Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Рыжов, О сингулярном и абсолютно непрерывном подпространствах несамосопряженного оператора, характеристическая функция которого обладает граничными значениями на вещественной оси, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 83–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:58:26

УДК 517.9

**О сингулярном и абсолютно непрерывном
подпространствах несамосопряженного оператора,
характеристическая функция которого обладает
граничными значениями на вещественной оси**

© 1998. В. А. Рыжов

Целью заметки является изложение ряда результатов, связанных с внутренней структурой абсолютно непрерывных и сингулярных подпространств несамосопряженного оператора. По своему направлению она примыкает к исследованиям [1–7], распространяя часть полученных там результатов на более широкий класс операторов и формулируя эти результаты в виде прямых обобщений известных положений «самосопряженной» теории.

Задачи несамосопряженной теории рассеяния, рассматриваемые в контексте общей спектральной теории линейных операторов, оформились в самостоятельный раздел под значительным влиянием работ Т. Като, развившего в [15] теорию гладких возмущений операторов, до сих пор активно используемую при изучении вопросов устойчивости абсолютно непрерывного спектра [13], а также работ Л. А. Сахновича [16, 17], основным объектом исследования которых является характеристическая оператор-функция несамосопряженного оператора, введенная М. С. Лившицем [18] и ставшая к настоящему времени предметом многочисленных исследований (см., например, [2, 10, 11]). Последовавшее вслед за этим развитие подхода функциональной модели в теории несамосопряженных операторов, существенно опирающееся на понятие характеристической функции, принесло ряд новых важных результатов, касающихся как устойчивости спектра в смысле теории возмущений, так и собственно построения «несамосопряженной» теории рассеяния [1–9, 11]. Настоящая заметка содержит результаты о строении (локальных) абсолютно непрерывного и сингулярного подпространств линейного несамосопряженного оператора общего вида, характеристическая оператор-функция которого обладает граничными значениями почти всюду на вещественной оси. Тем самым ряд положений работ [1–7] распространяется сразу в двух направлениях: первое — ослабляется требование существования скалярного кратного u характеристической функции оператора, гарантирующее существование указанных граничных значений, и второе — рассматриваемый оператор может не допускать представления вида «самосопряженный + возмущение», чем охватывается ситуация «несамосопряженного граничного условия», возникающая в теории граничных задач для дифференциальных операторов. Помимо этого работа содержит и представляющиеся новыми сведения по вопросам описания (локальных) абсолютно непрерывного и сингулярного подпространств несамосопряженного оператора. Доказательства всех полученных результатов существенно опираются на технику функциональной модели, однако приводимые здесь формулировки не используют «модельной» терминологии.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается замкнутый оператор L с плотной в H областью определения $D(L)$. Предполагается, что $\rho(L) \cap \mathbb{C}_{\pm} \neq \emptyset$ ($\rho(L)$ — резольвентное множество оператора L , $\mathbb{C}_{\pm} := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$) и, кроме того, L вполне несамосопряжен. Последнее означает отсутствие у L нетривиальных приводящих самосопряженных частей¹. Напомним определение характеристической функции оператора L (см. [10] или [11]). Пусть для определенности $(-i) \in \rho(L)$. Операторы $Q := R + R^* - 2R^*R$, $Q_* := R + R^* - 2RR^*$, где $R := (L + i)^{-1}$, являются самосопряженными в H и $J := \operatorname{sign} Q|_E$, $J_* := \operatorname{sign} Q_*|_{E_*}$, где $E := \operatorname{clos} QH$, $E_* := \operatorname{clos} Q_*H$, являются инволюциями в E , E_* соответственно. Нормированная характеристическая оператор-функция $\Theta(\cdot)$ оператора L аналитична на $\rho(L^*)$, принимает значения в алгебре ограниченных операторов, действующих из E в E_* и однозначно определяется тождеством $\Theta(z)Gu = G_*(L^* - z)^{-1}(L - z)u$ ($u \in D(L)$, $z \in \rho(L^*)$). Здесь G , G_* — замыкания отображений $\tilde{G} := |Q|^{1/2}(L + i)$, $\tilde{G}_* := |Q_*|^{1/2}(L^* - i)$, заданных на $D(G) \equiv D(L)$ и $D(G_*) \equiv D(L^*)$ соответственно. Заметим, что $(-i)[(Lu, v) - (u, Lv)] = (JGu, Gv)$ для $u, v \in D(L)$ (и аналогичное равенство справедливо с заменой L , J , G на $-L^*$, J_* , G_* для $u, v \in D(L^*)$).

Всюду ниже считается выполненным следующее

ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Найдется такая почти всюду² положительная функция $\varepsilon^0(k)$, $k \in \mathbb{R}$, что для почти всех $k \in \mathbb{R}$ существует

$$\operatorname{w}\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Theta(k \pm i\varepsilon) =: \Theta(k \pm i0), \quad \varepsilon < \varepsilon^0(k).$$

Из результатов работы [10] легко следует, что основное предположение выполнено (или нет) для операторов L и L^* одновременно.

Ниже $R(z) := (L - zI)^{-1}$, $z \in \rho(L)$, — резольвента оператора L , $\delta \subset \mathbb{R}$ — измеримое подмножество вещественной оси $\mathbb{R}$ и $\chi_{\delta}(\cdot)$ — его индикатор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для $u, v \in H$ существуют при п. в. $k \in \mathbb{R}$ пределы

$$\operatorname{w}\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [GR(k \pm i\varepsilon)u], \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}_{u,v}^{\pm}(k \pm i\varepsilon),$$

где $\mathcal{F}_{u,v}^{\pm}(z) := (R(z)u, v)$, $z \in \rho(L) \cap \mathbb{C}_{\pm}$ (см. [5]).

Пусть $\partial \mathcal{F}_{u,v}(k) := \mathcal{F}_{u,v}^+(k + i0) - \mathcal{F}_{u,v}^-(k - i0)$ для п. в. $k \in \mathbb{R}$,

$$N_s(\delta) := \{u \in H \mid \partial \mathcal{F}_{u,v}(k) = 0 \text{ для п. в. } k \in \delta, \forall v \in H\},$$

$$N_{*s}(\delta) := \{v \in H \mid \partial \mathcal{F}_{u,v}(k) = 0 \text{ для п. в. } k \in \delta, \forall u \in H\},$$

$$N_a(\delta) := H \ominus N_{*s}(\delta).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для $\delta \subset \mathbb{R}$ подпространства $N_s(\delta)$, $N_a(\delta)$ называются (локальными) сингулярным и абсолютно непрерывным подпространствами оператора L , соответствующими множеству δ .

¹Это предположение по существу не является ограничением.

²Понятия «почти всюду», «почти все» (п. в.) и понятие измеримости относятся к мере Лебега на вещественной оси $\mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $N_s(\delta)$, $N_a(\delta)$ ультраинвариантны [11] относительно L .
Ниже приводятся более явные описания подпространств $N_s(\delta)$, $N_a(\delta)$.

ТЕОРЕМА 1. Для $u \in H$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $u \in N_s(\delta)$;
- 2) $GR(k + i0)u = GR(k - i0)u$ для п.в. $k \in \delta$, где $GR(k \pm i0)u := \text{w-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} [GR(k \pm i\varepsilon)u]$.

Если в дополнение к основному предположению для п.в. $k \in \mathbb{R}$ существуют $\text{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} [\Theta(k \pm i\varepsilon)]^*$, то любое из утверждений 1), 2) равносильно каждому из следующих четырех:

- 3 $^\pm$) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \|R(k \pm i\varepsilon)u\|^2 = 0$ для п.в. $k \in \delta$;
- 4 $^\pm$) $\alpha^\pm(u, v; k) = 0$ для п.в. $k \in \delta$, $v \in H$, где

$$\alpha^\pm(u, v; k) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon (R(k \pm i\varepsilon)u, R(k \pm i\varepsilon)v),$$

причем указанные пределы существуют для $u, v \in H$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2. 1. $N_a(\delta) = \text{clos } \tilde{\mathcal{N}}(\delta) = \text{clos } \tilde{\mathcal{N}}_w(\delta)$, где

$$\tilde{\mathcal{N}}(\delta) := \{u \in H \mid GR(z)u \in H_2^\pm(E),$$

$$GR(k + i0)u = GR(k - i0)u \text{ для п.в. } k \in \mathbb{R} \setminus \delta\},$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_w(\delta) := \{u \in H \mid \mathcal{F}_{u,v}^\pm \in H_2^\pm, \partial \mathcal{F}_{u,v}(k) = 0 \text{ для п.в. } k \in \mathbb{R} \setminus \delta, \forall v \in H\}$$

($H_2^\pm$, $H_2^\pm(E)$ — классы Харди скалярных и E -значных функций).

2. Для измеримого множества X , $X \subset \mathbb{R}$, обозначим через H_X максимальное инвариантное подпространство оператора L , такое, что $L|_{H_X}$ подобен самосопряженному абсолютно непрерывному оператору со спектром в X ($H_X = \{0\}$, если такого пространства не существует). Тогда $H_X \subset N_a(X)$ и $N_a(X) = \text{span}(H_X \mid X \subset \delta)$.

ТЕОРЕМА 3. Для $u \in H$ следующие утверждения 1)–3) равносильны:

- 1) $u \in \tilde{\mathcal{N}}_w(\delta)$;
- 2) $u \in \tilde{\mathcal{N}}_w(\delta)$ и найдется константа $C = C(u) < \infty$, такая, что $\|\mathcal{F}_{u,v}^\pm\|_{L_2} \leq C\|v\|$ при всех $v \in H$;
- 3) для любого оператора $B: H \rightarrow H$ класса Гильберта–Шмидта $BR(z)u \in H_2^\pm(H)$ и $BR(k + i0)u = BR(k - i0)u$ при п.в. $k \in \mathbb{R} \setminus \delta$, где $BR(k \pm i0)u := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [BR(k \pm i\varepsilon)u]$ существует для п.в. $k \in \mathbb{R}$ [2, 11].

Отметим, что при более сильных, нежели основное предположение, ограничениях, случай $\delta = \mathbb{R}$ теоремы 3 и равенство $\text{clos } \tilde{\mathcal{N}}_w(\mathbb{R}) = N_a(\mathbb{R})$ из теоремы 2 доказаны в [4].

Изложенное выше позволяет ввести функциональное исчисление для абсолютно непрерывной части оператора L (т.е. для сужения $L|_{N_a(\mathbb{R})}$) «привычным» способом и проверить его согласованность с имеющимся [1, 4, 5]. Приведем лишь один относящийся сюда результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\delta \subset \mathbb{R}$. Тогда $\partial \mathcal{F}_{u,v} \in L_1(\delta)$ для всех $u \in \tilde{H}(\delta) := \tilde{\mathcal{N}}(\mathbb{R}) + N_s(\delta)$, $v \in H$ и оператор $\mathcal{P}(\delta)$, определенный на $\tilde{H}(\delta)$ своей формой

$(\mathcal{P}(\delta)u, v) := (2\pi i)^{-1} \int_{\delta} \partial \mathcal{F}_{u,v}(k) dk$, $u \in \tilde{H}(\delta)$, $v \in H$, является спектральным проектором из $\tilde{H}(\delta)$ на $\tilde{\mathcal{N}}(\delta)$ параллельно $N_s(\delta)$ в смысле выполнения следующих равенств:

$$\mathcal{P}(\delta)\tilde{H}(\delta) = \tilde{\mathcal{N}}(\delta), \quad \ker \mathcal{P}(\delta) = N_s(\delta), \quad [\mathcal{P}(\delta)]^2 = \mathcal{P}(\delta),$$

$$R(z)\mathcal{P}(\delta)u = \mathcal{P}(\delta)R(z)u, \quad u \in \tilde{H}(\delta), \quad z \in \rho(L).$$

Кроме того, $\mathcal{P}(\delta)u = \chi_{\delta}(L|_{N_a(\mathbb{R})})u$ для $u \in \tilde{H}(\delta)$, где правая часть определена с помощью функциональной модели L [1, 4, 5].

Следующая теорема является «локальным» обобщением некоторых результатов из [2, 3, 7] на рассматриваемый здесь случай.

ТЕОРЕМА 5. Пусть для $\delta \in \mathbb{R}$ имеет место оценка $(C(\delta) < \infty)$

$$\operatorname{ess\,sup}_{k \in \delta} (\|(I + J_*)\Theta(k - i0)(I + J)\| + \|(I - J_*)\Theta(k + i0)(I - J)\|) \leq C(\delta).$$

Тогда

- 1) $\|\mathcal{P}(\delta)\| < \infty$;
- 2) $N_a(\delta) \cap N_s(\delta) = \{0\}$;
- 3) $\tilde{\mathcal{N}}(\delta) = N_a(\delta)$;
- 4) $N_a(\delta) \dot{+} N_s(\delta) = H$;
- 5) $N_a(\delta) = H_{\delta}$ (см. теорему 2).

ПРИМЕР. В качестве простого иллюстративного примера несамосопряженного оператора, для которого выполнено основное предположение, рассмотрим оператор Шрёдингера $\mathcal{L}$, определенный как псевдорасширение по Фридрихсу [12] заданной на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ суммы $-\Delta + V(x)$, где $-\Delta$ — свободный Лапласиан в $H := L_2(\mathbb{R}^n)$, а комплекснозначная функция $V(\cdot)$ такова, что $(1 + |x|^2)^{1/2+\gamma}V(x)(-\Delta + I)^{-1}$ компактен (в H) для некоторого $\gamma > 0$ (V — комплексный потенциал Агмона [13]). Характеристическая функция $\Theta(z)$ вполне несамосопряженной части оператора $\mathcal{L}$ определена при всех $z \in \mathbb{C}$ с достаточно большой мнимой частью; она может быть записана в виде

$$\Theta(z) = (I + 2i|V_I|^{1/2}(\mathcal{L}^* - zI)^{-1}|V_I|^{1/2}J)|_E, \quad z \in \rho(\mathcal{L}^*),$$

где $V_I := (2i)^{-1}(V - V^*)$, $J := \operatorname{sign} V_I$, $E := \operatorname{clos} V_I H$, см. [8, 14]. Для нее существование граничных значений $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\Theta(k \pm i\varepsilon)]^*$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$ может быть проверено аналогично [9]. Несложно также было бы вывести этот результат из следующего варианта принципа предельного поглощения для оператора $\mathcal{L}$ (ср. [13]):

ТЕОРЕМА. Пусть $H_t := \{f(x) \mid \|f\|_t^2 := \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^t |f(x)|^2 dx < \infty\}$, $t \in \mathbb{R}$. При $t > 1/2$ существуют пределы $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\mathcal{L} - k \pm i\varepsilon)^{-1}$ для п.в. $k \in \mathbb{R}$ по норме алгебры ограниченных операторов, действующих из H_t в H_{-t} .

Другие примеры операторов³, для которых выполнено основное предположение настоящей работы, легко можно построить, опираясь на следующее

³Заметим, что, вообще говоря, сформулированное ниже утверждение неприменимо к только что приведенному в качестве примера оператору Шрёдингера.

(доказанное в [5]) утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть разность $(L - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1}$ ядерна для некоторого $z \in \rho(L) \cap \rho(A)$, где $A = A^*$ — самосопряженный оператор в H . Тогда пределы $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Theta(k \pm i\varepsilon)$, $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\Theta(k \pm i\varepsilon)]^*$ существуют для п.в. $k \in \mathbb{R}$ (здесь $\Theta(\cdot)$ — характеристическая функция вполне несамосопряженной части оператора L).

В заключение автор благодарит С. Н. Набоко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Набоко С. Н. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **65**, 90–102 (1976).
2. Павлов Б. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, 123–148 (1975).
3. Веселов В. Ф. Вестн. ЛГУ, мат., мех., астр., **2**, 11–17 (1988).
4. Тихонов А. С. Абсолютно непрерывный спектр линейного оператора. УкрНИИТИ, Симферополь, 2471-Ук88, 1988.
5. Makarov N. G., Vasjunin V. I. In: Lecture Notes in Math., Vol. 864, 1981, pp. 365–412.
6. Makarov N. G. In: 49 Alfred Haar Memorial Conference, 1985, pp. 611–621.
7. Набоко С. Н. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **113**, 149–177 (1981).
8. Набоко С. Н. Труды МИАН, **147**, 86–114 (1980).
9. Набоко С. Н. В кн.: Пробл. мат. физики, вып. 12, Изд-во ЛГУ, Л., 1987, с. 132–135.
10. Штраус А. В. Изв. АН СССР, сер. матем., **24**, вып. 1, 43–74 (1960).
11. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970.
12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4: Анализ операторов. Мир, М., 1982.
14. Павлов Б. С. Матем. сб., **102**, вып. 4, 511–526 (1977).
15. Kato T. Math. Ann., **162**, 258–279 (1966).
16. Сажнович Л. А. Труды ММО, **19**, 211–270 (1968).
17. Сажнович Л. А. Функц. анализ и его прил., **2**, вып. 1, 51–63 (1968).
18. Лившиц М. С. Матем. сб., **34**, вып. 1, 145–199 (1954).

Санкт-Петербургская государственная
академия аэрокосмического приборостроения

Поступило в редакцию
2 июля 1993 г.
В переработанном виде
18 декабря 1997 г.

УДК 517.986

К вопросу о классификации банаховых алгебр сингулярных интегральных операторов с PC -коэффициентами в пространствах L_p на сложных контурах

© 1998. В. А. Стукопин

1. В данной работе уточняется теорема о классификации банаховых алгебр сингулярных интегральных операторов с PC -коэффициентами, действующих в L_p -пространствах на сложных контурах, в случае заранее не фиксированного показателя p . В частном случае, когда p фиксировано, эта теорема была сформулирована в [1] (теорема 5).