Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Интерполяция Лагранжа по системам Чебышёва и высшие порядки Брюа, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 76–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:02:10

УДК 513.5

Интерполяция Лагранжа по системам Чебышёва и высшие порядки Брюа

© 1998. Г. Г. Ильюта

С помощью интерполяции Лагранжа по системе функций $1, x, \dots, x^{k-1}$ связной компоненте пространства конфигураций точек в $\mathbb{R}^2$ ставится в соответствие элемент высшего порядка Брюа [3, 4]. Конфигурация называется *дискриминантной*, если на графике некоторой линейной комбинации функций интерполирующего набора лежит больше, чем k , точек конфигурации. Рассмотрение в качестве конфигураций наборов точек экстремума полинома приводит к построению высшего исчисления змей В. И. Арнольда [1].

Ниже конструкция из [3, 4] обобщается в двух направлениях. Во-первых, рассматриваются конфигурации точек с кратностями. В этой ситуации высших порядков Брюа оказывается недостаточно, и мы определяем α -высший порядок Брюа для каждого упорядоченного набора натуральных чисел $\alpha = (n_1, \dots, n_q)$ (высшие порядки Брюа из [8] отвечают наборам $(1, \dots, 1)$). Это приводит к обобщению высших групп кос Манина–Шехтмана [8].

Другим обобщением является рассмотрение интерполяции по произвольному набору функций. Основной результат работы состоит в построении для интерполяции по системе Чебышёва (определение дано ниже) естественного отображения из множества связных компонент пространства общих конфигураций точек (с кратностями из набора α) в α -высшие порядки Брюа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор вещественных функций $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(D)$ на открытом интервале $D \subset \mathbb{R}$ называется *системой Чебышёва*, если любая ненулевая линейная комбинация функций этого набора имеет на D меньше, чем k , корней (с учетом кратностей).

Определим кратные высшие порядки Брюа. Фиксируем $\alpha = (n_1, \dots, n_q)$, $n = \sum n_i$. Рассмотрим множество, состоящее из n_i чисел i для $i = 1, \dots, q$, и обозначим через $C_\alpha(n, k)$ множество всех k -элементных подмножеств этого множества (равные элементы не различаются). Для $d \in C_\alpha(n, k+1)$ назовем *пакетом* в $C_\alpha(n, k)$ множество $\{l : l \in C_\alpha(n, k), l \subset d\}$. Число элементов в пакете равно числу различных элементов в d , и каждый элемент пакета получается из d выбрасыванием некоторого элемента. Линейно упорядочим элементы пакета по величине выбрасываемого элемента и назовем этот порядок *лексикографическим*.

Линейный порядок на $C_\alpha(n, k)$ назовем *допустимым*, если он индуцирует на любом пакете либо лексикографический порядок, либо обратный ему. Обозначим через $A_\alpha(n, k)$ множество допустимых порядков на $C_\alpha(n, k)$. Два порядка из $A_\alpha(n, k)$ назовем *элементарно эквивалентными*, если они отличаются только в паре соседних элементов, которые не принадлежат одному пакету.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем α -высшим порядком Брюа $B_\alpha(n, k)$ фактор $A_\alpha(n, k)$ по отношению эквивалентности, порожденному элементарной эквивалентностью.

Частичный порядок на $B_\alpha(n, k)$ вводится аналогично тому, как это сделано в [8], с помощью обращения порядка на пакетах.

ПРИМЕР. Пусть $\alpha = (2, 1, 3)$. Тогда

$$\begin{aligned} C_\alpha(6, 3) &= \{112, 113, 233, 133, 123, 333\}, \\ C_\alpha(6, 4) &= \{1123, 1133, 1233, 1333, 2333\}. \end{aligned}$$

Выпишем отвечающие элементам $C_\alpha(6, 4)$ пакеты в $C_\alpha(6, 3)$ в лексикографическом порядке:

$$\begin{aligned} 1123 &: 112, 113, 123; \\ 1133 &: 113, 133; \\ 1233 &: 123, 133, 233; \\ 1333 &: 133, 333; \\ 2333 &: 233, 333. \end{aligned}$$

Элементы множества $C_\alpha(6, 3)$ выписаны выше в одном из допустимых порядков.

Определим k -общие наборы точек. Используем для этого классическую интерполяцию Лагранжа с кратными узлами [2]. Фиксируем $\alpha = (n_1, \dots, n_q)$ и набор вещественных функций $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(D)$. Рассмотрим в $D \times \mathbb{R}$ множество конфигураций точек вида

$$\begin{aligned} (x_1, y_1^1), \dots, (x_1, y_1^{n_1}), (x_2, y_2^1), \dots, (x_2, y_2^{n_2}), \dots, (x_q, y_q^1), \dots, (x_q, y_q^{n_q}), \\ x_1 < \dots < x_q. \end{aligned} \quad (1)$$

Назовем подмножество конфигурации (1) *начальным*, если вместе с (x_i, y_i^p) оно содержит все (x_i, y_i^j) , $j < p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конфигурацию (1) назовем *k-общей* (относительно $f_1, \dots, f_k$), если ни для какого $(k+1)$ -элементного начального подмножества S не существует линейной комбинации $\sum a_j f_j$, обладающей свойством

$$y_i^p = \sum a_j f_j^{(p-1)}(x_i) \quad \text{для всех } (x_i, y_i^p) \in S. \quad (2)$$

СЛЕДСТВИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(D)$ — система Чебышёва. Тогда для любого k -элементного начального подмножества S k -общей конфигурации (1) существует единственная линейная комбинация $\sum a_j f_j$ (назовем ее полиномом конфигурации (1)), удовлетворяющая условию (2) для всех точек из S .

Сопоставим k -общей конфигурации F , определенной по системе Чебышёва, множество линейных порядков на $C_\alpha(n, k)$. Для любого $x_0 > x_q$, $x_0 \in D$, рассмотрим точки пересечения прямой $x = x_0$ с графиками всех полиномов конфигурации. Линейно упорядочим точки пересечения по величине координаты y (совпадающие упорядочиваем произвольно). Это дает линейный порядок на $C_\alpha(n, k)$. Обозначим через $c(F)$ множество всех порядков, которые так можно получить.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F есть k -общая конфигурация точек, определенная по системе Чебышёва. Тогда все линейные порядки в $c(F)$ допустимы и эквивалентны, т. е. F определяет элемент из $B_\alpha(n, k)$. Построенное отображение постоянно на компонентах связности пространства k -общих конфигураций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорему 1 можно получить как обобщение соответствующего факта из [4], но мы приведем другое доказательство. Достаточно доказать, что 1) все порядки из $c(F)$ индуцируют на каждом пакете один и тот же порядок, 2) этот порядок является лексикографическим или обратным к нему порядком. Выберем пакет и обозначим через $P_1, P_2, \dots$ отвечающие этому пакету полиномы конфигурации в лексикографическом порядке. Для всех i, j полином $P_i - P_j$ имеет на D меньше k корней. Поэтому точками пересечения (с кратностями) графиков полиномов P_i являются только точки конфигурации, отвечающие выбранному пакету. Отсюда сразу вытекает 1), поскольку для $x_0 > x_q$ прямая $x = x_0$ не содержит точек пересечения графиков полиномов P_i и поэтому порядок точек пересечения этой прямой с графиками не зависит от x_0 . Ключевое замечание доказательства выделим как лемму.

ЛЕММА. Топология конфигурации графиков полиномов P_i не зависит от системы Чебышёва.

Действительно, из непрерывности функций P_i вытекает, что топология конфигурации графиков зависит только от пересечений этих графиков, но, согласно сказанному выше, пересечения определяются пакетом и не зависят от системы Чебышёва.

Таким образом, можно считать, что интерполирующей системой является система $1, x, \dots, x^{k-1}$ и P_i — обычные полиномы степени не выше $k-1$. Порядок на точках пересечения графиков полиномов P_i с прямой $x = x_0 > x_q$ совпадает с порядком на коэффициентах при x^{k-1} полиномов P_i . Коэффициент при x^{k-1} в интерполяционном полиноме Лагранжа — это разделенная разность, построенная по интерполируемому набору точек [2]. Рекуррентная формула для разделенных разностей [2] означает, что разность коэффициентов при x^{k-1} для двух полиномов P_i, P_j равна разделенной разности для отвечающих всему пакету точек конфигурации, умноженной на $x_i - x_j$. Поэтому для всех $i < j$ разности коэффициентов при x^{k-1} полиномов P_i, P_j имеют один и тот же знак. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ 1. Если рассматривать интерполяцию по набору функций любого числа переменных, то естественным комбинаторным объектом, который можно сопоставить конфигурации точек, является ориентированный матроид [5]. Отвечающие элементам высших порядков Брюа ориентированные матроиды характеризуются в [7, 9].

2. Если фиксировать координаты x в конфигурациях точек, то дискриминант в пространстве конфигураций будет конфигурацией гиперплоскостей в n -мерном пространстве координат y [4]. Над $\mathbb{C}$ фундаментальная группа дополнения к этой конфигурации гиперплоскостей обобщает высшие группы кос [8] для кратных высших порядков Брюа $B_\alpha(n, k)$.

3. Теорема 1 может быть обобщена для интерполяции по симметрическим функциям [6]. Мы займемся этим в другой статье.

4. Условия гладкости на интерполирующий набор функций в теореме 1 могут быть ослаблены, но для ясности мы жертвуем несущественной общностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. УМН, **47**, вып. 1, 3–45 (1992).
2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Наука, М., 1967.
3. Ильюта Г. Г. Доклады РАН, **347**, № 3, 217–219 (1996).
4. Ильюта Г. Г. Изв. РАН, сер. матем., **60**, вып. 6, 91–100 (1996).
5. Bjorner A., Las Vergnas M., Sturmfels B., White N., Ziegler G. Oriented matroids. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
6. Chen W., Louck J. Adv. Math., **117**, 147–156 (1996).
7. Kapranov M., Voevodsky V. Combinatorial geometric aspects of polycategory theory: pasting schemes and higher Bruhat orders. Cahiers de Topol. et Geom., 1991, v. XXXII-1, pp. 11–27.
8. Manin Yu., Schechtman V. Adv. Stud. Pure Math., **17**, 289–308 (1989).
9. Ziegler G. Topology, **32**, No. 2, 259–279 (1993).

Государственная академия
нефти и газа им. И. М. Губкина

Поступило в редакцию
2 апреля 1997 г.

УДК 517.9

Существование и единственность сохраняющего меру оптимального отображения в общей задаче Монжа–Канторовича*

© 1998. В. Л. ЛЕВИН

1. Введение. Пусть X, Y — польские пространства, σ_1 и σ_2 — конечные положительные борелевские меры на них с $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$ и c — непрерывная функция на $X \times Y$. Далее π_1 и π_2 обозначают естественные проектирования пространства $X \times Y$ на X и Y . Под общей задачей Монжа–Канторовича мы понимаем экстремальную задачу, состоящую в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2) := \inf \{c(\mu) : \mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)\}, \quad (1)$$

где $c(\mu)$ — интеграл функции c по μ (считаем, что по определению $c(\mu) = +\infty$, если $c_+(\mu) = +\infty$), а $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ — множество положительных борелевских мер μ на $X \times Y$, для которых σ_1 и σ_2 являются их маргинальными мерами: $\pi_1(\mu) = \sigma_1$, $\pi_2(\mu) = \sigma_2$. Положим

$$\mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2) := \inf \left\{ \int_X c(x, f(x)) \sigma_1(dx) : f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2) \right\}, \quad (2)$$

где $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ — множество сохраняющих меру отображений $f: X \rightarrow Y$. Борелевское отображение f называется сохраняющим меру, если $f(\sigma_1) = \sigma_2$,

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 96-01-00336.