Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Яковлев, О сингулярном спектре операторов модели Фридрихса в окрестности особой точки, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 3, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 06:24:14

УДК 517.948

О сингулярном спектре операторов модели Фридрихса в окрестности особой точки

© 1998. С. И. ЯКОВЛЕВ

Рассмотрим самосопряженные операторы a_m и s_m , $m = 1, 2, \dots$, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R})$,

$$a_m = |t|^m \cdot + (\cdot, \varphi) \varphi, \quad (1)$$

$$s_m = \text{sign } t \cdot |t|^m \cdot + (\cdot, \varphi) \varphi, \quad (2)$$

где $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, а t — независимая переменная, так что, например,

$$(a_m u)(t) = |t|^m u(t) + \varphi(t) \int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{\varphi(x)} dx, \quad u \in L_2(\mathbb{R}).$$

Предполагается, что функция φ удовлетворяет условию гладкости

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \omega(|h|), \quad |h| \leq 1, \quad (3)$$

где функция $\omega(t)$ (модуль непрерывности функции φ) монотонна и удовлетворяет условию Дини:

$$\omega(t) \downarrow 0 \quad \text{при } t \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty. \quad (4)$$

Нас интересует поведение сингулярного спектра операторов a_m и s_m . Заметим, что под сингулярным спектром мы понимаем объединение сингулярного непрерывного и точечного спектров. Структура спектра $\sigma_{\text{sing}}(s_1)$ (сингулярного спектра оператора s_1) достаточно хорошо изучена [1–8]. Но, сделав простую замену переменных $|t|^m = x$ или $\text{sign } t \cdot |t|^m = x$, можно показать, что вне любой окрестности точки нуль структура спектров $\sigma_{\text{sing}}(a_m)$ и $\sigma_{\text{sing}}(s_m)$ такая же, как и у оператора s_1 . Это объясняется тем, что указанные замены переменных вне любой окрестности точки нуль гладкие. При этом если условия (3), (4), а так же некоторые другие ограничения на функцию φ выполняются только на некотором интервале (c, d) вещественной оси, то основные результаты работ [1–8], относящиеся к структуре спектра $\sigma_{\text{sing}}(s_1)$, останутся справедливыми на любом замкнутом подынтервале $\Delta \subset (c, d)$. В то же время, как показано в [9, 10], для оператора a_2 в окрестности точки нуль поведение сингулярного спектра приобретает совершенно иной характер. Здесь указанную замену переменных тоже можно применить, но, поскольку $(|t|^m)'|_0 = (\text{sign } t \cdot |t|^m)'|_0 = 0$, она не является гладкой (диффеоморфизмом) в окрестности точки нуль. В этом смысле точка нуль является особой точкой операторов a_m и s_m , $m > 1$. Естественно, что все наше внимание будет обращено на сингулярный спектр именно в окрестности этой особой точки. Отметим также, что для операторов a_m точка нуль является, кроме того, крайней точкой непрерывного спектра, совпадающего с

интервалом $[0; +\infty)$. Для операторов s_m непрерывный спектр заполняет всю вещественную ось $\mathbb{R}$.

Начнем с построения функции $\varphi(t)$, такой, что операторы a_m и s_m имеют нетривиальный сингулярный спектр около особой точки нуль. Заметим, что настоящий модуль непрерывности $\tilde{\omega}(h) := \sup_t |\varphi(t+h) - \varphi(t)|$ всегда удовлетворяет дополнительному ограничению полуаддитивности $\tilde{\omega}(t_1 + t_2) \leq \tilde{\omega}(t_1) + \tilde{\omega}(t_2)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию (4), а также естественному ограничению полуаддитивности $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$; тогда, если $\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \omega^2(t)/t^{m-1} = +\infty$, можно построить финитную функцию φ , удовлетворяющую условию $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \omega(|h|)$ и такую, что операторы a_m и s_m имеют сходящуюся к точке нуль последовательность собственных значений, расположенных на непрерывном спектре.

СЛЕДСТВИЕ 1. Нетрудно показать, что если $\omega(t)$ — неотрицательная полуаддитивная функция и $\omega(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$, то для любого $a > 0$ существует константа $C > 0$, такая, что $Ct \leq \omega(t)$, $t \in [0, a]$. Поэтому, как следует из теоремы 1, для любого $m \geq 4$ и всякой полуаддитивной функции $\omega(t)$, удовлетворяющей условию (4), можно построить финитную функцию φ , удовлетворяющую условию гладкости (3) и такую, что операторы a_m и s_m имеют последовательность положительных собственных значений, сходящуюся к точке нуль.

Чтобы выяснить значение приведенных выше утверждений, рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ самосопряженные операторы A_m и S_m ,

$$A_m = |t|^m \cdot + V, \quad (5)$$

$$S_m = \text{sign } t \cdot |t|^m \cdot + V, \quad (6)$$

где V (возмущение) — интегральный оператор с эрмитовым ядром $v(t, x)$, удовлетворяющим следующему условию гладкости:

$$v(t+h, t+h) + v(t, t) - v(t+h, t) - v(t, t+h) \leq \omega^2(|h|), \quad |h| \leq 1, \quad (7)$$

с функцией $\omega(t)$ типа (4). Мы также предполагаем, что оператор V неотрицателен и принадлежит классу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$:

$$V \geq 0, \quad V \in \mathfrak{S}_1. \quad (8)$$

При этом (7) можно рассматривать как условие гладкости на ядро $v_{1/2}(t, x)$ оператора $\sqrt{V}$, ибо левая часть выражения (7) тождественно переписывается [3] в следующем виде: $\int_{\mathbb{R}} |v_{1/2}(t+h, y) - v_{1/2}(t, y)|^2 dy$. Очевидно, что для $V = (\cdot, \varphi)\varphi$ операторы A_m и S_m совпадают соответственно с a_m и s_m , определяемыми формулами (1) и (2).

В работе [8] (см. также [6]) показано, что для оператора S_1 имеется точное условие конечности сингулярного спектра. А именно, если $\omega(t) = O(\sqrt{t})$ при $t \rightarrow 0$, то при условиях (7), (8) спектр $\sigma_{\text{sing}}(S_1)$ тривиален, т.е. состоит не более, чем из конечного числа собственных значений конечной кратности. Если же $\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \omega(t)/\sqrt{t} = +\infty$, то строятся примеры, показывающие, что

уже в случае возмущения V ранга 1 у оператора S_1 могут появиться точки накопления собственных значений. Как мы видим, согласно следствию 1, для операторов A_m и S_m при $m > 3$ отсутствует условие конечности сингулярного спектра в классе возмущений, описываемом условиями (7), (8).

В работе [10] (см. также [9]) было показано, что если $\omega(t) = O(\sqrt{t})$ при $t \rightarrow 0$ и $\text{rank } V < \infty$, то особая точка нуль не является точкой сгущения сингулярного спектра оператора $A_2 = t^2 \cdot + V$. Следовательно, согласно теореме 1, при $m = 2$ это условие $\omega(t) = O(\sqrt{t})$, $t \rightarrow 0$, является точным в случае, когда $\text{rank } V < \infty$. (При $\text{rank } V = \infty$ значение константы C в условии $\omega(t) = Ct^{1/2}$, $t \rightarrow 0$, определяет, конечен $\sigma_{\text{sing}}(A_2)$ или же он может иметь сложную структуру [9, 10].) Заметим, что хотя для оператора $S_1 = t \cdot + V$ точным условием конечности спектра σ_{sing} также является оценка $\omega(t) = O(\sqrt{t})$, $t \rightarrow 0$ (независимо от ранга оператора возмущения) [6, 8], контрпример из работы [8], подтверждающий точность данного условия, принципиально нельзя приспособить к случаю особой точки нуль оператора A_2 .

Как показывает теорема 1 при $m = 3$, невыполнение условия $\omega(t) = O(t)$, $t \rightarrow 0$, ведет к возможности появления у операторов A_3 и S_3 в окрестности особой точки нуль нетривиального сингулярного спектра. В приводимой ниже теореме 2 показывается, что для возмущения конечного ранга, $\text{rank } V < \infty$, условие $\omega(t) = O(t)$, $t \rightarrow 0$, является достаточным для отсутствия спектра $\sigma_{\text{sing}}(A_3)$ около точки нуль. Согласно теореме 1, это условие является точным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор V удовлетворяет условиям (7), (8) с функцией $\omega(t)$, такой, что $\omega(t) = O(t)$ при $t \rightarrow 0$, и $\text{rank } V < \infty$; тогда в некоторой окрестности точки нуль (на интервале $[0; +\infty)$) спектр оператора $A_3 = |t|^3 \cdot + V$ чисто абсолютно непрерывный.

В то же время в случае $\text{rank } V = \infty$ ответ на вопрос, конечен сингулярный спектр или же он может иметь сложную структуру, зависит от малости константы C в условии $\omega(t) = Ct$, $t \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть возмущение V удовлетворяет условиям (7), (8) с функцией $\omega(t)$, такой, что $\omega(t) = Ct$ при $t \rightarrow 0$; тогда, если константа C меньше 1, спектр оператора A_3 в некоторой окрестности точки нуль чисто абсолютно непрерывный.

Следовательно, при выполнении условий теоремы 2 или 3 спектр $\sigma_{\text{sing}}(A_3)$ будет тривиален. Точность теоремы 3 подтверждает теорема 4.

ТЕОРЕМА 4. Для значения константы $C \geq 3$ можно построить оператор $V \geq 0$, $V \in \mathfrak{S}_1$ и $\text{rank } V = \infty$, удовлетворяющий условию (7) с модулем непрерывности $\omega(t)$, $\omega(t) = Ct$ при $t \rightarrow 0$, такой, что операторы A_3 и S_3 имеют последовательность положительных собственных значений, сходящуюся к точке нуль.

Таким образом, для оператора A_3 , как и для оператора A_2 [9, 10], точное условие конечности спектра σ_{sing} имеет разный вид для возмущений конечного и бесконечного рангов. Примеры операторов возмущения V бесконечного ранга, приводящие к нетривиальному сингулярному спектру около особой точки нуль, содержатся в теореме 5, которая также подтверждает

результат следствия 1 об отсутствии условия конечности σ_{sing} у операторов A_m и S_m при $m > 3$ в классе возмущений, удовлетворяющих требованиям (7), (8).

ТЕОРЕМА 5. *Для любой константы $C > 0$ и любого натурального $m \geq 4$ можно построить оператор возмущения $V \geq 0$, $V \in \mathfrak{S}_1$ и $\text{rank } V = \infty$, удовлетворяющий условию гладкости (7) с модулем непрерывности $\omega(t)$, $\omega(t) = Ct$ при $t \rightarrow 0$, такой, что операторы A_m и S_m имеют последовательность собственных значений, сходящуюся к точке нуля.*

Следующий простой результат завершает изучение вопроса о границе конечности сингулярного спектра операторов A_m , $m = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть оператор V удовлетворяет условиям (7), (8); тогда при любом модуле непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющем условию (4), спектр оператора $A_1 = |t| \cdot + V$ в некоторой окрестности точки нуля чисто абсолютно непрерывный.*

Для операторов S_2 и S_3 , согласно теореме 1, конечности спектра σ_{sing} можно ожидать только при выполнении условий $\omega(t) = O(t^{1/2})$ и $\omega(t) = O(t)$ соответственно. Мы полагаем, что на самом деле ситуация с операторами S_2 и S_3 такая же, как и с операторами S_m , $m > 3$, т. е. условие конечности сингулярного спектра для этих двух операторов также отсутствует.

В заключение автор благодарит С. Н. Набоко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Л. Д. Труды МИАН, **73**, 292–313 (1964).
2. Павлов Б. С., Петрас С. В. Функц. анализ и его прил., **4**, вып. 2, 54–61 (1970).
3. Naboko S. N. Ark. Mat., **25**, No. 1, 115–140 (1987).
4. Микитюк Я. В. ДАН СССР, **303**, № 1, 33–36 (1988).
5. Яковлев С. И. Вестник ЛГУ, сер. 1, № 1, 116–117 (1990).
6. Набоко С. Н., Яковлев С. И. Функц. анализ и его прил., **24**, вып. 4, 88–89 (1990).
7. Яковлев С. И. Деп. в ВИНТИ, № 2050-В от 17.05.91.
8. Дынькин Е. М., Набоко С. Н., Яковлев С. И. Алгебра и анализ, **3**, вып. 2, 77–90 (1991).
9. Yakovlev S. I. Preprint IPRT No. 48–94, December 1994.
10. Яковлев С. И. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 1, 92–95 (1996).

Санкт-Петербургская академия
аэрокосмического приборостроения
e-mail: yakovlev@amath.usr.sai.ru

Поступило в редакцию
8 апреля 1997 г.