Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Стукопин, К вопросу о классификации банаховых алгебр сингулярных интегральных операторов с PC -коэффициентами в пространствах L_p на сложных контурах, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 03:31:30

(доказанное в [5]) утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть разность $(L - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1}$ ядерна для некоторого $z \in \rho(L) \cap \rho(A)$, где $A = A^*$ — самосопряженный оператор в H . Тогда пределы $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Theta(k \pm i\varepsilon)$, $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\Theta(k \pm i\varepsilon)]^*$ существуют для п.в. $k \in \mathbb{R}$ (здесь $\Theta(\cdot)$ — характеристическая функция вполне несамосопряженной части оператора L).

В заключение автор благодарит С. Н. Набоко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Набоко С. Н. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **65**, 90–102 (1976). 2. Павлов Б. С. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, 123–148 (1975). 3. Веселов В. Ф. Вестн. ЛГУ, мат., мех., астр., **2**, 11–17 (1988). 4. Тихонов А. С. Абсолютно непрерывный спектр линейного оператора. УкрНИИТИ, Симферополь, 2471-Ук88, 1988. 5. Makarov N. G., Vasjunin V. I. In: Lecture Notes in Math., Vol. 864, 1981, pp. 365–412. 6. Makarov N. G. In: 49 Alfred Haar Memorial Conference, 1985, pp. 611–621. 7. Набоко С. Н. Зап. научн. семинаров ЛОМИ, **113**, 149–177 (1981). 8. Набоко С. Н. Труды МИАН, **147**, 86–114 (1980). 9. Набоко С. Н. В кн.: Пробл. мат. физики, вып. 12, Изд-во ЛГУ, Л., 1987, с. 132–135. 10. Штраус А. В. Изв. АН СССР, сер. матем., **24**, вып. 1, 43–74 (1960). 11. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970. 12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972. 13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4: Анализ операторов. Мир, М., 1982. 14. Павлов Б. С. Матем. сб., **102**, вып. 4, 511–526 (1977). 15. Kato T. Math. Ann., **162**, 258–279 (1966). 16. Сажнович Л. А. Труды ММО, **19**, 211–270 (1968). 17. Сажнович Л. А. Функц. анализ и его прил., **2**, вып. 1, 51–63 (1968). 18. Лившиц М. С. Матем. сб., **34**, вып. 1, 145–199 (1954).

Санкт-Петербургская государственная
академия аэрокосмического приборостроения

Поступило в редакцию
2 июля 1993 г.
В переработанном виде
18 декабря 1997 г.

УДК 517.986

К вопросу о классификации банаховых алгебр сингулярных интегральных операторов с PC -коэффициентами в пространствах L_p на сложных контурах

© 1998. В. А. Стукопин

1. В данной работе уточняется теорема о классификации банаховых алгебр сингулярных интегральных операторов с PC -коэффициентами, действующих в L_p -пространствах на сложных контурах, в случае заранее не фиксированного показателя p . В частном случае, когда p фиксировано, эта теорема была сформулирована в [1] (теорема 5).

Пусть Δ — конечное множество простых ориентированных ляпуновских разомкнутых дуг. Предполагается, что любые две дуги из Δ могут пересекаться лишь в концевых точках, а касательные лучи к разным дугам в точках их пересечения не совпадают. Пусть Γ — объединение всех дуг из Δ , Ξ — множество концевых точек этих дуг, а $\Delta(\xi)$, где $\xi \in \Xi$, — множество всех тех дуг из Δ , которые содержат ξ . Пусть $L_{p,\omega}^n(\Gamma)$ — пространство n -мерных вектор-функций, суммируемых с p -й степенью ($1 < p < \infty$) со степенным весом Хведелидзе $\omega(t) = \prod_{\xi \in \Xi} |t - \xi|^{\alpha_\xi}$, где $-1 < \alpha_\xi < p - 1$. Для банахова пространства X через $\text{End}(X)$ будем обозначать банахову алгебру эндоморфизмов пространства X . Пусть $M_{p,\omega}^n(\Gamma, \Xi)$ — замкнутая подалгебра в $\text{End}(L_{p,\omega}^n(\Gamma))$, порожденная сингулярным интегральным оператором Коши S_Γ и операторами умножения на матрицы-функции из $L(n; PC(\Gamma; \Xi))$, где $PC(\Gamma; \Xi) \subset L_\infty$ — алгебра функций, непрерывных на $\Gamma \setminus \Xi$ и имеющих пределы при подходе к точкам $\xi (\in \Xi)$ вдоль каждой из дуг $\delta (\in \Delta(\xi))$. Наряду с описанным выше сложным контуром Γ , весом ω и числом p рассмотрим аналогично определяемый сложный контур Γ_1 с множеством узловых точек Ξ_1 и весом ω_1 , а также число q ($1 < q < \infty$). Основным результатом данной заметки является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы банаховы алгебры $M_{p,\omega}^n(\Gamma, \Xi)$ и $M_{q,\omega_1}^m(\Gamma_1, \Xi_1)$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы: 1) пары (Γ, Ξ) и (Γ_1, Ξ_1) были гомеоморфны; 2) $m = n$; 3) $p = q$ или $p = q/(q - 1)$.*

Отметим, что в случае $p = q$ теорема анонсирована в [1] (теорема 5).

2. Приведем необходимые при доказательстве теоремы 1 сведения, связанные с алгеброй символов алгебры $M_{p,\omega}^n(\Gamma, \Xi)$ (см. [1]).

Для компактного метрического пространства X через $C(X)$ будем обозначать банахову алгебру всех непрерывных на X комплекснозначных функций с равномерной нормой.

Обозначим через $\bar{\mathbb{R}}$ компактификацию прямой $\mathbb{R}$ двумя точками $\{-\infty, \infty\}$, а через $C(\bar{\mathbb{R}})$ банахову алгебру непрерывных на $\mathbb{R}$ и непрерывно продолжимых на $\bar{\mathbb{R}}$ комплекснозначных функций с равномерной нормой. Через $C_p(\bar{\mathbb{R}})$ обозначим замыкание пересечения пространства функций с ограниченной вариацией и $C(\bar{\mathbb{R}})$ по норме пространства L_p -мультипликаторов Фурье M_p^p . Известно, что $C_p(\bar{\mathbb{R}})$ — банахова алгебра, непрерывно и плотно вложенная в $C_2(\bar{\mathbb{R}}) = C(\bar{\mathbb{R}})$ [2]. Пусть $C_p^n(\bar{\mathbb{R}}) = L(n; C_p(\bar{\mathbb{R}}))$. Через $L(Y; C_p^n(\bar{\mathbb{R}}))$, где Y — произвольное конечное множество, будем обозначать банахову алгебру обобщенных матриц $u = \{u_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in Y}$ над $C_p^n(\bar{\mathbb{R}})$ с нормой $\|u\| = \sum_{\alpha,\beta \in Y} \|u_{\alpha,\beta}\|_{C_p^n(\bar{\mathbb{R}})}$ и естественно определенными операциями сложения, умножения и умножения на скаляр. Пусть $B_p^{n,Y}$ — замкнутая подалгебра в $L(Y; C_p^n(\bar{\mathbb{R}}))$, состоящая из всех тех матриц-функций $u = \{u_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in Y}$, для которых $u_{\alpha,\beta}(\pm\infty) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Пусть $\xi \in \Xi$, $\delta \in \Delta(\xi)$; если ориентация дуги δ соответствует движению по направлению к точке ξ , то положим $\text{or}_\xi(\delta) = 1$; в противном случае пусть

$\text{or}_\xi(\delta) = -1$. Через $N_p^n(\Gamma; \Xi)$ обозначим множество наборов

$$a = \{a_\xi\}_{\xi \in \Xi} \cup \{a_{\delta, \varepsilon}\}_{\delta \in \Delta, \varepsilon \in \{\pm 1\}},$$

где $a_\xi = \{(a_\xi)_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta \in \Delta(\xi)} \in B_p^{n, \Delta(\xi)}$, $a_{\delta, \varepsilon} \in L(n; C(\delta))$ и $(a_\xi)_{\beta, \beta}(\varepsilon \cdot \text{or}_\xi(\delta) \cdot \infty) = a_{\beta, \varepsilon}(\xi)$ для произвольного $\beta \in \Delta(\xi)$. Отметим, что $N_p^n(\Gamma; \Xi)$ — банахова алгебра с поэлементно определенными операциями и нормой

$$\|a\| = \max \{ \max \{ \|a_\xi\|, \xi \in \Xi \}, \max \{ \|a_{\delta, \varepsilon}\| : \delta \in \Delta, \varepsilon \in \{\pm 1\} \} \}.$$

Отметим, что существует эпиморфизм $\sigma: M_{p, \omega}^n(\Gamma, \Xi) \rightarrow N_p^n(\Gamma, \Xi)$ (см. [1]), ядро которого — идеал компактных операторов $\text{Comp}(L_{p, \omega}^n(\Gamma))$. Отсюда, в частности, вытекает, что алгебры $M_{p, \omega}^n(\Gamma, \Xi)$ и $M_{p, \omega_1}^n(\Gamma, \Xi)$ изоморфны при различных допустимых значениях весов Хведелидзе ω и ω_1 .

3. Сформулируем несколько вспомогательных утверждений, необходимых при доказательстве теоремы 1, которые, на наш взгляд, могут представлять и самостоятельный интерес. Пусть φ_0 — такая неотрицательная бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, что $\varphi_0(x) = 1$ при $|x| \geq 2$ и $\varphi_0(x) = 0$ при $|x| \leq 1$. Рассмотрим следующее семейство функций $\{\varphi_a^b(x)\}$, параметризованное множеством пар положительных вещественных чисел a, b :

$$\varphi_a^b(x) = \varphi_0(x) \exp(i|x|^a)/|x|^b. \quad (1)$$

Следующая лемма уточняет известный для пространств мультипликаторов результат [4].

ЛЕММА 1. 1) $\varphi_a^b \in C_p(\overline{\mathbb{R}})$, если $|1/2 - 1/p| < b/a$;

2) $\varphi_a^b \notin C_p(\overline{\mathbb{R}})$, если $|1/2 - 1/p| > b/a$.

Для положительной функции f , определенной на $\mathbb{R}$, и $\beta > 0$ рассмотрим величину

$$V_\beta(f) = \sup \left(\sum_{k=1}^{r-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^\beta \right)^{1/\beta}, \quad (2)$$

где верхняя грань берется по всем конечным возрастающим последовательностям точек.

Следующая теорема является непрерывным аналогом результата, доказанного в [4].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in C(\overline{\mathbb{R}})$ и $\varphi(x) = O(|x|^{-\delta})$ при $|x| \rightarrow \infty$ для некоторого $\delta > 0$ и $V_\beta(\varphi) < \infty$ для некоторого $\beta > 2$. Тогда $\varphi \in M_p^r$ для произвольного p , удовлетворяющего условиям $(1/2 + 1/\beta)^{-1} < p < (1/2 - 1/\beta)^{-1}$.

Для коммутативной банаховой алгебры A через $\text{Max } A$ будем обозначать пространство ее максимальных идеалов, снабженное топологией Гельфанда. Хорошо известно, что изоморфизм $\alpha: A \rightarrow B$ коммутативных банаховых алгебр индуцирует изоморфизм их пространств максимальных идеалов $\hat{\alpha}: \text{Max } B \rightarrow \text{Max } A$. Коммутативную банахову алгебру A можно рассматривать как подалгебру алгебры $C(\text{Max } A)$ всех непрерывных функций на

пространстве ее максимальных идеалов. При таком отождествлении изоморфизм α определяется гомеоморфизмом $\hat{\alpha}$ по формуле $\alpha(f)(x) = f(\hat{\alpha}(x))$.

Важную роль в доказательстве играет следующая

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha: C_p(\mathbb{R}) \rightarrow C_q(\mathbb{R})$ — изоморфизм банаховых алгебр, а $s = \hat{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — индуцированный изоморфизмом α гомеоморфизм, индуцирующий, в свою очередь, изоморфизм α по формуле $\alpha(f)(x) = f(s(x))$. Тогда s — линейная функция и, в частности, $s(x) = O(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Здесь мы используем хорошо известный факт о том, что пространство максимальных идеалов алгебры $C_p(\mathbb{R})$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}$ [2, 5] и отождествляем $\mathbb{R}$ и пространства максимальных идеалов алгебр $C_p(\mathbb{R})$, $C_q(\mathbb{R})$.

При помощи лемм 1, 2 и теоремы 2 доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha: C_p(\mathbb{R}) \rightarrow C_q(\mathbb{R})$ — топологический изоморфизм. Тогда $p = q$ или $p = q/(q - 1)$.

Из теоремы 3 и описания пространства примитивных идеалов алгебры $B_p^{n,Y}$ [6] вытекает

ТЕОРЕМА 4. Банаховы алгебры $B_p^{n,Y}$ и B_q^{m,Y_1} изоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$, $|Y| = |Y_1|$, $p = q$ или $p = q/(q - 1)$.

(Здесь мы используем символ $|X|$ для обозначения числа элементов конечного множества X .)

Используя теорему 4 работы [1], можно доказать такой результат:

ТЕОРЕМА 5. Банаховы алгебры $N_p^n(\Gamma; \Xi)$ и $N_q^m(\Gamma_1; \Xi_1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда: 1) пары $(\Gamma; \Xi)$ и $(\Gamma_1; \Xi_1)$ гомеоморфны; 2) $m = n$; 3) $p = q$ или $p = q/(q - 1)$.

Из теорем 4, 5 и утверждения, что любой гомеоморфизм $\alpha: M_{p,\omega}^n(\Gamma, \Xi) \rightarrow M_{q,\omega_1}^m(\Gamma_1, \Xi_1)$ переводит идеал компактных операторов $\text{Comp}(L_{p,\omega}^n(\Gamma))$ в идеал компактных операторов $\text{Comp}(L_{q,\omega_1}^m(\Gamma_1))$ и вытекает теорема 1.

В заключение отметим, что по ходу доказательства теорем 3–5 уточняется вид изоморфизмов, действующих между упомянутыми в формулировках этих теорем алгебрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деундяк В. М., Симоненко И. Б., Стукопин В. А. Функциональный анализ и его прил., **27**, вып. 4, 69–71 (1993).
2. Хёрмандер Л. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. Мир, М., 1962.
3. Fefferman Ch., Stein I. Acta Math., **129**, 137–193 (1972).
4. Hirshman I. Duke Math. J., **26**, 221–242 (1959).
5. Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нётеровость. Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1986.
6. Деундяк В. М., Симоненко И. Б., Стукопин В. А. В сб.: Интегральные и дифф. уравнения. Изд-во КГУ, Элиста, 1993, с. 35–47.