(\mathbf{g})}(?)$. Следовательно, для любого $\mathbf{P}$ -модуля N существуют две спектральные последовательности $'E$ и $''E$, сходящиеся к одному и тому же пре-

делу, с начальными членами

$$'E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{u}, R^q \text{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{U}}(N)) \quad \text{и} \quad ''E_2^{p,q} = R^p \text{Ind}_{U(\mathfrak{p})}^{U(\mathfrak{g})}(H^q(\mathfrak{p}, N)).$$

Положим $N = L \otimes M$. Тогда $R^q \text{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{U}}(L \otimes M) = L \otimes R^q \text{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{U}}(M)$, согласно обобщенному тензорному тождеству (см. [2, 2.16] и [10, I.4.8]). Таким образом, требуемые последовательности получены.

Положим теперь $N = k$. Тогда обе спектральные последовательности возникают в члене E_2 и их E_{∞} -члены равны $H^*(\mathfrak{u})$ (для $''E$ это следует из транзитивности индукции и доказательства леммы 5.4). Отсюда вытекает второе утверждение леммы. $\square$

5.7. ЛЕММА. Пусть $\lambda \in X_+$ и $w \in W$. Все композиционные факторы всех модулей $H^i(w \cdot \lambda)$ — это модули $L(\mu)$ с μ , зацепленным с λ , причем $\mu \leq \lambda$. Более того, композиционный фактор $L(\lambda)$ появляется в точности один раз в модуле $H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$ и не появляется в $H^i(w \cdot \lambda)$, $i \neq l(w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2] и [10, II.6.15–6.16]. $\square$

Пусть $\mathfrak{p}$ — любая параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, и пусть $S^*(\mathfrak{p}^*)$ — алгебра функций на $\mathfrak{p}$. Рассмотрим многообразие $G \times_P \mathfrak{p}$ (где P — параболическая подгруппа группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{p}$). Пусть $\mathbb{C}[G \times_P \mathfrak{p}]$ обозначает алгебру функций на $G \times_P \mathfrak{p}$.

5.8. ЛЕММА. Существует изоморфизм алгебр $\text{Ind}_{U(\mathfrak{p})}^{U(\mathfrak{g})}(S^*(\mathfrak{p}^*)) = \mathbb{C}[G \times_P \mathfrak{p}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p: G \times_P \mathfrak{p} \rightarrow G/P$ — естественная проекция. Тогда левая часть равна глобальным сечениям квазикогерентного пучка $p_* \mathcal{O}[G \times_P \mathfrak{p}]$. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим градуированное векторное пространство M^* , такое, что

- 1) M^* — градуированный конечно порожденный $S^*(\mathfrak{p}^*)$ -модуль,
- 2) M^* — градуированный интегрируемый $\mathfrak{p}$ -модуль,
- 3) структуры в 1) и 2) согласованы (для коприсоединенного действия $\mathfrak{p}$ на $S^*(\mathfrak{p}^*)$).

Такие данные эквивалентны данным $P \times \mathbb{C}^*$ -эквивариантного когерентного пучка $\mathcal{S}(M^*)$ на $\mathfrak{p}$. Пусть $\text{supp}(M^*)$ обозначает носитель этого пучка. Для любого $i \geq 0$ градуированное векторное пространство

$$N_i^* := R^i \text{Ind}_{U(\mathfrak{p})}^{U(\mathfrak{g})}(M^*)$$

удовлетворяет условиям 1)–3) (для $\mathfrak{p}$, замененного на $\mathfrak{g}$). Объясним, как это получается геометрически. Пусть $q: G \times \mathfrak{p} \rightarrow G \times_P \mathfrak{p}$ — естественная проекция. Существует пучок $\mathcal{S}'$ на $G \times_P \mathfrak{p}$, такой, что $q^* \mathcal{S}' = \mathcal{O}[G] \otimes \mathcal{S}(M^*)$. Согласно лемме 5.8, $\mathcal{S}(N_i^*) = R^i \phi_* \mathcal{S}'$, где $\phi: G \times_P \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(g, p) \mapsto gp g^{-1}$.

5.9. ЛЕММА. Имеем $\text{supp}(N_i^*) \subset G \cdot \text{supp}(M^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Достаточно рассмотреть простые модули $L(\lambda)$. Будем рассуждать индукцией по λ в соответствии со стандартным упорядочением множества X (т.е. $\lambda \geq \mu$, если и только если $\lambda - \mu$ — сумма простых корней с неотрицательными коэффициентами).

Предположим, что теорема справедлива для всех модулей $L(\mu)$, где $\mu \in \Omega$, $\mu < \lambda$. Выберем $w \in W$ так, что $\langle w(\lambda + \rho), \check{\alpha}_i \rangle \in \mathbb{N}$, $i \in J$. Рассмотрим $\mathbf{P}_J$ -модуль $M = \text{Ind}_{\mathbf{B}^J}^{\mathbf{P}^J}(w \cdot \lambda)$. Заметим, что наш выбор w дает тривиальность $R^i \text{Ind}_{\mathbf{B}^J}^{\mathbf{P}^J}(w \cdot \lambda)$ для $i > 0$ (согласно теореме Кемпфа; см. [2]). В частности, $R^i \text{Ind}_{\mathbf{P}_J}^{\mathbf{U}}(M) = H^i(w \cdot \lambda)$. Далее, заметим, что $\text{Ind}_{\mathbf{B}^J}^{\mathbf{P}^J}(w \cdot \lambda)$ — инфляция с некоторого проективного $\mathbf{L}_J$ -модуля согласно лемме 5.3.

Рассмотрим спектральные последовательности, введенные в лемме 5.6, для $\mathbf{P}_J$ -модуля M , и пусть L пробегает множество простых $\mathbf{u}$ -модулей (напомним, что каждый простой $\mathbf{u}$ -модуль может быть поднят до $\mathbf{U}$ -модуля). Предположим, что $|\mathbf{u}|_{L(\lambda)}$ не содержится в $G \cdot \mathbf{u}_J$. Согласно лемме 5.7 и лемме 3.4(iii), для некоторого простого $\mathbf{u}$ -модуля L пучок $H^\bullet(\mathbf{u}, H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \otimes L)$ на $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ имеет носитель, не содержащийся в $G \cdot \mathbf{u}_J$. Следовательно, то же самое верно для $'E_\infty$. Но это невозможно, так как $'E_\infty = ''E_\infty$ и по лемме 5.5 носитель $''E_\infty$ содержится в $G \cdot \mathbf{u}_J$. Теорема доказана. $\square$

5.10. ЗАМЕЧАНИЕ. То же самое доказательство применимо в модулярной ситуации при $p > h$.

§6. Приложения

Пусть $\lambda \in X_+$.

6.1. ТЕОРЕМА. В обозначениях теоремы 5.1 имеем $|\mathbf{u}|_{H^0(\lambda)} = G \cdot \mathbf{u}_J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $|\mathbf{u}|_{H^0(\lambda)} \subset G \cdot \mathbf{u}_J$ доказано в теореме 5.1. С другой стороны мы знаем из примера 4.10 и замечания 5.2, что $\dim |\mathbf{u}|_{H^0(\lambda)} \geq \dim G \cdot \mathbf{u}_J$. Многообразие $G \cdot \mathbf{u}_J$ неприводимо. Теорема доказана. $\square$

6.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Тем самым нами вычислены когомологические носители модулей Вейля, так как когомологические носители модуля и двойственного модуля совпадают.

Начиная с этого места, мы рассматриваем случай квантовой группы типа SL_{n+1} , т.е. предполагаем, что наши корневые данные $(Y, X, \dots)$ имеют тип A_n . Мы отождествляем R_+ с множеством пар $(j_1, j_2) \in [n+1] \times [n+1]$, $j_1 < j_2$ (здесь $[n+1]$ обозначает множество натуральных чисел j , таких, что $1 \leq j \leq n+1$).

Фиксируем разбиение $p = \{p_1, \dots\}$ числа $n+1$. Пусть $p' = \{p'_1, \dots\}$ обозначает двойственное разбиение.

6.3. ЛЕММА. Существует убывающая последовательность чисел $x_1 > x_2 > \dots > x_{n+1}$, такая, что $x_i - x_j \in \mathbb{Z}$ и для $\sum_{i=1}^k p'_i < j \leq \sum_{i=1}^{k+1} p'_i$ выполнено $x_j - x_{j+p'_{k+1}} = l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем любые целые числа $x_1 > x_2 > \dots > x_{p'_1} > x_1 - l$. (Это возможно, так как $l > h = n$.) Теперь для любого $1 \leq j \leq p'_1$ положим $x_{j+\sum_{i=1}^k p'_i} = x_j - kl$. $\square$

Рассмотрим вес $\lambda = (x_1 - x_2 - 1, \dots, x_n - x_{n+1} - 1)$ (в координатах, соответствующих базису из фундаментальных весов), где x_i — числа из леммы 6.3. Очевидно, что $\lambda \in X_+$.

6.4. ЛЕММА. *Модуль $Q(\lambda)$ совпадает с индуцированным модулем $H^0(\lambda)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойству (iv) из §2 достаточно показать, что модуль $H^0(\lambda)$ неприводим. Это следует из квантового аналога критерия неприводимости [10, II.8.21]. $\square$

6.5. ЛЕММА. *Пусть λ такое же как и выше. Тогда $|\mathbf{u}|_{H^0(\lambda)} = \{\text{замыкание орбиты, состоящей из нильпотентных элементов с жордановыми блоками размеров } (p'_1, \dots)\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что R_λ имеет тип $A_{p_1-1} \times A_{p_2-1} \times \dots$. Пусть R_J — параболическая корневая подсистема, W -сопряженная к R_λ . Согласно [9, 2.6] имеем $G \cdot \mathbf{u}_J = \{\text{замыкание орбиты, состоящей из нильпотентных элементов с жордановыми клетками размеров } (p'_1, \dots)\}$. Теперь лемма следует из теоремы 6.1. $\square$

Нам понадобится явное описание клеток в аффинной группе Вейля типа A_n , данное Ши в терминах допустимых знаковых типов. Мы рассмотрим лишь случай доминантных допустимых знаковых типов; общий случай см. в [18].

6.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [18]. Отображение $f: R_+ \rightarrow \{+, 0\}$ называется *доминантным допустимым знаковым типом*, если для любых $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R_+$ равенство $f(\alpha) = +$ влечет за собой $f(\alpha + \beta) = +$.

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает множество всех доминантных допустимых знаковых типов, а $\mathcal{P}_n$ — множество разбиений числа $n + 1$. Определим отображение $\pi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}_n$. Пусть f — некоторый элемент из $\mathcal{F}$. Будем говорить, что подмножество $I' \subset [n + 1]$ связно, если $f(i, j) = +$ для любых $i, j \in I'$, $i < j$. Пусть теперь p_1 — максимальная мощность связного подмножества множества $[n + 1]$, $p_1 + p_2$ — максимальная мощность подмножества множества $[n + 1]$, которое является дизъюнктивным объединением двух связных подмножеств множества $[n + 1]$, и т.д. (см. [18]). Тогда, согласно теореме К. Грина, $(p_1, \dots, p_k)$ (k — наибольшее целое число, такое, что p_k не равно нулю) является разбиением числа $n + 1$, т.е. $p_1 \geq \dots \geq p_k$. Положим $\pi(f) = (p_1, \dots, p_k) \in \mathcal{P}_n$.

Для каждого $\lambda \in X_+$ определим $f = f(\lambda) \in \mathcal{F}$ следующим образом: для любого $\alpha \in R_+$ положим $f(\alpha) = +$, если $\langle \lambda + \rho, \check{\alpha} \rangle \geq l$, и $f(\alpha) = 0$ в противном случае. Мы построили отображение $f: X_+ \rightarrow \mathcal{F}$.

Рассмотрим композицию $\pi f: X_+ \rightarrow \mathcal{P}_n$. Слои этого отображения — объединения альковов (возможно, незамкнутых). Согласно [18, §§18.2, 7.2] разбиения множества доминантных альковов на слои этого отображения и на канонические правые клетки совпадают. Более того, стандартный порядок на $\mathcal{P}_n$ совпадает с порядком на множестве канонических правых клеток. Далее, пусть π_1 — отображение из множества весовых клеток в $\mathcal{P}_n$, индуцированное πf . Отождествим $\mathcal{P}_n$ с множеством нильпотентных орбит в SL_{n+1} следующим образом: разбиению $(p_1, \dots)$ сопоставим орбиту, состоящую из элементов с жордановыми клетками размеров $(p'_1, \dots)$ (двойственное разбиение). Хорошо известно, что тогда отображение π_1 совпадает с биекцией Люстига.

6.7. ПРИМЕРЫ. (i) Для нулевого веса $\lambda = 0$ имеем $\pi f(0) = (1, 1, \dots)$ (напомним, что $l > n$).

(ii) Для веса λ из леммы 6.4 имеем $\pi f(\lambda) = (p_1, \dots, p_k)$.

6.8. ТЕОРЕМА. Для квантовой группы типа A_n отображение $\mathcal{H}$ (см. следствие 3.9) совпадает с биекцией Люстига.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для λ из лемм 6.4 и 6.5 имеем $|\mathfrak{g}|_{Q(\lambda)} = |\mathfrak{g}|_{H^0(\lambda)} = \{\text{замыкание орбиты, состоящей из нильпотентных элементов с жордановыми клетками размеров } (p'_1, \dots)\}$. Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andersen H. H. Tensor products of quantized tilting modules. Commun. Math. Phys., **149**, 149–159 (1992).
2. Andersen H. H., Polo P., Wen K. Representations of quantum algebras. Invent. Math., **104**, 1–59 (1991).
3. Friedlander E. M., Parshall B. J. Support varieties for restricted Lie algebras. Invent. Math., **86**, 553–562 (1986).
4. Friedlander E. M., Parshall B. J. Geometry of p -unipotent Lie algebras. J. Algebra, **109**, 25–45 (1987).
5. Ginzburg V., Kumar S. Cohomology of quantum groups at roots of unity. Duke Math. J., **69**, No. 1, 179–198 (1993).
6. Chriss N., Ginzburg V. Representation theory and complex geometry. Birkhäuser, Boston, 1997.
7. Humphreys J. E. Comparing modular representations of semisimple groups and their Lie algebras. In volume dedicated to R. E. Block, Modular Interfaces: Modular Lie Algebras, Quantum Groups, and Lie Superalgebras, V. Chari and I. Penkov eds., International Press, 1997.
8. Jantzen J. C. Kohomologie von p -Lie-Algebren und nilpotent Elemente. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **56**, 191–219 (1986).
9. Jantzen J. C. Support varieties of Weyl modules. Bull. London Math. Soc., **19**, 238–244 (1987).
10. Jantzen J. C. Representations of algebraic groups. Academic Press, Orlando, 1987.
11. Lusztig G. Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras. J. Amer. Math. Soc., **3**, 257–296 (1990).
12. Lusztig G. Cells in affine Weyl group. In: Algebraic groups and related topics, Advanced Studies in Pure Math., Vol. 6, Kinokuniya and North Holland, Tokyo and Amsterdam, 1985; II, J. Algebra, **109**, 536–548 (1987); III, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **34**, 223–243 (1987); IV, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **36**, 297–328 (1989).
13. Lusztig G. Introduction to quantum groups. Birkhäuser, Boston, 1993.
14. Lusztig G., Xi N. Canonical left cells in affine Weyl group. Adv. Math., **72**, 284–288 (1988).
15. Ostrik V. Tensor ideals in category of tilting modules. Transformation groups, Vol. 2, No. 3, 279–287 (1997).
16. Soergel W. Kazhdan–Lusztig–Polynome und eine Kombinatorik für Kipp–Moduln. Electronic Representation Theory, **1**, 37–68 (1997).
17. Soergel W. Charakterformeln für Kipp–Moduln über Kac–Moody-Algebren. Electronic Representation Theory, **1**, 115–136 (1997).
18. Shi J. Y. The Kazhdan–Lusztig cells in certain affine Weyl groups. Lect. Notes in Math., **1179**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1986.