Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Вершинин, Э. Осса, Спектры Тома коммутантов обобщенных групп кос, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 1–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:18:21

Спектры Тома коммутантов обобщенных групп кос*

© 1998. В. В. Вершинин, Э. Осса

Введение

Первым рассматривал когомологии групп кос В. И. Арнольд [1, 2]. Изучение этих когомологий связано с различными математическими областями и задачами. Арнольд [2] применял их к проблеме представимости алгебраических функций нескольких переменных суперпозициями алгебраических функций от меньшего числа переменных. В. А. Васильев [3] и С. Смейл [4] использовали их для оценок сложности алгоритмов. М. Маховальд [5, 6] и Ф. Коэн [7], используя когомологии групп кос, доказали, что спектр Тома, порожденный серией групп кос, эквивалентен спектру Эйленберга–Маклейна, соответствующему обычным гомологиям с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$. Связи с теорией конфигурационных пространств и пространств петель изучались П. Делинем [8], Г. Сигалом [9], Д. Б. Фуксом [10], Ф. Коэном [11], Э. Оссой [12] и другими. Полное вычисление этих когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ было проведено Фуксом [13]. Когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ изучались Коэном [11] и Ф. В. Вайнштейном [14]. В. В. Горюнов [15, 16] выразил когомологии обобщенных групп кос серий C и D через гомологии классических групп кос. Рассматривались также когомологии подгрупп групп кос. Арнольд [17] вычислил когомологии групп крашенных кос, Коэн [18] и Э. В. Френкель [19] изучали когомологии коммутантов групп кос. В настоящей работе мы рассматриваем спектры Тома, порожденные коммутантами обобщенных групп кос. Интерес к таким спектрам вызван тем, что они связаны с целочисленными (или локализованными) гомологиями.

§1. Основные определения и конструкции

Пусть Br_n обозначает группу кос из n нитей [20, 21], Σ_n обозначает симметрическую группу, а τ_n — канонический эпиморфизм:

$$\tau_n: Br_n \rightarrow \Sigma_n. \quad (1)$$

Предположим, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ действует конечная группа Кокстера W_n [22]. Группа W_n порождена отражениями, и, следовательно, определен мономорфизм в соответствующую ортогональную группу

$$\nu_n: W_n \rightarrow O_n.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и DFG (гранты 96-01-00062G и RUS 113/190), а также INTAS.

Понятие группы кос было обобщено Э. Брискорном [23] для конечных групп Кокстера W_n таким образом, что имеет место эпиморфизм, аналогичный эпиморфизму (1),

$$\tau_n(W_n): Br(W_n) \rightarrow W_n.$$

Предположим, что каноническое вложение евклидовых пространств $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ индуцирует вложение соответствующих обобщенных групп кос $Br(W_n) < Br(W_{n+1})$, так что определена серия групп кос $Br(W_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Примером могут служить серии групп кос типов A_n , C_n и D_n . Им соответствуют следующие графы Кокстера:

Из этих диаграмм видно, что группы $Br(C_n)$ и $Br(D_n)$ могут быть заданы образующими $w_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$, такими, что элементы σ_i удовлетворяют соотношениям группы кос и, кроме того, для группы $Br(C_n)$ образующая w_1 коммутирует с σ_i , $i \geq 2$, и выполнено следующее соотношение:

$$w_1 \sigma_1 w_1 \sigma_1 = \sigma_1 w_1 \sigma_1 w_1,$$

а для группы $Br(D_n)$ образующая w_1 коммутирует с σ_i , $i = 1, 3, \dots, n-2$, и выполнено следующее соотношение:

$$w_1 \sigma_2 w_1 = \sigma_2 w_1 \sigma_2.$$

Пусть $\{G_n\}$ — система подгрупп групп кос $Br(W_n)$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что G_n есть подгруппа группы G_{n+1} , где обе группы рассматриваются как подгруппы группы $Br(W_{n+1})$. Это определяет композицию

$$i_n: G_n \rightarrow Br(W_n) \rightarrow W_n \rightarrow O_n, \quad (2)$$

такую, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} G_n & \longrightarrow & Br(W_n) & \longrightarrow & W_n & \longrightarrow & O_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G_{n+1} & \longrightarrow & Br(W_{n+1}) & \longrightarrow & W_{n+1} & \longrightarrow & O_{n+1} \end{array} \quad (3)$$

коммутативна. Предположим, что образ группы G_n при композиции (2) лежит в группе вращений SO_n для всех n . Тогда композиция (2) и коммутативная диаграмма (3) порождают отображения классифицирующих пространств и пространств Тома:

$$\begin{array}{ccc} BG_n & \longrightarrow & BSO_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG_{n+1} & \longrightarrow & BSO_{n+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} MG_n & \longrightarrow & MSO_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ MG_{n+1} & \longrightarrow & MSO_{n+1} \end{array}$$

Пространства Тома MG_n и MSO_n и отображения $MG_n \rightarrow MSO_n$ порождают спектры Тома MG и MSO и морфизм спектров

$$MG \rightarrow MSO.$$

Пусть F_n — моноид гомотопических самоэквивалентностей сферы S^{n-1} , а SF_n — моноид ориентированных (степени 1) самоэквивалентностей сферы S^{n-1} [24]. Каноническое отображение

$$\chi_n: SO_n \rightarrow SF_n$$

индуцирует отображения классифицирующих пространств; следовательно, мы имеем композицию

$$BG_n \rightarrow BSO_n \rightarrow BSF_n. \quad (4)$$

Композиции (4) для всех n индуцируют сферические расслоения над пространствами BG_n , которые, в свою очередь, порождают пространства Тома MG_n и спектр Тома MG , так что спектр MG можно считать порожденным композициями (4).

§2. Гомологии коммутантов групп кос

Пусть G_n — это коммутант классической группы кос

$$[Br_n, Br_n] \triangleleft Br_n.$$

Заметим, что коммутанты групп Br_n , $Br(C_n)$ и $Br(D_n)$ ($n \geq 5$) каиновы в терминологии В. Я. Лина [25], т. е. нет нетривиальных гомоморфизмов из них в абелевы группы [26]. Следовательно, плюс-конструкция (см., например, [27]) для них существует. Мы будем опускать индекс ∞ в обозначениях прямых пределов серий групп и писать просто Br , $Br(C)$ и $Br(D)$. Обозначим через $S^3\langle 3 \rangle$ трехсвязное накрытие над S^3 , которое определяется как гомотопический слой отображения $S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$, соответствующего образующей $H^3(S^3, \mathbb{Z})$. Ф. Коэн [18] доказал, что плюс-конструкция классифицирующего пространства коммутанта группы кос из бесконечного числа нитей Br эквивалентна $\Omega^2 S^3\langle 3 \rangle$ — двукратному пространству петель над $S^3\langle 3 \rangle$:

$$B[Br, Br]^+ \cong \Omega^2 S^3\langle 3 \rangle,$$

и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B[Br, Br]^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3\langle 3 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ BBr^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3 \end{array}$$

коммутативна. Рассмотрим теперь обобщенные группы кос серий C_n и D_n . Когомологии этих групп были вычислены В. В. Горюновым [15, 16]. Плюс-конструкции классифицирующих пространств предельных групп этих серий эквивалентны соответственно $\Omega^2 S^3 \times \Omega S^2$ и $\Omega^2 S^3 \times S^3\langle 2 \rangle$ (см. [10]), где $S^3\langle 2 \rangle$

есть гомотопический слой отображения степени 2 из трехмерной сферы в себя

$$S^3 \rightarrow S^3.$$

Для обобщенных групп кос гомоморфизмы

$$Br_n \rightarrow Br(C_{n+1}), \quad Br_n \rightarrow Br(D_{n+1})$$

соответствуют вложениям графов Кокстера. При гомоморфизме

$$\rho_{C_{n+1}} : Br(C_{n+1}) \rightarrow Br_n$$

крайний левый образующий группы $Br(C_{n+1})$ переходит в единицу, а при гомоморфизме

$$\rho_{D_{n+1}} : Br(D_{n+1}) \rightarrow Br_n$$

два крайних левых образующих группы $Br(D_{n+1})$ переходят в единственный крайний левый образующий группы Br_n . Очевидно, что соответствующие композиции равны тождественным гомоморфизмам группы Br_n .

ТЕОРЕМА 1. *Для плюс-конструкций классифицирующих пространств коммутантов обобщенных групп кос $Br(C)$ и $Br(D)$ имеют место эквивалентности*

$$\begin{aligned} B[Br(C), Br(C)]^+ &\cong \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times \Omega S^3, \\ B[Br(D), Br(D)]^+ &\cong \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times S^3 \{2\}, \end{aligned}$$

такие, что канонические гомоморфизмы $Br \rightarrow Br(C) \rightarrow Br$ и $Br \rightarrow Br(D) \rightarrow Br$ порождают коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} B[Br, Br]^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[Br(C), Br(C)]^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times \Omega S^3 \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ & & \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[Br, Br]^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[Br, Br]^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[Br(D), Br(D)]^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times S^3 \{2\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[Br, Br]^+ & \longrightarrow & \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \end{array} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм ρ порождает короткую точную последовательность

$$e \rightarrow \text{Ker } \rho_C \rightarrow Br(C) \rightarrow Br \rightarrow e, \quad (7)$$

которая расщепляется справа. Абелеанизация группы $Br(C)$ изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Поэтому имеет место точная последовательность групп

$$e \rightarrow [Br(C), Br(C)] \rightarrow Br(C) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow e, \quad (8)$$

которая также расщепляется справа. Она соответствует точной последовательности для классической группы кос

$$e \rightarrow [Br, Br] \rightarrow Br \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow e, \quad (9)$$

также расщепляемой. Пусть

$$\rho'_C: [Br(C), Br(C)] \rightarrow [Br, Br]$$

— ограничение гомоморфизма ρ_C на $[Br(C), Br(C)]$. Определим гомоморфизм

$$\deg: \text{Ker } \rho_C \rightarrow \mathbb{Z}$$

как полную сумму степеней вхождений образующей w_1 при записи элемента $g \in \text{Ker } \rho_C$, и пусть K' — его ядро. Точные последовательности, упоминаемые выше, порождают следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & e & & e & & e & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 e & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & [Br(C), Br(C)](C) & \longrightarrow & [Br, Br] \longrightarrow e \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 e & \longrightarrow & \text{Ker } \rho_C & \longrightarrow & Br(C) & \longrightarrow & Br \longrightarrow e \quad (10) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 e & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow e \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & e & & e & & e
 \end{array}$$

Используя тот факт, что последовательности (7)–(9) расщепляются, и диаграммный поиск, получаем, что верхняя строка в диаграмме (10) является расщепляемой справа точной последовательностью. Следовательно, классифицирующее пространство группы $[Br(C), Br(C)]$ эквивалентно декартову произведению классифицирующих пространств групп $[Br, Br]$ и K' . Значит, плюс-конструкция $B[Br(C), Br(C)]$ равна $\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times \Omega S^3$ и теорема доказана для группы типа C . Для группы $Br(D)$ доказательство аналогично.

§3. Спектры Тома

Спектр Тома над $\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle$, соответствующий коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle & \xrightarrow{\omega} & BSO \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^2 S^3 & \longrightarrow & BO
 \end{array}$$

изучался Маховальдом [6], а также Коэном, Мэем и Тейлором [28]. Было доказано, что спектр $M\omega$ после локализации вне 2 эквивалентен спектру, определяющему обычные гомологии с коэффициентами в локальном кольце $\mathbb{Z}_{(2)}$. Используя стабильное расщепление Снэйта [29] пространства $\Omega^2 S^3$ и тот факт, что BSF является бесконечнократным пространством петель, Маховальд [6] строит отображение

$$h: \Omega^2 S^3 \rightarrow BSF$$

и с его помощью отображение

$$\begin{aligned} g: \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle &\xrightarrow{\Delta} \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \\ &\rightarrow \Omega^2 S^3 \times \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \xrightarrow{h \times B\chi \circ \omega} BSF \times BSF \rightarrow BSF, \end{aligned} \quad (11)$$

такое, что спектр Тома, полученный из сферических расслоений с помощью g , является в точности спектром $H\mathbb{Z}$ (без локализации).

Гомоморфизм

$$i: [Br, Br] \rightarrow SO$$

индуцирует спектр Тома, который мы будем обозначать через $M[Br, Br]$ и который эквивалентен $H\mathbb{Z}_{(2)}$ после локализации вне 2. Группы $[Br(C_n), Br(C_n)]$ и $[Br(D_n), Br(D_n)]$ канонически вложены в группу SO_n . Рассмотрим спектры Тома, индуцированные этими вложениями.

ТЕОРЕМА 2. *Канонические гомоморфизмы*

$$[Br(C_n), Br(C_n)] \rightarrow SO_n, \quad [Br(D_n), Br(D_n)] \rightarrow SO_n$$

порождают спектры Тома $M[Br(C), Br(C)]$ и $M[Br(D), Br(D)]$, которые после локализации вне 2 эквивалентны следующим букетам:

$$\begin{aligned} M[Br(C), Br(C)]_{(2)} &\cong \bigvee_{l=0}^{\infty} S^{2l} H\mathbb{Z}_{(2)}, \\ M[Br(D), Br(D)]_{(2)} &\cong H\mathbb{Z}_{(2)} \vee \left(\bigvee_{l=1}^{\infty} S^{2l} H\mathbb{Z}/2 \right). \end{aligned}$$

Спектр $M[Br(C), Br(C)]$ мультипликативен и его кольцо коэффициентов (после локализации) изоморфно кольцу многочленов

$$\mathbb{Z}_{(2)}[y], \quad \deg y = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вложения

$$[Br(C_m), Br(C_m)] \times [Br(C_n), Br(C_n)] \rightarrow Br(C_m) \times Br(C_n)$$

и спаривание для обобщенных групп кос типа C , изучавшееся в [30],

$$\mu_{m,n}: Br(C_m) \times Br(C_n) \rightarrow Br(C_{m+n}).$$

Композиция этих гомоморфизмов задает спаривание для коммутантов

$$\mu_{m,n}: [Br(C_m), Br(C_m)] \times [Br(C_n), Br(C_n)] \rightarrow [Br(C_{m+n}), Br(C_{m+n})].$$

Это спаривание делает спектр $M[Br(C), Br(C)]$ мультипликативным.

Коммутативные диаграммы (5) и (6) порождают коммутативные диаграммы спектров Тома

$$\begin{array}{ccc}
 M[Br, Br] & \longrightarrow & M\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M[Br(C), Br(C)] & \longrightarrow & M\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \wedge M\Omega S^3 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M[Br, Br] & \longrightarrow & M\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle
 \end{array} \quad (12)$$

$$\begin{array}{ccc}
 M[Br, Br] & \longrightarrow & M\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M[Br(D), Br(D)] & \longrightarrow & M\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \wedge MS^3 \{2\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M[Br, Br] & \longrightarrow & M\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle
 \end{array} \quad (13)$$

где горизонтальные стрелки являются гомотопическими эквивалентностями. Рассмотрим спектры, локализованные вне 2. Тогда

$$\begin{aligned}
 M[Br(C), Br(C)]_{(2)} &\cong H\mathbb{Z}_{(2)} \wedge M\Omega S^3, \\
 M[Br(D), Br(D)]_{(2)} &\cong H\mathbb{Z}_{(2)} \wedge MS^3 \{2\}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, гомотопическими группами спектров $M[Br(C), Br(C)]_{(2)}$ и $M[Br(D), Br(D)]_{(2)}$ являются группы гомологий спектров $M\Omega S^3$ и $MS^3 \{2\}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 \pi_*(M[Br(C), Br(C)]_{(2)}) &= H_*(M\Omega S^3; \mathbb{Z}_{(2)}), \\
 \pi_*(M[Br(D), Br(D)]_{(2)}) &= H_*(MS^3 \{2\}; \mathbb{Z}_{(2)}).
 \end{aligned}$$

В первом случае эти гомологии изоморфны кольцу многочленов над $\mathbb{Z}_{(2)}$ от образующей степени 2:

$$H_*(M\Omega S^3; \mathbb{Z}_{(2)}) \cong \mathbb{Z}_{(2)}[y], \quad \deg y = 2.$$

Во втором случае имеем

$$H_i(MS^3 \{2\}; \mathbb{Z}_{(2)}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(2)} & \text{для } i = 0, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{для } i = 2k, \ k > 0, \\ 0 & \text{для } i \neq 0, 2k. \end{cases}$$

Используя эти факты и диаграммы (12) и (13), мы строим отображения

$$\bigvee_{l=0}^{\infty} S^{2l} H\mathbb{Z}_{(2)} \rightarrow M[Br(C), Br(C)]_{(2)},$$

$$M[Br(D), Br(D)]_{(2)} \rightarrow H\mathbb{Z}_{(2)} \vee \left(\bigvee_{l=1}^{\infty} S^{2l} H\mathbb{Z}/2 \right),$$

которые являются гомотопическими эквивалентностями.

Канонические мономорфизмы $[Br(C), Br(C)] \rightarrow Br(C)$ и $[Br(D), Br(D)] \rightarrow Br(D)$ индуцируют морфизмы спектров Тома. Из описания спектров Тома для $Br(C)$ и $Br(D)$ [30] мы видим, что для серии C имеется морфизм мультипликативных спектров, такой, что для колец коэффициентов он дает кольцевой гомоморфизм

$$\mathbb{Z}_{(2)}[y] \rightarrow \mathbb{Z}/2[s],$$

определенный тем, что y отображается в s^2 . Для серии D имеется эквивалентность между слагаемыми вида $H\mathbb{Z}/2$ в положительных размерностях спектра $M[Br(D), Br(D)]_{(2)}$ и соответствующими слагаемыми спектра $MBr(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в композициях

$$B[Br(C), Br(C)] \rightarrow \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times \Omega S^3 \rightarrow BSO \rightarrow BSF,$$

$$B[Br(D), Br(D)] \rightarrow \Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \times S^3 \{2\} \rightarrow BSO \rightarrow BSF$$

мы заменим отображение $\Omega^2 S^3 \langle 3 \rangle \rightarrow BSO \rightarrow BSF$ на отображение g из (11), мы получим спектры Тома, в которых слагаемые вида $H\mathbb{Z}_{(2)}$ заменены на $H\mathbb{Z}$.

Эта работа была выполнена, главным образом, во время посещения первым автором университета г. Вупперталь (ФРГ). Он выражает благодарность математическому отделению этого университета и работающей там группе топологов за гостеприимство и замечательные условия для работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. Труды Моск. матем. о-ва, **21**, 27–46 (1970).
2. Арнольд В. И. Топологические инварианты алгебраических функций. II. Функциональный анализ и его прил., **4**, вып. 2, 1–9 (1970).
3. Васильев В. А. Когомологии групп кос и сложность алгоритмов. Функциональный анализ и его прил., **22**, вып. 3, 15–24 (1988).
4. Smale S. On the topology of algorithms. I. J. Complexity, **4**, 81–89 (1987).
5. Mahowald M. A new family in π_*^s . Topology, **16**, 249–254 (1977).
6. Mahowald M. Ring spectra which are Thom complexes. Duke Math. J., **46**, No. 3, 549–259 (1977).
7. Cohen F. R. Braid orientations and bundles with flat connections. Invent. Math., **46**, 99–110 (1978).
8. Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés. Invent. Math., **17**, 273–302 (1972).

9. *Segal G.* Configuration spaces and iterated loop spaces. *Invent. Math.*, **21**, 213–221 (1973).
10. *Фукс Д. Б.* Квиленизация и бордизмы. *Функц. анализ и его прил.*, **8**, вып. 1, 36–42 (1974).
11. *Cohen F. R., Lada T., May J. P.* The homology of iterated loop spaces. *Lect. Notes in Math.*, Vol. 533, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
12. *Ossa E.* On the cohomology of configuration spaces. In: *Algebraic Topology: New Trends in Localization and Periodicity*. Barcelona Conference on Algebraic Topology, 1994, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 353–361.
13. *Фукс Д. Б.* Когомологии групп кос mod 2. *Функц. анализ и его прил.*, **4**, вып. 2, 62–75 (1970).
14. *Вайнштейн Ф. В.* Когомологии групп кос. *Функц. анализ и его прил.*, **12**, вып. 2, 72–73 (1978).
15. *Горюнов В. В.* Когомологии групп кос серий C и D и некоторые стратификации. *Функц. анализ и его прил.*, **12**, вып. 2, 76–77 (1978).
16. *Горюнов В. В.* Когомологии групп кос серий C и D . *Труды Моск. матем. о-ва*, **42**, 234–242 (1981).
17. *Арнольд В. И.* Кольцо когомологий группы крашенных кос. *Матем. заметки*, **5**, № 2, 227–231 (1969).
18. *Cohen F. R.* Artin's braid groups and classical homotopy theory. *Contemp. Math.*, **44**, 207–226 (1985).
19. *Френкель Э. В.* Когомологии коммутанта группы кос. *Функц. анализ и его прил.*, **22**, вып. 3, 91–92 (1988).
20. *Artin E.* Theory of braids. *Ann. of Math.*, **48**, No. 1, 101–126 (1947).
21. *Birman J.* Braids, links, and mapping class groups. *Ann. Math. Stud.*, Vol. 82, 1974.
22. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Мир, М., 1972.
23. *Brieskorn E.* Sur les groupes de tresses. *Séminaire Bourbaki*, 1971/72, exp. 401; *Lect. Notes in Math.*, Vol. 317, Springer-Verlag, Berlin a.o., 1973, pp. 21–44. [Имеется перевод: Брискорн Э. О группах кос (по В. И. Арнольду), *Математика*, **18**, вып. 3, 46–59 (1974).]
24. *Stasheff J.* A classification theorem for fiber spaces. *Topology*, **2**, 239–246 (1963).
25. *Лин В. Я.* Косы Артина и связанные с ними группы и пространства. *Итоги науки и техники (Алгебра, топология, геометрия)*, т. 17, 1979, с. 159–227.
26. *Zinde В. М.* Коммутанты групп Артина. *УМН*, **30**, вып. 5, 207–208 (1975).
27. *Адамс Дж.* Бесконечнократные пространства петель. Мир, М., 1982.
28. *Cohen F. R., May J. P., Taylor L. R.* $K(Z, 0)$ and $K(Z_2, 0)$ as Thom spectra. *Illinois J. Math.*, **25**, No. 1, 99–106 (1981).
29. *Snaith V. P.* A stable decomposition of $\Omega^n S^n X$. *J. London Math. Soc.* (2), **7**, 577–583 (1974).
30. *Vershinin V. V.* Thom spectra of generalized braid groups. Preprint No. 95/02-2, Université de Nantes, 1995.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
e-mail: versh@math.nsc.ru
Fachbereich Mathematik, Univ. Wuppertal, Germany
e-mail: ossa@math.uni-wuppertal.de

Поступило в редакцию
30 июля 1997 г.