Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Теорема Лефшеца о неподвижной точке для квантованных канонических преобразований, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 35–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:29:03

УДК 517.9

Теорема Лефшеца о неподвижной точке для квантованных канонических преобразований^{*}

© 1998. Б. Ю. СТЕРНИН, В. Е. ШАТАЛОВ

Введение

Цель настоящей статьи — установить теорему Атьи–Ботта–Лефшеца о неподвижной точке [1] в ситуации, когда эндоморфизмы эллиптического комплекса ассоциированы с каноническим преобразованием фазового пространства, т. е. задаются интегральными операторами Фурье–Маслова¹ [2–4]. Опишем кратко общую постановку задачи.

Пусть

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1} \mathcal{H}_2 \xrightarrow{\hat{A}_2} \dots \xrightarrow{\hat{A}_{N-1}} \mathcal{H}_N \longrightarrow 0 \quad (1)$$

— эллиптический комплекс на гладком компактном многообразии M без края, и пусть $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_N$ — операторы, определяющие эндоморфизм этого комплекса

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\hat{A}_1} & \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\hat{A}_2} & \dots \xrightarrow{\hat{A}_{N-1}} \mathcal{H}_N \longrightarrow 0 \\ & & \hat{U}_1 \downarrow & & \hat{U}_2 \downarrow & & \hat{U}_N \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\hat{A}_1} & \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\hat{A}_2} & \dots \xrightarrow{\hat{A}_{N-1}} \mathcal{H}_N \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2)$$

Тогда число Лефшеца $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\hat{A}^\bullet, \hat{U}^\bullet) = \mathcal{L}(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_{N-1}, \hat{U}_1, \dots, \hat{U}_N)$ диаграммы (2) определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \text{Trace}(\hat{U}_k|_{H^k}),$$

где H^k — когомологии комплекса (1) и $\hat{U}_k|_{H^k}$ — операторы в когомологиях, индуцированные эндоморфизмом (2).

Обобщение Атьи–Ботта [1] классической теоремы Лефшеца включает в себя произвольный эллиптический комплекс (вместо комплекса де Рама) и геометрический эндоморфизм $\hat{U} = (\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_N)$. Последнее означает, что упомянутый эндоморфизм определяется формулой

$$f: u(x) \mapsto T_j(x)u(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_j(u),$$

^{*} Работа поддержана Deutsche Forschungsgemeinschaft и РФФИ, грант № 97-01-00703.

¹Ниже для краткости мы будем называть их иногда просто интегральными операторами Фурье.

где $T_j(x)$ — гомоморфизмы соответствующих слоев расслоений, участвующих в комплексе (1), а $f: M \rightarrow M$ — гладкое отображение базы.

Геометрические эндоморфизмы, ассоциированные с диффеоморфизмами $f: M \rightarrow M$, являются частным случаем более общих эндоморфизмов, задаваемых интегральными операторами Фурье, ассоциированными с каноническими преобразованиями

$$g: T^*M \rightarrow T^*M$$

(см., например, [3, 4]), и поэтому представляет несомненный интерес обобщение теоремы Атьи–Ботта–Лефшеца на случай таких эндоморфизмов.

В этой работе мы получаем теорему типа теоремы Атьи–Ботта–Лефшеца в рамках квазиклассического квантования, т. е. в ситуации $1/h$ -дифференциальных операторов и $1/h$ -интегральных операторов Фурье. При этом число Лефшеца является функцией от h , и мы получим *асимптотическую* формулу Лефшеца, которая выражает главный член асимптотики числа Лефшеца при $h \rightarrow 0$ в терминах неподвижных точек канонического преобразования. Разумеется, эта формула в качестве частного случая содержит и обычную формулу Атьи–Ботта–Лефшеца [1] для случая, когда $f: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм.

Частный случай такой конструкции, ранее рассмотренный Б. В. Федосовым в [5], получается, когда рассматриваемое симплектическое преобразование определяется гамильтоновым потоком g_t вдоль траекторий гамильтонова векторного поля, определяемого некоторым вещественным гамильтонианом $H(x, p)$.

Опишем теперь кратко содержание статьи.

Первый параграф посвящен вычислению (методом стационарной фазы) главного члена асимптотики следа интегрального оператора Фурье, ассоциированного с симплектическим преобразованием.

Во втором параграфе получена формула Лефшеца в ситуации канонических преобразований. А именно, здесь получено выражение главного члена асимптотики числа Лефшеца при $h \rightarrow 0$. Чтобы не утяжелять изложение, мы ограничимся случаем одного эллиптического оператора, хотя, разумеется, все рассмотрения без труда переносятся на случай эллиптических комплексов.

В третьем параграфе показано, как из нашей формулы получается обычная формула Атьи–Ботта–Лефшеца.

Благодарности. Эта статья была написана в результате обсуждения статьи [5] с Б. В. Федосовым. Он же был первым ее читателем. Мы благодарны ему за интересный доклад и дальнейшую дискуссию. Результаты настоящей статьи докладывались на многих семинарах и конференциях. Среди них семинары Л. Буте-де-Монвеля, П. Шапира, Ж. Шнайдерса (Университет Париж-VI), Ю. И. Манина (Институт Макса Планка, Бонн), А. С. Мищенко (Московский государственный университет), А. Т. Фоменко (Московский государственный университет), конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными (Хольцхау, Потсдам, ФРГ) и др. Мы признательны всем участникам названных семинаров и конференций за многие интересные замечания. Авторы признательны В. Е. Назайкинскому за большую помощь в подготовке последнего варианта статьи. Мы также хотели бы

выразить специальную благодарность Б.-В. Шульце (ФРГ), в рабочей группе которого эта статья была написана.

Предварительные публикации. Краткое изложение результатов настоящей работы опубликовано в [6]. Подробные (английские) версии этой работы опубликованы в препринтах [7, 4].

§1. След интегрального оператора Фурье

Пусть M — гладкое компактное многообразие без края размерности n . Мы будем рассматривать $1/h$ -интегральные операторы Фурье на многообразии M . Чтобы облегчить изложение, сделаем следующее упрощающее предположение: многообразие M ориентировано, и на нем задана положительная форма объема dvol . Это позволит нам работать с функциями вместо плотностей на M . В дальнейшем мы используем только такие локальные системы координат $(x^1, \dots, x^n)$ на M , что

$$\text{dvol} = d^n x \equiv dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Это, очевидно, не ограничивает общности.

Опишем конструкцию $1/h$ -интегральных операторов Фурье на M в удобной для нас форме (подробности см. в [3, 4]). Пусть

$$g: T^*M \rightarrow T^*M$$

— каноническое преобразование кокасательного расслоения T^*M . Обозначим через $L \subset T^*(M \times M) \cong T^*M \times T^*M$ график преобразования g :

$$L = \text{graph } g = \{(z, g(z)) \mid z \in T^*M\}.$$

Это множество — лагранжево подмногообразие в $T^*(M \times M)$ относительно симплектической структуры

$$\Omega = \pi_2^* \omega - \pi_1^* \omega,$$

где форма ω определяет каноническую симплектическую структуру на T^*M , а

$$\pi_i: T^*M \times T^*M \rightarrow T^*M, \quad i = 1, 2,$$

— каноническая проекция на i -й сомножитель.

Мы будем предполагать, что выполнено следующее фундаментальное

Условие 1. Многообразие L является *квантованным* (см., например, [8, 3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие 1 автоматически выполнено, если M односвязно (так как L диффеоморфно T^*M , причем диффеоморфизм осуществляется с помощью любого из отображений π_i) или если $g = g_H^t$ — поток за время t гамильтонова векторного поля, соответствующего некоторой гладкой вещественной функции на T^*M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы рассматриваем «индивидуальное» преобразование g (и соответственно многообразие L), не зависящее ни от каких дополнительных параметров. При этом условие квантованности многообразия L распадается на два независимых условия: тривиальность индексного класса на L

и существование на L глобального действия (см. [3]). Можно рассмотреть и общий случай, в котором преобразование g зависит от дополнительных параметров, а условие квантованности выделяет при каждом h допустимые значения этих параметров.

Интегральный оператор Фурье строится по преобразованию g и амплитуде φ — гладкой функции на T^*M . Чтобы дать корректное определение, нужно наложить определенные условия на поведение g и φ на бесконечности в слоях расслоения T^*M . Мы наложим следующее условие (разумеется, оно выделяет не самый общий класс пар (g, φ) , для которых можно провести следующие ниже конструкции).

УСЛОВИЕ 2. Выполнено одно из следующих двух предположений:

А. Амплитуда φ — финитная функция на T^*M .

В. Вне достаточно большой окрестности нулевого сечения $\{0\} \subset T^*M$ преобразование g является однородным (т. е. коммутирует со стандартным действием группы $\mathbb{R}_+$ в слоях расслоения $T_0^*M = T^*M \setminus \{0\}$); амплитуда φ принадлежит классу Хёрмандера $S^m(T^*M)$ для некоторого вещественного m .

В терминах канонических координат (x, p) на T^*M условие 2В означает, что если $g(x, p) = (x', p')$ и значение $|p|$ достаточно велико, то

$$g(x, \lambda p) = (x', \lambda p')$$

при всех $\lambda > 1$; кроме того, $\varphi(x, p)$ удовлетворяет оценкам

$$|D_x^\alpha D_p^\beta \varphi(x, p)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |p|^2)^{(m-|\beta|)/2}, \quad |\alpha| + |\beta| = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь мы можем построить $1/h$ -интегральный оператор Фурье $T(g, \varphi)$. На многообразии L определена невырожденная мера

$$\mu = (-1)^{n(n-1)/2} \pi_1^* \left(\frac{\omega^{\wedge n}}{n!} \right).$$

Здесь $\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n раз) — мера Лиувилля, а нормировочный множитель $(-1)^{n(n-1)/2}/n!$ выбран из соображений удобства; нетрудно подсчитать, что при таком выборе множителя в локальных канонических координатах (x, p) мы имеем

$$(-1)^{n(n-1)/2} \frac{\omega^{\wedge n}}{n!} = dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

(Напомним, что $\omega = dp \wedge dx \equiv dp_1 \wedge dx^1 + \dots + dp_n \wedge dx^n$). Далее, зафиксируем выбор действия на L — функции S_0 , удовлетворяющей уравнению Пфаффа

$$dS_0 = \pi_2^* \alpha - \pi_1^* \alpha, \quad (3)$$

где

$$\alpha = p dx \equiv p_1 dx^1 + \dots + p_n dx^n$$

— фундаментальная 1-форма на T^*M (разрешимость уравнения (3) следует из квантованности L). В случае А носитель функции $\pi_1^* \varphi$, а в случае В все многообразие L можно покрыть конечным числом канонических карт [3, 8], причем в случае В покрытие можно считать $\mathbb{R}_+$ -однородным вне достаточно большой окрестности нулевого сечения. Напомним [3], что,

поскольку L является графиком канонического преобразования, канонические координаты на L всегда можно выбрать следующим специальным образом. Пусть $z_0 \in L$, и пусть $(y^1, \dots, y^n)$ и $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные системы координат на M в окрестности точек $\pi_1 z_0$ и $\pi_2 z_0$ соответственно. Пусть $(y, q) = (y^1, \dots, y^n, q_1, \dots, q_n)$ и $(x, p) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ — соответствующие канонические системы координат на T^*M . Тогда существует такой набор индексов $I \subset \{1, \dots, n\}$, что функции $(x^I, p_{\bar{I}}, q)$ образуют локальную систему координат на L вблизи z_0 . Здесь $\bar{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I$, $x^I = \{x^j\}_{j \in I}$, $p_{\bar{I}} = \{p_j\}_{j \in \bar{I}}$ и набор $(x^I, p_{\bar{I}})$ считается упорядоченным по возрастанию индексов. В окрестности точки $\pi_1(z_0)$ преобразование g задается производящей функцией вида $S_I(x^I, p_{\bar{I}}, q)$ по формулам

$$p_I = \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, \quad x^{\bar{I}} = -\frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}, \quad y = \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Функция S_I , рассматриваемая как функция на L в окрестности z_0 , задается формулой

$$S_I = S_0 + yq - x^{\bar{I}} p_{\bar{I}} = S_0 + \sum_{j=1}^n y^j q_j - \sum_{j \in \bar{I}} x^j p_j.$$

Как нетрудно подсчитать, в координатах $(x^I, p_{\bar{I}}, q)$ мера μ имеет плотность

$$\tilde{\mu} = (-1)^n \det \left(\frac{\partial^2 S_I}{\partial q \partial x^I} \quad \frac{\partial^2 S_I}{\partial q \partial p_{\bar{I}}} \right).$$

В том случае, когда $I = \{1, \dots, n\}$ («неособая карта»), будем писать просто S и $\tilde{\mu}$ вместо $S_{\{1, \dots, n\}}$ и $\tilde{\mu}_{\{1, \dots, n\}}$.

Зафиксируем согласованный выбор аргументов $\arg \tilde{\mu}$ плотностей меры μ в канонических картах [3] и разбиение единицы, подчиненное каноническому покрытию (в случае В разбиение единицы выбирается R_+ -однородным вне достаточно большой окрестности нулевого сечения). Пусть $k_{(L, \mu)}$ — канонический оператор Маслова на лагранжевом многообразии L с мерой μ , построенный по перечисленным выше объектам. (Он определен по модулю $O(h)$ однозначно с точностью до умножения на унитарный множитель.) Интегральный оператор Фурье $T(g, \varphi)$ определяется как интегральный оператор с ядром Шварца (относительно меры dvol на M)

$$K(x, y) = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{n/2} k_{(L, \mu)}(\pi_1^* \varphi)$$

(здесь $\arg i = \pi/2$, y — координата на первом, а x — на втором экземпляре многообразия M в прямом произведении $M \times M$). Заметим, что в случае В ядро $K(x, y)$ корректно определено в смысле осциллирующих интегралов и является, вообще говоря, обобщенной функцией. Более того, для любого $\varphi \in S^m$ оператор $T(g, \varphi)$ корректно определен как непрерывный оператор

$$T(g, \varphi): H^s(M) \rightarrow H^{s-m}(M),$$

где $H^s(M)$ — пространство Соболева с параметром h на M . Локально норма в этом пространстве задается выражением вида

$$\|u\|_s^2 = \int \left| \left(1 - h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{s/2} u \right|^2 dx.$$

Далее, если число m отрицательно и достаточно велико по модулю (а в случае А всегда), оператор $T(g, \varphi)$ будет ядерным в $L^2(M, \text{dvol})$, и мы рассмотрим сейчас задачу о вычислении асимптотики его следа при $h \rightarrow 0$.

Введем следующее обозначение. Пусть A — невырожденная симметрическая матрица; тогда мы положим

$$\nu(A) = -\pi \sigma_-(A),$$

где $\sigma_-(A)$ — отрицательный индекс инерции (число отрицательных собственных значений) матрицы A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть преобразование g имеет конечное число неподвижных точек $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in T^*M$, и пусть эти точки невырождены в том смысле, что в каждой из этих точек $\det(1 - g_*) \neq 0$, где

$$g_*: T_{\alpha_i} T^*M \rightarrow T_{\alpha_i} T^*M$$

— индуцированное отображение касательных пространств. В случае В пусть, кроме того, $\varphi \in S^m$, где $m < -n$. Тогда $T(g, \varphi)$ — ядерный оператор в $L^2(M, \text{dvol})$, и его след имеет следующую асимптотику при $h \rightarrow 0$:

$$\text{Trace } T(g, \varphi) \equiv \sum_k \exp \left\{ \frac{i}{h} S_0(\pi_1^*(\alpha_k)) \right\} \frac{\varphi(\alpha_k)}{\sqrt{\det(1 - g_*(\alpha_k))}} + O(h). \quad (4)$$

Здесь суммирование производится по всем неподвижным точкам α_k преобразования g , через S_0 обозначено неособое действие на многообразии L , а ветвь корня в правой части формулы (4) задается следующим образом: если точка $\pi_1^*(\alpha_k)$ содержится в карте с координатами $(x^I, p_{\bar{I}}, q)$, то

$$\arg \det(1 - g_*(\alpha_k)) = \pi |I| - \arg \tilde{\mu}_I + \nu(\text{Hess}_{x^I, q}(-\Phi_I)), \quad (5)$$

где $|I|$ — число элементов в множестве I , выбор аргументов $\arg \tilde{\mu}_I$ был зафиксирован выше,

$$\begin{aligned} \Phi_I(x^I, q) &= S_I(x^I, q_{\bar{I}}, q) - q_I x^I, \\ \text{Hess}_{x^I, q}(-\Phi_I) &\equiv - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^I \partial x^I} & \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^I \partial q} \\ \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial q \partial x^I} & \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial q \partial q} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— матрица вторых производных функции $-\Phi_I$ по переменным (x^I, q) и выражения в правой части (5) вычисляются в точке, соответствующей α_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В частности, утверждается, что правая часть в (5) корректно определяет одно из возможных значений аргумента определителя $\det(1 - g_*(\alpha_k))$ и не зависит от выбора конкретной канонической карты, содержащей точку $\pi_1^*(\alpha_k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае когда неподвижная точка отображения g является вырожденной, можно получить асимптотическое разложение следа, использующее *нормальные формы* фазовой функции в стационарной точке (см. [9]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае А (финитная амплитуда) ядерность оператора $T(g, \varphi)$ очевидна. В случае В при каждом фиксированном h оператор $T(g, \varphi)$ является обычным интегральным оператором Фурье, соответствующим однородному каноническому преобразованию $\tilde{g}: T_0^*M \rightarrow T_0^*M$, которое совпадает с g вне достаточно большой окрестности нулевого сечения, с классической амплитудой порядка $m < -n$. Поэтому в случае В оператор $T(g, \varphi)$ также ядерный (напомним, что многообразие M предполагается компактным). След оператора $T(g, \varphi)$ задается формулой

$$\text{Trace } T(g, \varphi) = \int_M K(x, x) dx$$

и распадается в сумму интегралов вида

$$\mathcal{J}_I = \left(\frac{i}{2\pi h} \right)^{n/2 + |\bar{I}|/2} \int \exp \left\{ \frac{i}{h} [S_I(x^I, p_{\bar{I}}, q) + p_{\bar{I}} x^{\bar{I}} - qx] \right\} a_I(x, p_{\bar{I}}, q) dp_{\bar{I}} dq dx,$$

соответствующих отдельным слагаемым в определении канонического оператора. В случае А амплитуда $a_I(x, p_{\bar{I}}, q)$ этого интеграла финитна; в случае В амплитуда $a_I(x, p_{\bar{I}}, q)$ асимптотически однородна степени $m - |\bar{I}|/2$ при $|p_{\bar{I}}| + |q| \rightarrow \infty$ и интеграл понимается, как обычно в теории интегральных операторов Фурье, как осциллирующий (т.е. расходимость при $|p_{\bar{I}}| + |q| \rightarrow \infty$ устраняется формальным интегрированием по частям).

Мы будем считать асимптотику следа, применяя к интегралам $\mathcal{J}_I$ метод стационарной фазы. Для обоснования законности применения этого метода заметим, что всегда можно считать амплитуду a_I (или, что то же самое, φ) финитной. Действительно, в случае А это так с самого начала. В случае В представим амплитуду в виде суммы $a_I = a_{I1} + a_{I2}$, где a_{I1} финитна, а на носителе функции a_{I2} сумма $|p_{\bar{I}}| + |q|$ достаточно велика, так что фазовая функция

$$\Psi(x, p_{\bar{I}}, q) = S(x^I, p_{\bar{I}}, q) + p_{\bar{I}} x^{\bar{I}} - qx$$

однородна по $(p_{\bar{I}}, q)$ на носителе a_{I2} .

Из условий, наложенных на g , вытекает, что однородное преобразование $\tilde{g}$ не имеет неподвижных точек, откуда следует, что $\text{grad } \Psi$ не обращается в нуль на носителе a_{I2} . Интегрируя по частям достаточное количество раз (согласно определению осциллирующих интегралов), получаем, что соответствующее функции a_{I2} слагаемое в $\mathcal{J}_I$ есть $O(h^\infty)$. Далее, мы можем считать, что носитель функции φ достаточно мал и содержит только одну неподвижную точку (обозначим ее через α), а соответствующая область на L целиком покрывается одной канонической картой. Так как α — неподвижная точка, можно считать, что соответствующие локальные системы координат $(y^1, \dots, y^n)$ и $(x^1, \dots, x^n)$ на M совпадают.

Докажем сначала утверждение теоремы для случая, когда рассматриваемая каноническая карта неособая ($I = \{1, \dots, n\}$). В этом случае ядро опе-

ратора $T(g, \varphi)$ имеет вид

$$K(x, y) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n/2} \left(\frac{-i}{2\pi h}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}_q^n} \exp\left\{\frac{i}{h}[S(x, q) - qy]\right\} \sqrt{\tilde{\mu}(x, q)} (\pi_1^* \varphi)(x, q) dq$$

(мы используем одно и то же обозначение для функции $\pi_1^* \varphi$ на L и ее представления в канонических координатах; это не приведет к недоразумению). Соответственно след оператора $T(g, \varphi)$ дается формулой

$$\begin{aligned} & \text{Trace } T(g, \varphi) \\ &= i^{-n} \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^n \iint_{\mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_x^n} \exp\left\{\frac{i}{h}[S(x, q) - qx]\right\} \sqrt{\tilde{\mu}(x, q)} (\pi_1^* \varphi)(x, q) dx dq. \end{aligned} \quad (6)$$

Для вычисления интеграла (6) воспользуемся методом стационарной фазы в следующей форме [3].

ЛЕММА 1. Пусть $\Phi(v)$, $\varphi(v)$, $v \in \mathbb{R}^m$, — гладкие функции, φ финитна, а Φ вещественнозначна и имеет на носителе функции φ единственную стационарную точку v_0 , причем невырожденную. Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^m \int \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(v)\right\} \varphi(v) dv \\ &= \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(v_0)\right\} \varphi(v_0) \{\det(-\Phi''_{vv}(v_0))\}^{-1/2} + O(h), \end{aligned}$$

где $\arg i = \pi/2$, $\arg \det(-\Phi''_{vv}(v_0)) = \nu(-\Phi''_{vv}(v_0))$.

Применим лемму 1 к интегралу (6). Фаза этого интеграла имеет вид

$$\Phi(x, q) = S(x, q) - qx,$$

а уравнения стационарных точек записываются в форме

$$S_x(x, q) = q, \quad S_q(x, q) = x. \quad (7)$$

Поскольку каноническое преобразование $(y, q) \xrightarrow{g} (x, p)$ задается уравнениями

$$S_x(x, q) = p, \quad S_q(x, q) = y, \quad (8)$$

условия (7) в точности означают, что (x, q) — неподвижная точка отображения g . Покажем, что эта стационарная точка невырожденна. В дальнейших вычислениях мы опускаем аргумент y функции, если он соответствует стационарной точке. Матрица S_{qx} , очевидно, невырожденна (это в точности то условие, при котором уравнения (8) определяют гладкое отображение $(y, q) \mapsto (x, p)$). Покажем, что

$$\det \text{Hess}_{x,q}(-\Phi) = \det(S_{qx}) \det(1 - g_*). \quad (9)$$

Действительно,

$$\text{Hess}_{x,q}(-\Phi) = \begin{pmatrix} -S_{xx} & 1 - S_{xq} \\ 1 - S_{qx} & -S_{qq} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, дифференцируя (8) и решая получающуюся систему линейных уравнений относительно (dx, dp) , находим

$$1 - g_* = \begin{pmatrix} 1 - S_{qx}^{-1} & S_{qx}^{-1} S_{qq} \\ -S_{xx} S_{qx}^{-1} & 1 + S_{xx} S_{qx}^{-1} S_{qq} - S_{xq} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В матрице (10) умножим первую блок-строку на S_{xx} и вычтем из второй, что не изменит определителя. Получим

$$\det(1 - g_*) = \begin{vmatrix} 1 - S_{qx}^{-1} & S_{qx}^{-1} S_{qq} \\ -S_{xx} & 1 - S_{xq} \end{vmatrix} = \det(S_{qx})^{-1} \begin{vmatrix} S_{qx} - 1 & S_{qq} \\ -S_{xx} & 1 - S_{xq} \end{vmatrix}.$$

Далее, во втором сомножителе переставим местами блок-строки (что дает множитель $(-1)^n$) и умножим вторую блок-строку на -1 (что даст снова $(-1)^n$). Окончательно получим

$$\det(1 - g_*) = \det(S_{qx})^{-1} \begin{vmatrix} -S_{xx} & 1 - S_{xq} \\ 1 - S_{qx} & -S_{qq} \end{vmatrix} = \det(S_{qx})^{-1} \det \text{Hess}_{x,q}(-\Phi),$$

что и требовалось.

Далее, плотность меры в неособой карте имеет вид

$$\tilde{\mu}(x, q) = (-1)^n \det(S_{qx}),$$

так что с учетом (9) мы видим, что формула (5), в которой теперь $|I| = n$, действительно дает одно из возможных значений аргумента $\arg \det(1 - g_*)$ (заметим, что $\nu(A)$ есть одно из возможных значений аргумента определителя матрицы A). Более того, из леммы 1 мы теперь сразу получаем требуемую формулу; остается лишь заметить, что $\Phi(x, q) = S_0(x, q)$.

Опишем теперь (более кратко), как доказывать теорему для случая особой карты ($I \neq \{1, \dots, n\}$). Это в принципе можно проверить непосредственным вычислением, но так как оно весьма громоздко, мы заменим его более простым косвенным рассуждением. Предположим на время, что данная неподвижная точка покрывается как особой картой с данным I , так и неособой картой. Тогда справедлива формула, выведенная для неособой карты, и для того, чтобы показать справедливость формулы (5) с данным I , достаточно проверить, что матрица $\text{Hess}_{x,I,q}(-\Phi_I)$ невырожденна и что

$$\nu(\text{Hess}_{x,q}(-\Phi)) - \nu(\text{Hess}_{x,I,q}(-\Phi_I)) \equiv \arg \tilde{\mu} - \arg \tilde{\mu}_I - \pi |\bar{I}| \pmod{4\pi}. \quad (11)$$

Поскольку $\arg \tilde{\mu}$ и $\arg \tilde{\mu}_I$ согласованы, мы имеем в соответствии с формулами из §4.1 книги [3]

$$\arg \tilde{\mu} \equiv \arg \tilde{\mu}_I + \nu(\text{Hess}_{x,\bar{I}}(-S)) + \pi |\bar{I}| \pmod{4\pi},$$

так что проверка равенства (11) сводится к проверке равенства

$$\nu(\text{Hess}_{x,q}(-\Phi)) = \nu(\text{Hess}_{x,I,q}(-\Phi_I)) + \nu(\text{Hess}_{x,\bar{I}}(-S)) \pmod{4\pi}, \quad (12)$$

которое (вместе с невырожденностью гессиана функции Φ_I) тривиально получается следующим образом. Вычислим интеграл (6) в два этапа по методу стационарной фазы. Сначала вычислим интеграл по переменным $x^{\bar{I}}$ (это

возможно, поскольку носитель амплитуды лежит в карте с координатами $(x^I, p_{\bar{I}}, q)$. В результате получим интеграл

$$i^{-n} \left(\frac{i}{2\pi n} \right)^{n-|\bar{I}|/2} \int_{\mathbb{R}_q^n} \int_{\mathbb{R}_{x^I}^{|\bar{I}|}} \exp \left\{ \frac{i}{h} \Phi_I(x^I, q) \right\} \frac{b(x^I, q)}{\det \text{Hess}_{x^{\bar{I}}}(-S)} dx^I dq, \quad (13)$$

где через $b(x^I, q)$ обозначена амплитуда интеграла (6) в стационарной точке (фаза интеграла (13) есть именно Φ_I , поскольку $S_I(x^I, p_{\bar{I}}, q)$ — преобразование Лежандра фазы $S(x, q)$ по переменным $x^{\bar{I}}$). Поскольку фаза исходного интеграла (6) по всем переменным была невырождена, легко видеть, что интеграл (13) также можно вычислить по методу стационарной фазы; в частности, его фазовая функция невырождена. Сравнивая результаты двух способов вычисления, получаем (12).

Чтобы освободиться от предположения, что данная точка покрывается неособой картой, рассмотрим фазовый поток g_{osc}^t гамильтониана

$$H(x, p) = \frac{1}{2}[(p - p_0)^2 + (x - x_0)^2],$$

где (p_0, x_0) — рассматриваемая неподвижная точка. Положим $g(t) = g_{\text{osc}}^t \cdot g$ и рассмотрим оператор $T(g(t), \varphi)$ (все наши рассуждения локальны, что законно, так как носитель функции φ мал). Точка (p_0, x_0) — неподвижная точка преобразования $g(t)$ при всех t . При малых $t > 0$ она покрывается неособой картой, а при малых $t \geq 0$ — особой картой с данным I и, следовательно, при малых $t \geq 0$ след оператора $T(g(t), \varphi)$ может быть записан для некоторого m в виде осциллирующего интеграла

$$\text{Trace } T(g(t), \varphi) = \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^m \int_{\mathbb{R}_m} \exp \left\{ \frac{i}{h} \Psi(t, v) \right\} a(t, v) dv, \quad 0 \leq t < \varepsilon. \quad (14)$$

При этом при $t > 0$ интеграл (14) может быть посчитан по методу стационарной фазы в соответствии с доказанным выше. Более того, при $t \rightarrow 0$ гессиан фазы интеграла остается отделенным от нуля. Поэтому в формуле асимптотики для следа можно перейти к пределу при $t \rightarrow 0$, что и доказывает теорему в этом случае.

В заключение этого параграфа мы дадим обобщение теоремы следа на случай, когда симплектическое преобразование g имеет *гладкое многообразие неподвижных точек*.

Итак, рассмотрим симплектическое преобразование

$$g: T^*M \rightarrow T^*M$$

и обозначим через $\mathcal{F}$ множество неподвижных точек этого отображения. Предположим, что множество $\mathcal{F}$ может быть разложено в конечное дизъюнктное объединение компонент F_k , которые являются гладкими многообразиями различной размерности без края. Заметим, что поскольку неподвижные точки отображения g соответствуют стационарным точкам действия S_0 , то значения этой последней функции постоянны на каждой компоненте F_k множества $\mathcal{F}$. Эти значения мы обозначим через S_k .

ТЕОРЕМА 2. Пусть ядро оператора $1 - g_*$ в каждой точке множества $\mathcal{F}$ совпадает с касательным пространством к соответствующей гладкой

компоненте F_k . В случае В пусть $\varphi \in S^m$, где $m < -n$. Тогда существует не зависящая от h и φ гладкая комплексная мера dm_k на F_k , такая, что

$$\text{Trace } T(g, \varphi) \equiv \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^{\max \dim F_k / 2} \left[\sum_k \exp \left\{ \frac{i}{h} S_k \right\} \int_{F_k} \varphi dm_k + O(h) \right].$$

Здесь $\max \dim F_k$ — максимальная размерность подмногообразий F_k , а сумма по k распространяется на все подмногообразия максимальной размерности.

Доказательство проводится по следующей схеме. Запишем след оператора $T(g, \varphi)$ в форме осциллирующего интеграла и затем локализуем его в окрестность множества $\mathcal{F}$. Очевидно, что интеграл может быть представлен как сумма интегралов, взятых по некоторым окрестностям компонент F_k множества $\mathcal{F}$. Запишем теперь каждый из этих интегралов в виде повторных интегралов, причем внутренний интеграл берется по (локальным) переменным, трансверсальным к многообразию F_k , а внешний — по переменным многообразия F_k . Тогда оказывается, что ядро матрицы гессiana фазы в точности совпадает с касательным пространством, соответствующим компоненте F_k , и, следовательно, к интегралу по трансверсальным направлениям можно применить метод стационарной фазы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. К сожалению, симплектическая геометрия множеств F_k , по-видимому, может быть более или менее произвольной, так что авторам не удалось получить явных выражений для мер dm_k в общем случае.

§2. Основной результат

Здесь мы применим результаты §1 для получения теоремы типа теоремы Атьи–Ботта–Лефшеца в ситуации, когда эндоморфизмы эллиптического комплекса даются $1/h$ -интегральными операторами Фурье–Маслова, ассоциированными с некоторым каноническим преобразованием

$$g: T^*M \rightarrow T^*M.$$

Пусть $E_1 \rightarrow M$ и $E_2 \rightarrow M$ — векторные расслоения над многообразием M , и пусть

$$\hat{a}: C^\infty(M, E_1) \rightarrow C^\infty(M, E_2)$$

— эллиптический $1/h$ -псевдодифференциальный оператор с символом $a(x, p, h)$ класса S^m , действующий в сечениях этих расслоений. Эллиптичность этого оператора означает, что существует регуляризатор для оператора $\hat{a}$, т.е. такой $1/h$ -псевдодифференциальный оператор

$$\hat{r} = r(x, -ih \partial / \partial x, h),$$

что символы операторов $1 - \hat{r} \circ \hat{a}$ и $1 - \hat{a} \circ \hat{r}$ принадлежат классу $S^{-\infty} = \bigcap_m S^m$. Ясно, что при этих условиях $\hat{a}$ имеет конечномерное ядро и коядро, т.е. является фредгольмовым.

Рассмотрим эллиптический комплекс (оператор)

$$0 \longrightarrow C^\infty(M, E_1) \xrightarrow{\hat{a}} C^\infty(M, E_2) \longrightarrow 0,$$

и пусть $\hat{U}_1 = T(g, \varphi_1)$, $\hat{U}_2 = T(g, \varphi_2)$ — интегральные операторы Фурье порядка нуль, определяющие эндоморфизм этого комплекса. Это означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\infty(M, E_1) & \xrightarrow{\hat{a}} & C^\infty(M, E_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \hat{U}_1 \downarrow & & \downarrow \hat{U}_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & C^\infty(M, E_1) & \xrightarrow{\hat{a}} & C^\infty(M, E_2) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (15)$$

коммутативна.

Рассмотрим число Лефшеца диаграммы (15)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\hat{a}, \hat{U}_1, \hat{U}_2) = \text{Trace}\{\hat{U}_1|_{\text{Ker } \hat{a}}\} - \text{Trace}\{\hat{U}_2|_{\text{Coker } \hat{a}}\}.$$

Это число является функцией параметра h , и наша цель — вычисление главного члена асимптотики $\mathcal{L} = \mathcal{L}(h)$ при $h \rightarrow 0$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\hat{a}$, $\hat{U}_1$ и $\hat{U}_2$ — введенные выше операторы, и предположим, что преобразование $g: T^*M \rightarrow T^*M$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда имеет место сравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}(h) &\equiv \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^{\max \dim F_k / 2} \\ &\times \left[\sum_k \exp\left\{ \frac{i}{h} S_k \right\} \int_{F_k} (\text{Trace } \varphi_1 - \text{Trace } \varphi_2) dm_k + O(h) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь сумма по k охватывает подмногообразия F_k максимальной размерности.

Доказательство использует формулу для следа интегрального оператора Фурье, полученную в теореме 2, и проводится по стандартной схеме (см., например, [10]).

В частном случае, когда g удовлетворяет условиям теоремы 1 (т.е. имеет лишь изолированные невырожденные неподвижные точки), формула (16) приобретает вид

$$\mathcal{L} = \sum_k \exp\left\{ \frac{i}{h} S(\pi_i^k(\alpha_k)) \right\} \frac{\text{Trace } \varphi_1(\alpha_k) - \text{Trace } \varphi_2(\alpha_k)}{\sqrt{\det(1 - g_*(\alpha_k))}} + O(h). \quad (17)$$

§3. Классическая формула Атьи–Ботта–Лефшеца

В заключение мы покажем, как классический результат Атьи–Ботта [1] следует из теоремы 3. При этом предполагается, что отображение $f: M \rightarrow M$, задающее соответствующий геометрический эндоморфизм, является локальным диффеоморфизмом и имеет лишь невырожденные неподвижные точки. Итак, пусть оператор $\hat{a}$ в диаграмме (15) является дифференциальным оператором (не зависящим от малого параметра h), а операторы $\hat{U}_1$ и $\hat{U}_2$ задают

геометрический эндоморфизм комплекса

$$0 \longrightarrow C^\infty(M, E_1) \xrightarrow{\hat{a}} C^\infty(M, E_2) \longrightarrow 0, \quad (18)$$

соответствующий отображению f .

Умножая оператор $\hat{a}$ на h^m , где m — порядок оператора $\hat{a}$, мы можем рассматривать оператор $\hat{a}$ как $1/h$ -дифференциальный оператор, причем, как нетрудно видеть, главный символ оператора $h^m \hat{a}$, рассматриваемого как $1/h$ - Ψ DO, совпадает с главным символом дифференциального оператора $\hat{a}$; в частности, оператор (18), умноженный на h^m , является эллиптическим. Кроме того, при умножении на h^m пространства $\text{Ker } \hat{a}$ и $\text{Coker } \hat{a}$ остаются неизменными, и поэтому число Лефшеца $\mathcal{L}(h^m \hat{a}, \hat{U}_1, \hat{U}_2)$ не зависит от h .

Операторы $\hat{U}_1$ и $\hat{U}_2$ могут быть записаны в виде

$$\hat{U}_j u(x) = \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^n \int \exp \left\{ \frac{i}{h} q(f(x) - y) \right\} T_j(x) u(y) dq dy, \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

и могут рассматриваться как $1/h$ -интегральные операторы Фурье, отвечающие графику L канонического преобразования, порождаемого отображением f .

Более точно, запись (19) соответствует неособой карте, и производящая функция канонического преобразования g , порожденного отображением f , имеет вид

$$S(x, q) = q f(x).$$

Соответственно уравнения канонического преобразования записываются в форме

$$p = q \frac{\partial f}{\partial x}(x), \quad y = f(x),$$

или

$$x = f^{-1}(y), \quad p = q \frac{\partial f}{\partial x}(f^{-1}(y)).$$

Далее, плотность $\tilde{\mu}$ меры μ в координатах (x, q) имеет вид

$$\tilde{\mu} = (-1)^n \det \frac{\partial f}{\partial x}(x),$$

так что амплитуды операторов (19) равны

$$T_j(x) \left[(-1)^n \det \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{-1/2} = T_j(x) (\sqrt{\tilde{\mu}})^{-1}.$$

Пусть $x = f(x)$ — невырожденная неподвижная точка отображения f . Тогда $(x, 0)$ — неподвижная точка отображения g , причем единственная в слое расслоения T^*M над точкой x . Мы имеем в этой точке

$$\begin{aligned} \det(1 - g_*) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1} & 0 \\ * & 1 - \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1} \det \left(1 - \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = \tilde{\mu}^{-1} \det \left(1 - \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

По правилу выбора аргументов, указанному в теореме 1,

$$\arg \det (1 - g_*) = \pi n - \arg \tilde{\mu} + \nu(\text{Hess}_{x,q}(-\Phi)). \quad (20)$$

В формуле (20) функция Φ — это $q(f(x) - x)$, и поэтому

$$\text{Hess}_{x,q}(-\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{\partial f}{\partial x} \\ 1 - \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

(напомним, что в стационарной точке $q = 0$). Матрица (21) имеет одинаковое количество положительных и отрицательных собственных значений (ровно n), так что

$$\nu(\text{Hess}_{x,q}(-\Phi)) = -\pi n.$$

Окончательно получаем из (17) с учетом предыдущих вычислений

$$\mathcal{L} = \sum_{x=f(x)} \frac{\text{Trace } T_1(x) - \text{Trace } T_2(x)}{|\det(1 - \partial f / \partial y)|},$$

что совпадает с классическим результатом Атьи–Ботта [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. Ann. of Math., **86**, 374–407 (1967).
2. Маслов В. П. Операторные методы. Наука, Москва, 1973.
3. Mishchenko A., Shatalov V., Sternin B. Lagrangian manifolds and the Maslov operator. Springer–Verlag Berlin–Heidelberg, 1990.
4. Sternin B., Shatalov V. Ten lectures on quantization. Preprint Univ. de Nice–Sophia Antipolis, V. 22, Nice, 1994.
5. Fedosov B. V. Trace formula for Schrödinger operator. Russian J. Math. Phys., **1**, 447–463 (1993).
6. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Теорема Атьи–Ботта–Лефшеца о неподвижной точке в симплектической геометрии. Доклады РАН, **348**, № 2, 165–168 (1996).
7. Sternin B., Shatalov V. Quantization of symplectic transformation and the Lefschetz fixed point theorem. Preprint Max-Planck-Institut für Mathematik, Vol. 92, Bonn, 1994.
8. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. МГУ, Москва, 1965.
9. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн–Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, т. 1. Наука, Москва, 1982.
10. Федосов Б. В. Теоремы об индексе. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 65, ВИНТИ, Москва, 1991, с. 165–268.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
25 декабря 1994 г.
В переработанном виде
6 апреля 1998 г.