Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Аппель, Е. М. Семёнов, Константа упаковки перестановочно-инвариантных пространств, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 69–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:05:56

Константа упаковки перестановочно-инвариантных пространств^{*}

© 1998. Ю. АППЕЛЬ, Е. М. СЕМЕНОВ

Пусть E — бесконечномерное банахово пространство и $B(x, r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x . Константой упаковки пространства E называют число

$$\Lambda(E) = \sup \left\{ r : r > 0, \exists x_i \in E, i = 1, 2, \dots, \right. \\ \left. \inf_{i \neq j} \|x_i - x_j\| \geq 2r, \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r) \subset B(0, 1) \right\}.$$

Финитную константу упаковки $\Lambda_f(E)$ можно определить аналогичным образом:

$$\Lambda_f(E) = \sup \left\{ r : r > 0, \forall n \exists x_1, \dots, x_n \in E, \right. \\ \left. \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\| \geq 2r, \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r) \subset B(0, 1) \right\}.$$

Очевидно, что $\Lambda(E) \leq \Lambda_f(E)$. В [1] было показано, что

$$\Lambda(E) = D(E)(2 + D(E))^{-1}, \quad (1)$$

где

$$D(E) = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \inf_{1 \leq i \neq j < \infty} \|x_i - x_j\|_E.$$

Финитным аналогом этой характеристики является константа

$$D_f(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq i \neq j \leq n} \|x_i - x_j\|.$$

Очевидно, что $D(E) \leq D_f(E)$.

Константа $\Lambda(l_2)$ была найдена в [2]. Этот результат был распространен в [3] на пространства l_p : $\Lambda(l_p) = (1 + 2^{1-1/p})^{-1}$ для $1 \leq p < \infty$. Если мера пространства неатомична и $1 \leq p \leq 2$, то $\Lambda(L_p) = (1 + 2^{1-1/p})^{-1}$; если $2 \leq p < \infty$, то $\Lambda(L_p) = (1 + 2^{1/p})^{-1}$ [4]. Изучению связи между константой упаковки и рефлексивностью пространства посвящены работы [1, 5]. Нижние и верхние оценки константы упаковки в пространствах Орлича были получены в работах [6–9]. Минимальный радиус шара, содержащего такие $x_1, \dots, x_n \in l_p$, что $\|x_i - x_j\| \geq 1$ для всех $1 \leq i \neq j \leq n$, был найден

^{*} Работа второго автора была частично поддержана РФФИ (грант 95-01-00135) и DAAD (грант A/97/52487). Он искренне признателен Математическому институту университета Вюрцбурга за гостеприимство, оказанное ему в июне–июле 1997 г.

в [10]. Для любого бесконечномерного пространства E справедливо неравенство $D(E) > 1$ [11]. Поэтому $1/3 < \Lambda(E) \leq 1/2$. Настоящая работа посвящена изучению константы упаковки перестановочно-инвариантных пространств.

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется перестановочно-инвариантным (г.и.) или симметричным, если $x^*(t) \leq y^*(t)$ и $y \in E$ влечет за собой $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$, когда $x^*(t)$ не возрастает на $(0, 1]$ и равноизмерима с $|x(t)|$. Следуя [11], мы будем предполагать, что E сепарабельно или изометрично сопряженному пространству. Пространства Лоренца $L_{p,q}$ с квазинормой

$$\|x\|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(\frac{p}{q} \int_0^1 (x^*(t) t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t) t^{1/p}, & q = \infty, \end{cases} \quad (2)$$

доставляют содержательный пример г.и. пространств; здесь $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Квазинорма (2) есть норма при $1 \leq q \leq p$ и эквивалентна норме при $q > p$. Теория г.и. пространств изложена в монографиях [12, 13]. Формула (1) позволяет свести изучение константы упаковки к изучению более наглядной константы $D(E)$. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться лишь свойствами констант $D(E)$ и $D_f(E)$.

Пусть (E_0, E_1) — пара г.и. пространств и $0 \leq \theta \leq 1$. Через $[E_0, E_1]_\theta$ обозначаются пространства Кальдерона, построенные по этой паре, с нормой

$$\|x\|_\theta = \inf_{\|x_0\|_{E_0}=\|x_1\|_{E_1}=1} \sup_t \frac{|x(t)|}{|x_0(t)|^{1-\theta} |x_1(t)|^\theta}.$$

Следуя [14], г.и. пространство E назовем θ -гильбертовым, если существует такое г.и. пространство E_0 , что $E = [E_0, L_2]_\theta$. Это равенство означает совпадение пространств как множеств и равенство норм.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \theta < 1$. Если г.и. пространство E является θ -гильбертовым, то

$$D_f(E) \leq 2^{1-\theta/2}. \quad (3)$$

Хорошо известно, что пространство L_p является θ -гильбертовым, где $\theta = 2 \min(1/p, 1 - 1/p)$. Так как

$$D(L_p) = 2^{\max(1/p, 1-1/p)}$$

[4], то это соотношение означает, что (3) для пространств L_p обращается в равенство. Подобная конструкция была использована в [15] для оценки константы Юнга.

При эквивалентных перенормировках E константа $D(E)$ может меняться. Например, если E есть L_2 с нормой

$$\|x\|_E = \left(\int_0^{1/2} (x^*(t))^2 dt \right)^{1/2},$$

то нормы в E и L_2 эквивалентны. Однако $D(E) = 2$. В связи с этим рассмотрим характеристики

$$G(E) = \inf D(F), \quad G_f(E) = \inf D_f(F),$$

где $\inf$ берется по всем эквивалентным перестановочно-инвариантным перенормировкам F пространства E . Напомним определения p -выпуклости и q -вогнутости банаховой решетки [12]. Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$. Банахова решетка E называется p -выпуклой (q -вогнутой), если для некоторого $C > 0$, любого натурального n и любых $x_1, \dots, x_n \in E$ выполнено неравенство

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

$$\left(\left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q} \right\| \geq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} \right).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r.i.$ пространство E является p -выпуклым и q -вогну-
тым для некоторых $1 < p \leq q < \infty$. Тогда

$$G_f(E) \leq 2^{\max(1/p, 1-1/q)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$G_f(E) \leq 2^{\max(1/p(E), 1-1/q(E))},$$

где $p(E)$ есть точная верхняя грань тех $p \geq 1$, для которых E p -выпукло, и $q(E)$ равно точной нижней грани тех $q \leq \infty$, для которых E q -вогнуто.

Рассмотрим в качестве примера пространства $L_{p,q}$. Известно [16], что $L_{p,q}$ $\min(p, q)$ -выпукло и $\max(p, q)$ -вогнуто. В силу теоремы 2

$$G_f(L_{p,q}) \leq 2^{\max(1/p, 1-1/p, 1/q, 1-1/q)}. \quad (4)$$

Нижние оценки для $D(E)$ получаются в других теоремах. Положим

$$\gamma(E) = \sup \{ \gamma : \gamma \geq 0, t^{-\gamma} \in E \}.$$

Очевидно, что $0 \leq \gamma(E) \leq 1$. Например, $\gamma(L_{p,q}) = 1/p$ для всех $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Если E — $r.i.$ пространство, то

$$D(E) \geq 2^{\max(\gamma(E), 1-\gamma(E))}.$$

Теоремы 2, 3 и результаты [17] позволяют вычислить $G_f(L_{p,q})$ и оценить $G(L_{p,q})$. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$2^{\max(1/p, 1-1/p, 1/q)} \leq G(L_{p,q}) \leq G_f(L_{p,q}) = 2^{\max(1/p, 1-1/p, 1/q, 1-1/q)}. \quad (5)$$

Мы предполагаем, что $G(L_{p,q})$ совпадает с левой частью формулы (5). Однако нам не удалось доказать эту гипотезу. Заметим, что $G(l_q) < G_f(l_q)$ для $2 < q < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kottman C. A. Trans. Am. Math. Soc., **150**, 565–576 (1970).
2. Rankin R. A. Proc. M. A. Glasgow, **2**, 139–144 (1955).
3. Burlak J. A. C., Rankin R. A., Robertson A. P. Proc. M. A. Glasgow, **4**, 22–25 (1958).
4. Wells J. H., Williams L. R. Imbeddings and extensions in analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
5. Hudzik H. Collect. Math., **44**, 131–135 (1993).
6. Clever C. E. Pacific J. Math., **65**, 325–335 (1976).
7. Rao M. M., Ren Z. D. Theory of Orlicz spaces, M. Dekker, N.Y., 1991.
8. Hudzik H., Landes T. Bull. U.M.I., (**7**) **9-A**, 225–237 (1995).
9. Rao M. M., Ren Z. D. Studia Math., **126**, No. 3, 235–251 (1997).
10. Ball K. Israel J. Math., **59**, 243–256 (1987).
11. Elton J., Odell E. Colloq. Math., **44**, 105–109 (1981).
12. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Function spaces. II, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
13. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов, Наука, М., 1978.
14. Pisier G. J. d'Analyse Math., **35**, 264–281 (1979).
15. Franchetti C., Semenov E. M. C. R. Acad. Sci. Paris, **323**, 723–728 (1996).
16. Carothers N. L., Dilworth S. J. Texas Func. Anal. Sem., 1985–1986, pp. 107–133.
17. Figiel T., Johnson W. B., Tzafriri L. J. Approx. Theory, **13**, 395–412 (1975).

Университет Вюрцбурга
Воронежский государственный университет

Поступило в редакцию
10 февраля 1998 г.

УДК 517.9

Собственные значения оператора теории оболочек в зоне регулярного вырождения

© 1998. А. Г. Асланян

Рассматриваются свободные колебания тонкой упругой оболочки произвольного очертания. Срединная поверхность оболочки S предполагается выпуклой и достаточно гладкой, ее граница γ — кусочно гладкой. На поверхности S вводится ортогональная система координат α, β , отнесенная к линиям кривизны $((\alpha, \beta) \in S)$. Указанные колебания описываются системой трех дифференциальных уравнений в перемещениях [1]

$$(\mu^4 N + L)u = \lambda u. \quad (1)$$

Здесь N и L — матричные дифференциальные операторы; их явный вид ввиду громоздкости мы не приводим (см., например, [1, с. 8; 40, 41]). Заметим, что вид оператора N зависит от выбора соотношений упругости в теории оболочек [2, с. 11]. Однако сформулированный ниже результат справедлив во всех наиболее часто встречающихся вариантах соотношений упругости (см. [3, с. 299; 4, с. 55–58]).

Далее, $u(\alpha, \beta) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещения точки срединной поверхности оболочки (компонента u_3 направлена по нормали к поверхности S , а компоненты u_1, u_2 лежат в касательной плоскости), λ — спектральный параметр, пропорциональный квадрату собственной частоты ω , и μ — малый параметр, $\mu^4 = h^2/12$, где h — толщина оболочки.