Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Кац, Спектральная теория струны и патологические процессы размножения и гибели, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 74–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa43>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:33:51

Как показывают примеры, условие $q_2 > 0$ существенно. То есть, вообще говоря, при $q_2 = 0$ оценка с показателем $1/2 + \varepsilon$ не верна.

Наконец, доказательство теоремы 1 следует из $(L^\infty \mapsto L^\infty)$ - и $(L^2 \mapsto L^2)$ -оценок с применением интерполяционной теоремы Стейна [12].

В заключение автор выражает свою глубокую благодарность профессору В. П. Паламодову за ценные советы и полезные обсуждения полученных результатов.

Работа была завершена во время визита автора в Международный центр теоретической физики им. Абдус Салама (Триест, Италия), подробное доказательство основных результатов содержится в работе [13]. Автор благодарит профессора А. О. Куку за полезные обсуждения результатов, а также рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. УМН, **28**, вып. 5, 17–44 (1973).
2. Варченко А. Н. Функциональный анализ и его прил., **10**, вып. 3, 13–38 (1976).
3. Карпушкин В. Н. Труды семинара им. И. Г. Петровского, **10**, 150–169 (1984).
4. Bourgain J. J. Anal. Math., **47**, 69–85 (1986).
5. Cowling M., Mauceri G. Trans. Amer. Math. Soc., **296**, 341–365 (1986).
6. Greenleaf A. Indiana Math. J., **30**, 519–537 (1982).
7. Hartman P., Nirenberg L. Amer. J. Math., **81**, 901–920 (1959).
8. Iosevich A. Duke Math. J., **76**, 631–644 (1995).
9. Iosevich A., Sawyer E. Adv. Math., **132**, 46–119 (1997).
10. Stein E. M. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **73**, 2174–2175 (1976).
11. Sogge C. D. In: Fourier Analysis and Partial Differential Equations, Stud. Adv. Math., 1995, pp. 317–323.
12. Sogge C. D., Stein E. M. Invent. Math., **82**, 543–556 (1985).
13. Ikromov I. A. Preprint, ICTP (Trieste, Italy), IC/2003/43.

Самаркандское отделение АН РУз
e-mail: ikromov1@rambler.ru

Поступило в редакцию
4 июля 2003 г.

УДК 517.9+519.21

Спектральная теория струны и патологические процессы размножения и гибели

© 2005. И. С. Кац

1. Введение. Однородный по времени процесс X_t , $t \geq 0$, с фазовым пространством $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \dots\}$ называется процессом размножения и гибели (сокращенно ПРГ), если при одном акте изменения состояния возможен переход из состояния i только в соседние $i - 1$ или $i + 1$, вероятность более чем одного акта изменения состояния за время $(t; t + h)$ равна $o(h)$ при $h \downarrow 0$, а переходная функция вероятностей $P_{i,j}(t) := P(X_{s+t} = j / X_s = i)$ удовлетворяет для любого $i \in \mathbb{N}_0$ условиям

$$P_{i,i+1}(t) = \alpha_i t + o(t), \quad P_{i,i-1}(t) = \beta_i t + o(t) \quad \text{при } t \downarrow 0, \quad (1)$$

$$P_{i,j}(t) \geq 0, \quad i, j \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t) \leq 1, \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Здесь $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, $\beta_0 \geq 0$ — константы, которые трактуются как скорости «отсасывания вероятности» в момент $t = 0$ из состояния i в состояния $i + 1$ и $i - 1$ соответственно. Мы ограничиваемся случаем, когда $\beta_0 = 0$, и тем самым отказываемся от присоединения к $\mathbb{N}_0$ состояния -1 , из которого нет возврата в $\mathbb{N}_0$.

Константы α_i , β_i , вообще говоря, не определяют матрицу-функцию $P(t) = (P_{i,j}(t))_{i,j=0,1,2,\dots}$. Впредь задачу отыскания матрицы-функции $P(t)$, удовлетворяющей условиям (1), (2), будем обозначать через (*), и, говоря о решении $P(t)$ задачи (*), мы имеем в виду и соответствующий ему ПРГ.

Ледерман и Ройтер [1] установили, что задача (*) всегда имеет решение. Карлин и Макгрегор [2] показали, что при наличии более чем одного решения имеется континуальное множество так называемых *обыкновенных* решений, для которых справедливо равенство Чепмена–Колмогорова

$$P_{i,j}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(s)P_{k,j}(t) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_0, s, t > 0, \quad (3)$$

и континуальное множество так называемых *патологических* решений, для которых в (3) вместо «=» имеет место «>». Объяснению вероятностной природы последних посвящена настоящая работа.

2. Необходимые сведения из спектральной теории струны S_1 М. Г. Крейна. Пусть $I = [0, L)$, $L \leq +\infty$, — данный промежуток оси x . Пусть $M(x)$ ($0 \leq x < L$, $M(0) = 0$) — данная неубывающая непрерывная слева конечнозначная функция, отличная от константы, $\mathcal{F}_M := I \setminus \{x \in I : M'(x) = 0\}$, $L_0 := \sup \mathcal{F}_M (\leq L)$, $M(L) := \sup M(x) (\leq +\infty)$. Функцию $M(x)$ трактуют как функцию распределения масс струны Крейна $S_1(I, M)$ (см. [3] и [4]). Струна $S_1(I, M)$ называется *регулярной*, если $L_0 + M(L) < \infty$; в противном случае она называется *сингулярной*. Ограничиваемся здесь случаем, когда $\inf \mathcal{F}_M = 0$.

Решение $\varphi(x, z)$ ($x \in I$, $z \in \mathbb{C}$) граничной задачи

$$-\frac{d}{dM(x)}y^- - zy = 0, \quad y(0) = 1, y^-(0) = 0,$$

где $y^-(x)$ при $x \in (0, L)$ — это левая производная функции $y(x)$, а $y^-(0)$ — присоединенное значение (см. [3] и [4]), называют фундаментальной функцией струны $S_1(I, M)$. Пусть $H := L^{(2)}(I; M)$, а H' — множество функций $f \in H$, равных нулю в левой окрестности точки L , своей для каждой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Неотрицательную меру τ , определенную на борелевских подмножествах множества $\mathbb{R}$, называют спектральной мерой (сокращенно СМ) струны $S_1(I, M)$, если отображение $\mathcal{U}: f \rightarrow F$, где $f \in H'$, а

$$F(\lambda) = \int_I f(x)\varphi(x, \lambda) dM(x), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

изометрически переводит H' в $L^{(2)}(\mathbb{R}, \tau)$. СМ τ называется *ортогональной*, если $\mathcal{U}H'$ плотно в $L^{(2)}(\mathbb{R}, \tau)$. СМ τ относят к множеству $T_+(I, M)$, если τ -мера множества $(-\infty, 0)$ равна нулю.

В $T_+(I, M)$ имеется такая СМ τ_+ , что для любого $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ справедливо равенство

$$\int_I (\varphi(x, z))^{-2} dx = \int_{[0, +\infty)} (\lambda - z)^{-1} d\tau_+(\lambda),$$

в котором сходятся оба интеграла. Она ортогональна. Ее называют *главной* СМ струны $S_1(I, M)$. Если эта струна сингулярна, то $T_+(I, M)$ не содержит других СМ. Если она регулярна, то $T_+(I, M)$ содержит континуальные множества ортогональных и неортогональных СМ.

3. Обобщенный одномерный диффузионный процесс. Для любых $t > 0$, $x, y \in \mathcal{F}_M$ и борелевского множества $B \subset \mathcal{F}_M$ положим

$$p(x, y; t) = \int_{[0, +\infty)} e^{-\lambda t} \varphi(x, \lambda) \varphi(y, \lambda) d\tau_+(\lambda), \quad P_x(t, B) = \int_B p(x, y; t) dM(y). \quad (4)$$

Отметим, что $p(x, y; t) > 0$ для любых $x, y \in \mathcal{F}_M$ и $t > 0$ [5, Проп. 2]. $P_x(t, B)$ служит переходной функцией вероятностей некоторого марковского процесса $\{X_t, P_x\}$ на $\mathcal{F}_M$ ($P_x(t, B) = P(X_{s+t} \in B / X_s = x)$). Его называют обобщенным одномерным диффузионным процессом, соответствующим струне $S_1([0, L), M)$ (см. [5–7])¹. Для него при любых $x \in \mathcal{F}_M$, $s, t > 0$ и любого борелевского множества $B \subset \mathcal{F}_M$ справедливо равенство Чепмена–Колмогорова

$$P_x(s+t, B) = \int_{\mathcal{F}_M} p(x, r; s) P_r(t, B) dM(r) \left(= \int_{\mathcal{F}_M} P_x(s, dr) P_r(t, B) \right). \quad (5)$$

4. Стильтесовская струна. М. Г. Крейн так назвал струну $S_1([0, L), M)$, которая несет только сосредоточенные массы $m_0, m_1, m_2, \dots$, расположенные соответственно в точках $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots$, $\lim x_n = L$ ($L_0 = L$, $M(x) = \sum_{x_j < x} m_j$). Как он показал ([8; 3, §13]), для любой разрешимой невырожденной проблемы моментов Стильтеса имеется такая стилтьесовская струна $S_1([0, L), M)$, что $T_+([0, L), M)$ совпадает с множеством решений этой проблемы моментов.

5. ПРГ и стилтьесовские струны. Карлин и Макгрегор [2] связали проблему (*) с разрешимой невырожденной проблемой моментов Стильтеса. Изложим основные результаты из [2] на «струнном языке».

Положим $m_0 = 1$, $m_j = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{j-1} (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_j)^{-1}$, $l_j = (m_{j-1} \alpha_{j-1})^{-1}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, $x_0 = 0$, $x_{j+1} = x_j + l_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $\widehat{L} = \lim x_j$. Пусть $\widehat{S} := S_1([0, \widehat{L}), \widehat{M})$ — стилтьесовская струна с так определенными x_j , m_j , а $\widehat{\varphi}(x, z)$ — ее фундаментальная функция. Пусть $\sigma \in \widehat{T}_+ := T_+([0, \widehat{L}), \widehat{M})$. Тогда бесконечная матрица-функция $P(t; \sigma) = (P_{i,j}(t; \sigma))_{i,j=0,1,2,\dots}$, определенная при $t \geq 0$ равенствами

$$p(x_i, x_j, t; \sigma) = \int_{[0, +\infty)} e^{-\lambda t} \widehat{\varphi}(x_i, \lambda) \widehat{\varphi}(x_j, \lambda) d\sigma(\lambda), \quad P_{i,j}(t; \sigma) = m_j p(x_i, x_j, t; \sigma), \quad (6)$$

¹Если $M(x)$ строго возрастает, то это диффузионный процесс, у которого x — естественная шкала, M -мера служит мерой скорости, а на левом конце промежутка $[0, L)$ находится отражающий экран.

является решением задачи (*). Это решение является обыкновенным, если σ — ортогональная СМ, и патологическим, если σ — неортогональная СМ струны $\hat{S}$.

6. Вероятностная трактовка патологических ПРГ. Пусть СМ $\sigma \in \hat{T}_+$ неортогональна (и, значит, $\hat{S}$ — регулярная струна) и $P(t; \sigma)$ — соответствующее патологическое решение задачи (*). Как установил Крейн (см. [3, § 11, п. 3] и [4, теорема 5]), σ является главной СМ какого-то весомого продолжения вправо струны $\hat{S}$, т. е. некоторой струны $\tilde{S} = S_1([0, \tilde{L}), \tilde{M})$, у которой $\tilde{L} < \tilde{L} \leq +\infty$, $\tilde{M}(x) = \tilde{M}(x)$ для любого $x \in [0, \tilde{L}]$ и $\tilde{M}(\tilde{L}) > \tilde{M}(\tilde{L})^{1)}$. Пусть $\{\tilde{X}_t, \tilde{P}_x\}$ — обобщенный диффузионный процесс, соответствующий струне $\tilde{S}$. Его фазовое пространство — это $\mathcal{F}_{\tilde{M}} = Q \cup D$, где $Q = \{x_0, x_1, \dots\}$, $D = [\tilde{L}, \tilde{L}) \setminus \{x \in [\tilde{L}, \tilde{L}) : \tilde{M}'(x) = 0\}$, а $\tilde{M}$ -мера множества D положительна. Его переходная функция вероятностей $\tilde{P}_x(t, B)$ для любых $x \in \mathcal{F}_{\tilde{M}}$, $t > 0$ и любого борелевского множества $B \subset \mathcal{F}_{\tilde{M}}$ определяется в соответствии с разд. 3 равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, y; t) &= \int_{[0, +\infty)} e^{-\lambda t} \tilde{\varphi}(x, \lambda) \tilde{\varphi}(y, \lambda) d\sigma(\lambda), \\ \tilde{P}_x(t, B) &= \int_B \tilde{p}(x, y; t) d\tilde{M}(y), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{\varphi}$ — фундаментальная функция струны $\tilde{S}$. Отметим, что если $x, y \in Q$ и $B \subset Q$, то $\tilde{p}(x, y; t)$ и $\tilde{P}_x(t, B)$ определены и при $t = 0$. Так как $\tilde{M}(x) = \tilde{M}(x)$ при $0 \leq x < \tilde{L}$, то $\tilde{\varphi}(x, z) = \tilde{\varphi}(x, z)$ для любого $x \in [0, \tilde{L})$. Теперь из (6), (7) следует, что $P_{i,j}(t; \sigma) = \tilde{P}_{x_i}(t, \{x_j\})$. В этом равенстве заключен

Основной результат. Если отождествить $0, 1, 2, \dots$ с точками $x_0, x_1, x_2, \dots$ соответственно, то патологический ПРГ, соответствующий решению $P(t; \sigma)$ задачи (*) — это рассматриваемая лишь на $Q = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ часть обобщенного одномерного диффузионного процесса, для которого Q является собственным подмножеством его фазового пространства.

Установленная в [2] патологичность ПРГ $P(t; \sigma)$ с неортогональной СМ $\sigma \in \hat{T}_+$ становится «наглядной». Она вытекает из равенства (5) с $\tilde{P}_{x_i}$, $\mathcal{F}_{\tilde{M}}$, x_i , $\{x_j\}$ вместо P_x , $\mathcal{F}_M$, x , B соответственно, если учесть, что $P_{i,j}(t; \sigma) = \tilde{P}_{x_i}(t, \{x_j\})$ для любых $i, j \in \mathbb{N}_0$ и $\tilde{M}$ -мера множества D и подынтегральная функция в (5) положительны, а интеграл по множеству Q равен правой части формулы (3).

В заключение отметим, что Карлин и Макгрегор [2], а позже и Феллер [9] не могли отказаться от мысли, что для пояснения сути патологического ПРГ достаточно присоединить точку $+\infty$ к $\mathbb{N}_0$. Анализ построенных ими примеров патологических ПРГ показывает, что они порождаются лишь такими продолжениями $\tilde{S} = S_1([0, \tilde{L}), \tilde{M})$ вправо струны $\hat{S} = S_1([0, \hat{L}), \hat{M})$, в которых $\tilde{M}(\tilde{L}) =$

¹⁾ Более того, множество всех неортогональных СМ $\sigma \in \hat{T}_+$ совпадает с множеством главных спектральных мер всех весомых продолжений вправо $\tilde{S}$ струны $\hat{S}$. Соответствие $\sigma \leftrightarrow \tilde{S}$ взаимно однозначно, и можно считать, что патологическое решение задачи (*) порождается не неортогональной СМ σ , а продолжением $\tilde{S}$ струны $\hat{S}$.

$\widetilde{M}(\widehat{L}+0) > \widetilde{M}(\widehat{L}) (= \widehat{M}(\widehat{L}))$, что составляет лишь «незначительную часть» множества всех весомых продлений вправо (см. подстрочное примечание на предыдущей странице).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ledermann W., Reuter G. E.* Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **246**, 321 (1954).
2. *Karlin S., McGregor J.* Trans. Amer. Math. Soc., **85**, 489–546 (1957).
3. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Дополнение II к кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, М., 1968.
4. *Кац И. С.* Укр. матем. ж., **46**, 155–176 (1994).
5. *Küchler U.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. (Kyoto Univ.), **16**, No. 1 (1980).
6. *Watanabe S.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **31**, 115–124 (1974/75).
7. *Kasahara Y.* Japan J. Math., **1**, 67–84 (1975).
8. *Крейн М. Г.* ДАН СССР, **87**, 881–884 (1952).
9. *Feller W. J.* Math. Pures Appl., **38**, 301–345 (1959).

Одесская национальная академия
пищевых технологий
e-mail: peka@osoft.odessa.ua

Поступило в редакцию
24 июля 2003 г.

УДК 517.5+517.43

Теорема Амбарцумяна для краевой задачи Штурма–Лиувилля на звездообразном графе

© 2005. В. Н. ПИВОВАРЧИК

Теорема Амбарцумяна [1] утверждает, что если спектр задачи Штурма–Лиувилля на интервале $[0, \pi]$ с вещественным потенциалом из $L_1(0, \pi)$ и краевыми условиями Неймана

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

совпадает с последовательностью $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$, где $\lambda_k = k^2$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то потенциал равен нулю почти всюду на $[0, \pi]$. Известно [2–4], что этот случай является исключительным и, вообще говоря, два спектра краевых задач однозначно определяют (почти всюду) потенциал. Различные обобщения теоремы Амбарцумяна можно найти в [5–7]. Мы будем рассматривать краевую задачу не на интервале, а на компактном графе. Задачи рассеяния и спектральные задачи на графах рассматривались во многих публикациях (см., например, [8, 9]). Менее изучены обратные спектральные задачи и обратные задачи рассеяния на графах [10–13]. Для обратных спектральных задач, порождаемых уравнением Штурма–Лиувилля на графах, известно, что один спектр, вообще говоря, не определяет однозначно потенциалы на ребрах графа (для звездообразного графа см. [12], для общего случая — [13]).

В настоящей статье рассмотрен исключительный случай, когда один спектр (точнее, даже часть его) краевой задачи на звездообразном графе однозначно определяет набор потенциалов на ребрах графа, что является аналогом теоремы Амбарцумяна. При доказательстве теорем мы используем метод работы [5] (см. также [3]).