Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Левин, Существование и единственность сохраняющего меру оптимального отображения в общей задаче Монжа–Канторовича, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 79–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:05:56

3. Теорема 1 может быть обобщена для интерполяции по симметрическим функциям [6]. Мы займемся этим в другой статье.

4. Условия гладкости на интерполирующий набор функций в теореме 1 могут быть ослаблены, но для ясности мы жертвуем несущественной общностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. УМН, **47**, вып. 1, 3–45 (1992).
2. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Наука, М., 1967.
3. Ильюта Г. Г. Доклады РАН, **347**, № 3, 217–219 (1996).
4. Ильюта Г. Г. Изв. РАН, сер. матем., **60**, вып. 6, 91–100 (1996).
5. Björner A., Las Vergnas M., Sturmfels B., White N., Ziegler G. Oriented matroids. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
6. Chen W., Louck J. Adv. Math., **117**, 147–156 (1996).
7. Kapranov M., Voevodsky V. Combinatorial geometric aspects of polycategory theory: pasting schemes and higher Bruhat orders. Cahiers de Topol. et Geom., 1991, v. XXXII-1, pp. 11–27.
8. Manin Yu., Schechtman V. Adv. Stud. Pure Math., **17**, 289–308 (1989).
9. Ziegler G. Topology, **32**, No. 2, 259–279 (1993).

Государственная академия
нефти и газа им. И. М. Губкина

Поступило в редакцию
2 апреля 1997 г.

УДК 517.9

Существование и единственность сохраняющего меру оптимального отображения в общей задаче Монжа–Канторовича*

© 1998. В. Л. ЛЕВИН

1. Введение. Пусть X, Y — польские пространства, σ_1 и σ_2 — конечные положительные борелевские меры на них с $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$ и c — непрерывная функция на $X \times Y$. Далее π_1 и π_2 обозначают естественные проектирования пространства $X \times Y$ на X и Y . Под общей задачей Монжа–Канторовича мы понимаем экстремальную задачу, состоящую в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2) := \inf \{c(\mu) : \mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)\}, \quad (1)$$

где $c(\mu)$ — интеграл функции c по μ (считаем, что по определению $c(\mu) = +\infty$, если $c_+(\mu) = +\infty$), а $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ — множество положительных борелевских мер μ на $X \times Y$, для которых σ_1 и σ_2 являются их маргинальными мерами: $\pi_1(\mu) = \sigma_1$, $\pi_2(\mu) = \sigma_2$. Положим

$$\mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2) := \inf \left\{ \int_X c(x, f(x)) \sigma_1(dx) : f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2) \right\}, \quad (2)$$

где $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ — множество сохраняющих меру отображений $f: X \rightarrow Y$. Борелевское отображение f называется сохраняющим меру, если $f(\sigma_1) = \sigma_2$,

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 96-01-00336.

т. е. $\sigma_1(f^{-1}(B_2)) = \sigma_2 B_2$ для каждого борелевского множества $B_2 \subseteq Y$. Отображение $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ порождает меру $\mu_f = (\text{id}_X \times f)(\sigma_1) \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ и $c(\mu_f) = \int_X c(x, f(x)) \sigma_1(dx)$. Следовательно,

$$\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2) \leq \mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2). \quad (3)$$

Неравенство (3), как правило, оказывается строгим (во многих случаях $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ вообще пусто и, стало быть, $\mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2) = +\infty$).

Нас интересуют случаи, когда (3) выполнено со знаком равенства и в задаче (1) существует единственная оптимальная мера, порождаемая отображением $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$. Если $X = Y$ — метрический компакт, а $c(x, y)$ — его метрика, (1) превращается в классическую задачу Монжа–Канторовича, являющуюся расширением (релаксацией) старинной задачи Монжа «о выемках и насыпях» [1]. Задача Монжа — это задача (2), в которой X и Y — равнообъемные области в $\mathbb{R}^n$, c — евклидово расстояние, а σ_1 и σ_2 — ограничения n -мерной меры Лебега на X и Y . Существование оптимального отображения в задаче Монжа получено Аппелем в 1887 г. В наше время Судаков [2] получил обобщение теоремы Аппеля для $c(x, y) = \|x - y\|$ (норма не обязательно евклидова) и абсолютно непрерывных σ_1 и σ_2 . При этом оптимальная мера неединственна. Недавно Ганжбо и Мак-Канн [3] доказали существование оптимального отображения, эквивалентность задач (1) и (2) и единственность оптимальной меры при условии, что $X = Y = \mathbb{R}^n$, σ_1 абсолютно непрерывна по n -мерой мере Лебега и $c(x, y) = h(x - y)$, где h — неотрицательная строго выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая специальным предположениям. Случай неотрицательной квадратической функции h исследовался ранее рядом авторов; соответствующая литература приведена в [3].

В настоящей заметке существование оптимального отображения, эквивалентность задач (1) и (2) и единственность оптимальной меры получены в весьма общей ситуации и для широкого класса функций стоимости.

2. Основная теорема. Далее X — замыкание открытого множества в $\mathbb{R}^n$, а Y — произвольное польское пространство. Нам понадобятся следующие условия:

(A_1) мера σ_1 абсолютно непрерывна по n -мерной мере Лебега;

(A_c) если для $y_1, y_2 \in \text{supp } \sigma_2$ функции $c(\cdot, y_1)$ и $c(\cdot, y_2)$ дифференцируемы в некоторой точке $x \in \text{int } X$ и их градиенты в x совпадают, то $y_1 = y_2$.

Условие (A_c) выполнено, в частности, когда $Y = X$ и $c(x, y) = h(x - y)$, где h строго выпукла или строго вогнута.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что величина $\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2)$ конечна и в задаче (1) существует оптимальная мера. Тогда она единственна и порождается единственным (с точностью до σ_1 -эквивалентности) отображением $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ в каждом из следующих случаев: (I) выполнены условия (A_1), (A_c), X выпукло и либо все $c(\cdot, y)$ ($y \in \text{supp } \sigma_2$) вогнуты, либо все они выпуклы; (II) выполнено (A_1), $\text{supp } \sigma_2$ компактно, $\text{int } \text{supp } \sigma_1$ непусто, причем $\text{mes}(\text{supp } \sigma_1 \setminus \text{int } \text{supp } \sigma_1) = 0$ (mes обозначает n -мерную меру Лебега), функции $c(\cdot, y)$ ($y \in \text{supp } \sigma_2$) дифференцируемы на $\text{int } \text{supp } \sigma_1$, причем если $\nabla_x c(x, y_1) = \nabla_x c(x, y_2)$ в некоторой точке $x \in \text{int } \text{supp } \sigma_1$, то $y_1 = y_2$,*

и все $c(\cdot, y)$ ($y \in \text{supp } \sigma_2$) локально липшицевы на $\text{supp } \sigma_1$ равномерно по $y \in \text{supp } \sigma_2$.

Существование оптимальной меры в задаче (1) — это отдельный (и более простой) вопрос. См. [4, Theorem 9].

3. Вспомогательные результаты. Пусть X — произвольное множество и L — некоторое множество вещественных функций на X . Многозначное отображение $F: X \rightarrow L$ назовем L -циклически монотонным, если для каждого цикла $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} = x_1$ в $\text{dom } F := \{x: F(x) \neq \emptyset\}$ и любых $l_k \in F(x_k)$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^m (l_k(x_k) - l_k(x_{k+1})) \geq 0. \quad (4)$$

Заменяя в (4) $\geq$ на $\leq$, получаем определение L -циклически антимонотонного отображения. L -циклически монотонные отображения — это обобщение классических циклически монотонных отображений [5], а L -циклически антимонотонные отображения — обобщение так называемых c -циклически антимонотонных отображений [6].

Функция $U: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется L -выпуклой, если она допускает представление $U(x) = \sup \{l(x) - \alpha : (l, \alpha) \in A\}$, $x \in X$, где $A = A(U)$ — непустое подмножество в $L \times \mathbb{R}$. Множество

$$\partial_L U(x) := \{l \in L : l(z) - l(x) \leq U(z) - U(x) \quad \forall z \in X\},$$

где U L -выпукла и $x \in \text{dom } U := \{z \in X : U(z) < +\infty\}$, называется L -субдифференциалом функции U в x . Для $x \notin \text{dom } U$ считаем по определению $\partial_L U(x) = \emptyset$.

Аналогично определяются L -вогнутая функция $V: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и ее L -супердифференциал $\partial^L V(x)$ в $x \in \text{dom } V := \{z: V(z) > -\infty\}$. При этом $\partial_{(-L)}(-V) = \partial^L V$.

Пусть $F: X \rightarrow L$ — многозначное отображение, $Z := \text{dom } F$. Рассмотрим на $Z \times Z$ две функции стоимости

$$\begin{aligned} \varphi_F(z_1, z_2) &= \varphi_{F,L}(z_1, z_2) := \inf \{l(z_1) - l(z_2) : l \in F(z_1)\}, \\ \psi_F(z_1, z_2) &= \psi_{F,L}(z_1, z_2) := \inf \{l(z_1) - l(z_2) : l \in F(z_2)\} \end{aligned}$$

и отметим тождество $\psi_{F,L}(z_1, z_2) = \varphi_{-F,-L}(z_2, z_1)$.

С каждой функцией $c: Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ ассоциируется множество

$$Q_0(c) := \{u \in \mathbb{R}^Z : u(z_1) - u(z_2) \leq c(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in Z\};$$

условия непустоты $Q_0(c)$ даны в [7, 8].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F: X \rightarrow L$, $Z = \text{dom } F$.

(I) Следующие утверждения равносильны: (а) F L -циклически монотонно; (б) $Q_0(\varphi_F)$ непусто.

(II) Пусть F L -циклически монотонно. Тогда $u \in Q_0(\varphi_F)$, если и только если $u = U|_Z$, где $U: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ L -выпукла и $F(z) \subseteq \partial_L U(z)$ для всех $z \in Z$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Отсюда вытекает аналогичная теорема, формулировка которой получается при замене L -циклической монотонности, L -выпуклости и φ_F на L -циклическую антимонотонность, L -вогнутость и ψ_F .

2. Объединяя (I) и (II), получаем абстрактный вариант известной теоремы Рокафеллера: F является L -циклически монотонным тогда и только тогда, когда существует L -выпуклая функция U , такая, что $F(x) \subseteq \partial_L U(x)$ для любой $x \in X$.

Далее X — замыкание открытого множества в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим следующие условия на X и L :

(H_1) X выпукло и все $l \in L$ выпуклы и полунепрерывны снизу;

(H'_1) X выпукло и все $l \in L$ вогнуты и полунепрерывны сверху;

(H_2) все $l \in L$ дифференцируемы на $\text{int } X$ и для каждой точки $x \in X$ найдутся окрестность G_x и число $C = C(x) > 0$, такие, что $|l(x_1) - l(x_2)| \leq C \|x_1 - x_2\|$ при любых $x_1, x_2 \in G_x$, $l \in L$;

(H_3) если две функции l_1 и l_2 из L дифференцируемы в некоторой точке $x \in \text{int } X$ и $\nabla l_1(x) = \nabla l_2(x)$, то $l_1 = l_2$.

Обозначим через $S(F)$ множество точек $x \in \text{dom } F$, в которых F однозначно.

ТЕОРЕМА 3. Множество $\text{dom } F \setminus S(F)$ имеет лебегову меру нуль в каждом из следующих случаев: (I) F L -циклически монотонно и выполнены условия (H_1), (H_3); (II) F L -циклически антимонотонно и выполнены условия (H'_1), (H_3); (III) F L -циклически монотонно или L -циклически антимонотонно, $\text{mes}(\text{dom } F \setminus \text{int dom } F) = 0$ и выполнены условия (H_2), (H_3).

4. О доказательствах. Классический вариант теоремы 2 см. в [7, 8]. В общем случае доказательство аналогично. В доказательстве теоремы 3 используются теорема 2, теорема Радемахера и дифференцируемость почти всюду выпуклых функций на $\mathbb{R}^n$. В доказательстве теоремы 1 используется теорема 3 и тот факт (ср. [3]), что оптимальность $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ влечет за собой L -циклическую монотонность отображения $F(x) = \{-c(\cdot, y) : (x, y) \in \text{supp } \mu\}$ для $L = \{-c(\cdot, y) : y \in \pi_2 \text{supp } \mu\}$ и $(-L)$ -циклическую антимонотонность отображения $-F$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Наука, М., 1984.
2. Судаков В. Н. Труды МИАН, **141** (1976).
3. Gangbo W., McCann R. J. Acta Math., **177**, 113–161 (1996).
4. Levin V. L. In: Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics. Oxford University Press, 1990, pp. 141–176.
5. Rockafellar R. T. Pacif. J. Math., **17**, 497–510 (1966).
6. Smith C. S., Knott M. J. Multivariate Anal., **40**, 328–334 (1992).
7. Левин В. Л. Матем. сб., **181**, № 12, 1694–1709 (1990).
8. Levin V. L. Set-Valued Anal., **4**, No. 1, 41–65 (1996).