Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 49–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:28:25

УДК 514.752.43+517.984

Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ *

© 1998. И. А. ТАЙМАНОВ

§1. Введение

Данная статья является продолжением работ [16, 17]. Изложенные здесь результаты распространяют на произвольные поверхности результаты, полученные в [17] для поверхностей вращения, и на протяжении последнего года они излагались в многочисленных докладах автора, пока не были анонсированы в [18]. Это

— построение глобального представления Вейерштрасса для произвольной замкнутой ориентированной поверхности рода $g \geq 1$, погруженной в $\mathbb{R}^3$ (§2);

— построение спектра Вейерштрасса для тора, погруженного в $\mathbb{R}^3$, и обсуждение его геометрических свойств (§3);

— построение конечнозонных поверхностей (§4).

В §5 мы обсуждаем связь этих конструкций с гипотезой Уиллмора.

Указанное представление устанавливает взаимно однозначное соответствие между

а) решениями уравнений $\mathcal{D}\psi = 0$ для операторов Дирака $\mathcal{D}$ на спинорных расслоениях специального вида над замкнутыми ориентированными поверхностями Σ постоянной кривизны

и

б) погружениями универсальных накрытий поверхностей Σ в $\mathbb{R}^3$, такими, что их отображения Гаусса пропускаются через Σ .

Это дает возможность описать пространство модулей всех погружений поверхностей в $\mathbb{R}^3$ в терминах операторов Дирака в спинорных расслоениях над поверхностями постоянной кривизны и указать новые геометрические инварианты поверхностей в терминах спектра оператора Дирака.

§2. Представление Вейерштрасса

2.1. Локальное представление Вейерштрасса.

ЛЕММА 1. Пусть W — односвязная область в $\mathbb{C}$ и $\psi = (\psi_1, \psi_2): W \rightarrow \mathbb{C}^2$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}\psi = 0, \tag{1}$$

* Работа поддержана РФФИ (грант 96-15-96877) и SFB 288.

где

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \quad (2)$$

и функция $U(z, \bar{z})$ вещественна. Тогда формулы

$$\begin{aligned} X^1(z, \bar{z}) &= \frac{i}{2} \int_{\gamma} ((\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2) dz' - (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) d\bar{z}'), \\ X^2(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} ((\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) dz' - (\bar{\psi}_1^2 - \psi_2^2) d\bar{z}'), \\ X^3(z, \bar{z}) &= \int_{\gamma} (\psi_1 \bar{\psi}_2 dz' + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z}') \end{aligned} \quad (3)$$

задают погружение области W в $\mathbb{R}^3$. При этом индуцированная метрика имеет вид $D(z, \bar{z})^2 dz d\bar{z}$, где $D(z, \bar{z}) = (|\psi_1(z, \bar{z})|^2 + |\psi_2(z, \bar{z})|^2)$, и средняя кривизна равна

$$H(z, \bar{z}) = 2 \frac{U(z, \bar{z})}{D(z, \bar{z})}. \quad (4)$$

Погружение $W \rightarrow \mathbb{R}^3$ строится следующим образом. Возьмем точку $z_0 \in W$ и отображим ее в $0 \in \mathbb{R}^3$. После этого определим $X^i(z, \bar{z})$ как значение интеграла (3), взятого вдоль произвольного пути в W , соединяющего z_0 и z .

Для $U = 0$ это — классическое представление Вейерштрасса минимальных поверхностей.

Видимо, эта лемма принадлежит Эйзенхарту [3], который выписывал (1) как условие только на ψ_1 : $L\psi_1 = 0$ в терминах оператора

$$L = \partial \bar{\partial} - \frac{\partial U}{U} \bar{\partial} + U^2. \quad (5)$$

В конце 80-х годов Абреш вывел представление Вейерштрасса для поверхностей постоянной средней кривизны, используя оператор (2), и рассматривал глобальное представление для построения точных формул для таких поверхностей рода $g \geq 2$. Так как программа построения таких формул до сих пор не реализована, то результаты Абреша были только изложены на конференции в Люмине.

Бобенко показал, что при рассмотрении $\mathbb{R}^3$ как пространства мнимых кватернионов некоторые тождества для подвижного репера записываются в виде уравнения Дирака для кватернионнозначных функций, но построение общих поверхностей в терминах собственных функций оператора Дирака и глобализация этой конструкции им не обсуждалась [1].

В [9] Конопельченко рассмотрел «квадратный корень» из (5), т.е. матричный дифференциальный оператор первого порядка (2), для определения деформаций поверхностей, заданных формулами (3), с помощью модифицированных уравнений Веселова–Новикова.

Эта замена двумерного оператора Шрёдингера (5) с потенциалом и магнитным полем на оператор Дирака (2) с потенциалом U делает представление более удобным для приложений.

ЛЕММА 2. Пусть W — область в $\mathbb{C}$ и $X: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ — конформное погружение W в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} \neq 0 \quad (6)$$

в окрестности точки $z_0 \in W$. Тогда в окрестности точки z_0 функции

$$\psi_1(z, \bar{z}) = \sqrt{-\partial\Phi(z, \bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = \sqrt{\bar{\partial}\Phi(z, \bar{z})}, \quad (7)$$

где $\Phi(z, \bar{z}) = X^2(z, \bar{z}) + iX^1(z, \bar{z})$, удовлетворяют уравнению (1) с $U(z, \bar{z}) = H(z, \bar{z})D(z, \bar{z})/2$, где H — средняя кривизна и $D^2 dz d\bar{z}$ — метрика поверхности $X(W) \subset \mathbb{R}^3$.

Мы кратко изложим доказательство, следуя [16].

Условие конформности погружения выписывается в виде

$$\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим конформное погружение, удовлетворяющее условию (6), и по формулам (7) построим в окрестности точки $z_0 \in W$ вектор-функцию ψ . Из (6) и (8) следует, что около z_0 подкоренные выражения из (7) не обращаются в нуль.

Выберем следующие базисы в касательных плоскостях к $X(W)$: $e_1 = D^{-1}\partial X/\partial x$, $e_2 = D^{-1}\partial X/\partial y$, где $D^2 dz d\bar{z}$ — индуцированная метрика. Пусть $e_3 = e_1 \times e_2$. Дериивационные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= \frac{\partial D}{\partial x} e_1 - \frac{\partial D}{\partial y} e_2 + D^2 h_{11} e_3, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial D}{\partial y} e_1 + \frac{\partial D}{\partial x} e_2 + D^2 h_{12} e_3, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} &= -\frac{\partial D}{\partial x} e_1 + \frac{\partial D}{\partial y} e_2 + D^2 h_{22} e_3, \end{aligned} \quad (9)$$

где h_{ij} — вторая фундаментальная форма.

Теперь лемма 2 доказывается подстановкой формул (9) в выражение для $\bar{\partial}\psi_1$ и $\partial\psi_2$ и последующими прямыми вычислениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Представление поверхности Σ , погруженной в $\mathbb{R}^3$, формулами (3) называется *представлением Вейерштрасса*.

Функция $U(z, \bar{z})$ вида (4) называется *потенциалом поверхности Σ с отмеченным конформным параметром z* , или *потенциалом представления Вейерштрасса поверхности Σ* .

Лемма 2 непосредственно влечет за собой [16] следующий результат:

ЛЕММА 3. Каждая C^2 -регулярная поверхность, погруженная в $\mathbb{R}^3$, в окрестности каждой своей точки допускает представление Вейерштрасса.

2.2. Глобальное представление Вейерштрасса. Для того чтобы определить представление Вейерштрасса глобально для всей поверхности Σ , не-

обходимо корректно определить расслоение, порожденное ψ над Σ , и оператор $\mathcal{D}$, действующий в этом расслоении. Эта задача была решена в [16], и мы напомним ее решение.

Каждый тор конформно эквивалентен плоскому тору $\mathbb{C}/\Lambda$, где Λ — решетка ранга 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тор Σ , погруженный в $\mathbb{R}^3$, имеет глобальное представление Вейерштрасса, если существуют вещественный потенциал U и функции ψ_1 и ψ_2 , определенные на универсальном накрытии тора Σ , т.е. на $\mathbb{C}$, такие, что

1) для $z \in \mathbb{C}$ и $\gamma \in \Lambda$

$$U(z + \gamma) = U(z), \quad \psi_j(z + \gamma) = \varepsilon(\gamma)\psi_j(z), \quad \varepsilon(\gamma) = \pm 1; \quad (10)$$

2) вектор-функция ψ удовлетворяет уравнению (1) и для подходящим образом выбранных координат в $\mathbb{R}^3$ определяет по формулам (3) погружение тора Σ .

Сфера Σ с $g > 1$ ручками конформно эквивалентна факторпространству $\mathcal{H}/\Lambda$, где $\mathcal{H}$ — верхняя полуплоскость Лобачевского и Λ — решетка в $PSL(2, \mathbb{R})$, группе изометрий пространства $\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Сфера Σ с $g(>1)$ ручками, погруженная в $\mathbb{R}^3$, имеет глобальное представление Вейерштрасса, если существуют вещественный потенциал U и функции ψ_1 и ψ_2 , определенные на универсальном накрытии сферы Σ , т.е. на $\mathcal{H}$, такие, что

1) для $z \in \mathcal{H}$ и $\gamma \in \Lambda$, представленных матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

имеют место равенства

$$U(\gamma(z)) = |cz + d|^2 U(z), \quad (11)$$

$$\psi_1(\gamma(z)) = (cz + d)\psi_1(z), \quad \psi_2(\gamma(z)) = (c\bar{z} + d)\psi_2(z);$$

2) вектор-функция ψ удовлетворяет (1) и для подходящим образом выбранных координат в $\mathbb{R}^3$ определяет по формулам (3) погружение сферы Σ .

Эти определения основываются на следующем утверждении.

ЛЕММА 4. Если локальное представление Вейерштрасса замкнутой ориентированной поверхности Σ рода $g \geq 1$ гладко продолжается на все универсальное накрытие $\tilde{\Sigma}$, то U и ψ удовлетворяют условиям (10) для $g = 1$ и (11) для $g \geq 2$.

Эта лемма следует из формул преобразования средней кривизны и метрики при замене координат. Теперь мы приходим к следующему результату [16].

ТЕОРЕМА 1. Если замкнутая ориентированная поверхность Σ рода ≥ 1 имеет глобальное представление Вейерштрасса, то ψ является глобальным сечением спинорного расслоения над поверхностью постоянной кривизны Σ_0 , конформно эквивалентной Σ , и оператор Дирака (2) действует в этом расслоении.

Следующая теорема демонстрирует важность этого представления.

ТЕОРЕМА 2. *Каждая C^3 -регулярная замкнутая ориентированная поверхность Σ рода $g \geq 1$, погруженная в $\mathbb{R}^3$, имеет глобальное представление Вейерштрасса¹.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3, функции (7) определяют локальное представление Вейерштрасса около каждой точки, в которой $\partial\Phi \neq 0$. Для доказательства существования глобального представления достаточно корректно гладко продолжить эти функции на окрестности точек, в которых $\partial\Phi = 0$. Согласно (8), последнее условие эквивалентно равенству $X_z^3 = 0$.

Выберем для Σ такие координаты в $\mathbb{R}^3$, что все критические точки «функции высоты», расстояния до плоскости $X^3 = 0$, невырождены по Морсу [13]. Вне критических точек определим ψ по формулам (7) и покажем, что эти функции не имеют ветвлений в критических точках.

Пусть q — критическая точка функции X^3 и z — конформный параметр около q , такой, что $z(q) = 0$. Так как точка невырождена, то

$$X^3(z, \bar{z}) = \alpha z^2 + \bar{\alpha} \bar{z}^2 + \beta z \bar{z} + O(|z|^3) \quad (12)$$

и $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Покажем, что (7) корректно определяет ψ_1 около q , и заметим, что эти рассуждения проходят и для ψ_2 .

Так как $\partial\Phi(q) = 0$, то

$$\frac{\partial X^1(q)}{\partial z} = i \frac{\partial X^2(q)}{\partial z}. \quad (13)$$

Дифференцируя левую часть формулы (8) по z , мы выводим из (12) и (13), что

$$(\partial\Phi)_z(q) = \frac{\partial^2 X^2(q)}{\partial z^2} + i \frac{\partial^2 X^1(q)}{\partial z^2} = 0. \quad (14)$$

Аналогично, дифференцируя ее по $\bar{z}$, получаем

$$(\partial\Phi)_{\bar{z}}(q) = \frac{\partial^2 X^2(q)}{\partial z \partial \bar{z}} + i \frac{\partial^2 X^1(q)}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Дважды дифференцируя левую часть формулы (8) по z , мы с учетом (12), (13) и (14) получаем

$$\left(\frac{\partial^2 X^3(q)}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{\partial X^2(q)}{\partial z} \left(\frac{\partial^3 X^2(q)}{\partial z^3} + i \frac{\partial^3 X^1(q)}{\partial z^3} \right) = 0,$$

и, так как поверхность регулярна, $X_z^2(q) \neq 0$. Следовательно,

$$(\partial\Phi)_{zz}(q) \neq 0. \quad (15)$$

Если $\alpha = 0$, то $\beta \neq 0$ и, дважды дифференцируя левую часть формулы (8) по $\bar{z}$, мы получаем

$$(\partial\Phi)_{\bar{z}\bar{z}}(q) \neq 0. \quad (16)$$

¹Эта теорема также верна для сфер, но этот случай мы рассмотрим отдельно. Для аналитических поверхностей существование глобального представления выводится из существования локального представления с помощью аналитического продолжения, и это было сделано в [16].

Из (15) и (16) мы заключаем, что $\partial\Phi$ имеет двойной нуль в q и, если, например, (15) выполняется, $\partial\Phi = z^2 \cdot f(z, \bar{z})$, где ветви $\sqrt{f}$ не имеют ветвления в q . Следовательно, $\sqrt{-\partial\Phi}$ не имеет ветвления в q .

Так как мы рассматривали произвольную критическую точку функции X^3 , то каждая ветвь $\sqrt{-\partial\Phi}$ корректно определена и не имеет ветвления. Следовательно, на универсальном накрытии поверхности Σ вектор-функция ψ корректно определена формулой (7).

Теорема 2 доказана.

§3. Спектр представления Вейерштрасса

Пусть Σ — тор, погруженный в $\mathbb{R}^3$ и конформно эквивалентный плоскому тору $\mathbb{C}/\Lambda$. Предположим, что он имеет глобальное представление Вейерштрасса, что по теореме 2 выполняется, если он C^3 -регулярен:

1) существует функция $U(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $U(z + \gamma) = U(z)$ для $z \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \Lambda$;

2) существуют постоянные ε_1 и ε_2 , такие, что $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$, и они определяют спинорное расслоение над $\mathbb{C}/\Lambda$;

3) существует функция ψ , такая, что $\mathcal{D}\psi = 0$, и для нее выполняются условия периодичности (10).

Согласно лемме 1, каждое решение уравнения (1) определяет погружение поверхности в $\mathbb{R}^3$. Мы рассмотрим «линейный базис» для семейства таких поверхностей, а именно множество функций Флоке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *функцией Флоке* (с нулевым собственным значением) оператора $\mathcal{D}$ (см. (2)) с квазиимпульсами (k_1, k_2) , если $\mathcal{D}\psi = 0$ и

$$\psi(z + \gamma) = \exp(2\pi i(\operatorname{Re} \gamma \cdot k_1 + \operatorname{Im} \gamma \cdot k_2))\psi(z) \quad (17)$$

для $\gamma \in \Lambda$.

Заметим, что функция ψ , удовлетворяющая (17), имеет вид

$$\psi(z) = \exp(2\pi i(xk_1 + yk_2))\varphi(z), \quad (18)$$

где $\varphi(z)$ периодична относительно Λ . Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 5. Функция ψ вида (18) удовлетворяет уравнению $\mathcal{D}\psi = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{D}_k\varphi = 0, \quad (19)$$

где

$$\mathcal{D}_k = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & \pi(k_2 + ik_1) \\ \pi(k_2 - ik_1) & U \end{pmatrix}.$$

Выберем постоянную C так, чтобы оператор

$$\mathcal{A} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \right]$$

был обратим на $L_2(\mathbb{C}/\Lambda)$. В этом случае уравнение (19) имеет решения из $L_2(\mathbb{C}/\Lambda)$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\left[1 + \begin{pmatrix} U - C & \pi(k_2 + ik_1) \\ \pi(k_2 - ik_1) & U - C \end{pmatrix} \mathcal{A}^{-1} \right] \xi = 0 \quad (20)$$

разрешимо в $L_2(\mathbb{C}/\Lambda)$. Так как оператор $\mathcal{A}^{-1}$ повышает гладкость, то по теореме вложения Соболева он компактен. Поскольку U непрерывна, оператор умножения на

$$\begin{pmatrix} U - C & \pi(k_2 + ik_1) \\ \pi(k_2 - ik_1) & U - C \end{pmatrix}$$

ограничен. Следовательно, верна

ЛЕММА 6. *Пучок операторов*

$$\mathcal{D}_k \circ \mathcal{A}^{-1} - 1 = \begin{pmatrix} U - C & \pi(k_2 + ik_1) \\ \pi(k_2 - ik_1) & U - C \end{pmatrix} \mathcal{A}^{-1} \quad (21)$$

полиномиален по k_1 и k_2 и состоит из компактных операторов из $L_2(\mathbb{C}/\Lambda)$ в $L_2(\mathbb{C}/\Lambda)$.

Теперь с использованием полиномиальной альтернативы Фредгольма [8] мы получаем такой результат:

ТЕОРЕМА 3. *Существует аналитическое подмножество $\Gamma_U \subset \mathbb{C}^2$ положительной коразмерности, такое, что уравнение (20) разрешимо в $L_2(\mathbb{C}/\Lambda)$ тогда и только тогда, когда $(k_1, k_2) \in \Gamma_U$.*

Это подмножество называется (нулевым) спектром Флоке оператора $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По теореме Келдыша [8], если A_μ — полиномиальный по $\mu \in \mathbb{C}^n$ пучок компактных операторов, то множество таких μ , что уравнение $(1 + A_\mu)\xi = 0$ разрешимо, образует аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$.

Докажем, что это подмножество имеет положительную коразмерность. Пусть $k_1 = 0$. При $|k_2| \rightarrow \infty$ влияние ограниченного потенциала становится пренебрежительно малым и в пределе (19) вырождается в

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \pi k_2 \\ \pi k_2 & 0 \end{pmatrix} \right) \xi = 0.$$

Методами теории возмущений из последнего уравнения выводится, что существует k_2 (с достаточно большим $|k_2|$), для которого (19) неразрешимо в $L_2(\mathbb{C}/\Lambda)$. Теорема 3 доказана.

Более глубокие аналитические свойства спектра Флоке (представление его в виде множества нулей целой функции) могут быть получены методами [12].

Из (18) следует, что Γ_U инвариантен относительно действия двойственной решетки Λ^* :

$$k_1 \rightarrow k_1 + \operatorname{Re} \gamma^*, \quad k_2 \rightarrow k_2 + \operatorname{Im} \gamma^*, \quad \gamma^* \in \Lambda^*. \quad (22)$$

Напомним, что Λ^* состоит из $\gamma^* \in \mathbb{C}$, таких, что $(\gamma, \gamma^*) = \operatorname{Re} \gamma \cdot \operatorname{Re} \gamma^* + \operatorname{Im} \gamma \cdot \operatorname{Im} \gamma^* \in \mathbb{Z}$ для всех $\gamma \in \Lambda$. Также ясно, что определение Γ_U не зависит от выбора конформного параметра z на торе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Комплексная поверхность W_Σ , определенная как факторпространство спектра Флоке Γ_U по действию (22), называется *спектром Вейерштрасса тора Σ* . Род нормализации поверхности W_Σ называется *спектральным родом тора Σ* .

Этот спектр был введен автором, указавшим на его связь с функционалом Уиллмора, интегралом от квадрата средней кривизны, как простейшим интегралом Крускала. Для торов вращения это было детально проанализировано в [17].

Более эффективное определение спектра Флоке для многомерных операторов дается теорией возмущений. Для оператора Шрёдингера и для $\partial_y - \partial_x^2$ это было сделано Кричевером (см. [11], где подход к определению спектральных кривых с помощью теоремы Келдыша был тоже отмечен со ссылкой на нашу неопубликованную работу).

Функционал Уиллмора $\mathcal{W}$ конформно инвариантен в следующем смысле. Пусть $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — конформное преобразование, сохраняющее замкнутую поверхность Σ в компактной области. Тогда $\mathcal{W}(\Sigma) = \mathcal{W}(g(\Sigma))$. Автор предположил, что весь спектр Вейерштрасса конформно инвариантен в этом смысле. Довольно скоро после ее постановки два различных доказательства этой гипотезы были получены Пинкаллем, использовавшим методы [7], и Гриневичем и Шмидтом [5].

Связь спектра Вейерштрасса со спектральными кривыми специальных солитонных торов [6, 14] будет обсуждена отдельно.

§4. Конечнозонные плоскости и торы

В двух следующих параграфах мы иногда даем только наброски доказательств, которые привычны для конечнозонной теории. Кроме того, для одномерного предела (2) вывод тэта-функциональных формул изложен в [15], а симметрии Γ обсуждаются в [2].

Рассмотрим более общий оператор

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где U и V периодичны по отношению к решетке ранга два $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Для этого оператора выполняется аналог теоремы 3, и L называется конечнозонным (на нулевом уровне энергии), если нормализация его нулевого спектра Флоке является компактной римановой поверхностью с двумя удаленными точками. Но мы называем L конечнозонным, если он имеет вид, описанный в следующей теореме²:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Γ — компактная риманова поверхность рода g , $\infty_\pm$ — пара различных точек на ней, $k_\pm^{-1}$ — локальные параметры в их окрестностях, такие, что $k_\pm^{-1}(\infty_\pm) = 0$, и D — неспециальный эффективный дивизор степени $g + 1$ на $\Gamma \setminus \{\infty_\pm\}$, т. е. $D = P_1 + \dots + P_{g+1}$, где $P_i \in \Gamma \setminus \{\infty_\pm\}$. Тогда

²Ясно, что эквивалентность этих определений для гладких потенциалов может быть обоснована с помощью теории возмущений [11].

1. Существует единственная вектор-функция $\psi(z, \bar{z}, P) = (\psi_1, \psi_2)$, где $z \in \mathbb{C}$, такая, что ψ мероморфна по P на $\Gamma \setminus \{\infty_{\pm}\}$ и имеет полюсы только в D ,

$$\psi = \exp(k_+ z) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11}^+ / k_+ \\ \xi_{21}^+ / k_+ \end{pmatrix} + O(k_+^{-2}) \right] \quad \text{при } P \rightarrow \infty_+, \quad (24)$$

$$\psi = \exp(k_- \bar{z}) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11}^- / k_- \\ \xi_{21}^- / k_- \end{pmatrix} + O(k_-^{-2}) \right] \quad \text{при } P \rightarrow \infty_-. \quad (25)$$

2. Существует единственный оператор L вида (23), такой, что $L\psi = 0$. Его потенциалы имеют вид

$$U = -\xi_{21}^+, \quad V = \xi_{11}^-. \quad (26)$$

Это предложение — частный случай общей теоремы о единственности функции Бейкера–Ахиезера [10].

В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости, мы ограничимся случаем, когда Γ не имеет сингулярных точек. Хотя в геометрии поверхностей важен случай, когда Γ имеет двойные точки (например, тор Клиффорда [17]), он получается в пределе из рассмотренных ниже.

Выберем базис $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ в $H_1(\Gamma)$ с формой пересечения $\alpha_j \circ \beta_k = \delta_{jk}$, $\alpha_j \circ \alpha_k = \beta_j \circ \beta_k = 0$. Этому базису соответствует единственный базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \dots, \omega_g$, нормированных условием $\int_{\alpha_k} \omega_j = \delta_{jk}$. Определим матрицу периодов Ω и тэта-функцию поверхности Γ :

$$\Omega_{jk} = \int_{\beta_k} \omega_j, \quad \vartheta(u) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i ((\Omega N, N) + 2(N, u))\},$$

где $u \in \mathbb{C}^g$. Зафиксировав точку $P_0 \in \Gamma \setminus \{\infty_{\pm}\}$, определим отображение Абеля $A(P) = (\int_{P_0}^P \alpha_1, \dots, \int_{P_0}^P \alpha_g)$ из поверхности Γ в ее многообразие Якоби $J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{M + \Omega N : M, N \in \mathbb{Z}^g\}$.

Обозначим через $\eta_l^{\pm}$ единственный мероморфный дифференциал, имеющий единственный полюс в $\infty_{\pm}$ с лорановской частью $dk_{\pm}^l$ и нормированный условием $\int_{\alpha_j} \eta_l^{\pm} = 0$ при $j = 1, \dots, g$. Каждому $\eta_l^{\pm}$ соответствует вектор β -периодов $(U_l^{\pm})^j = (2\pi i)^{-1} \int_{\beta_j} \eta_l^{\pm}$.

Существуют эффективные дивизоры $Q_1 + \dots + Q_g$ и $R_1 + \dots + R_g$, такие, что выполняются линейные эквивалентности

$$D = P_1 + \dots + P_{g+1} \sim Q_1 + \dots + Q_g + \infty_- \sim R_1 + \dots + R_g + \infty_+.$$

Положим $Q_{g+1} = \infty_-$ и $R_{g+1} = \infty_+$ и обозначим $A(Q_1) + \dots + A(Q_g)$ и $A(R_1) + \dots + A(R_g)$ через $A(Q)$ и $A(R)$ соответственно.

Обозначим через δ вектор римановых констант, определяемый следующим образом: для точки общего положения $u \in J(\Gamma)$ многозначная функция $\vartheta(A(P) - u)$ имеет нули в точности в g точках $S_1, \dots, S_g$, таких, что $u + \delta = A(S_1) + \dots + A(S_g)$. Мы также выберем ε , нечетный полупериод функции ϑ , т.е. $\vartheta(\varepsilon) = 0$ и $2\varepsilon \equiv 0$ на $J(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Функция ψ из предложения 1 имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1(z, \bar{z}, P) &= \exp \left(z \left(\int_{P_0}^P \eta_1^+ - a_1^+ \right) + \bar{z} \left(\int_{P_0}^P \eta_1^- - b_1^- \right) \right) \\ &\quad \times \frac{\vartheta(A(P) + F_1(z, \bar{z}))}{\vartheta(A(P) + \delta - A(Q))} \cdot \frac{\vartheta(A(\infty_+) + \delta - A(Q))}{\vartheta(A(\infty_+) + F_1(z, \bar{z}))} \\ &\quad \times \frac{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(P) - A(Q_j)) \cdot \vartheta(\varepsilon + A(\infty_+) - A(P_j))}{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(P) - A(P_j)) \cdot \vartheta(\varepsilon + A(\infty_+) - A(Q_j))}, \\ \psi_2(z, \bar{z}, P) &= \exp \left(z \left(\int_{P_0}^P \eta_1^+ - b_1^+ \right) + \bar{z} \left(\int_{P_0}^P \eta_1^- - a_1^- \right) \right) \\ &\quad \times \frac{\vartheta(A(P) + F_2(z, \bar{z}))}{\vartheta(A(P) + \delta - A(R))} \cdot \frac{\vartheta(A(\infty_-) + \delta - A(R))}{\vartheta(A(\infty_-) + F_2(z, \bar{z}))} \\ &\quad \times \frac{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(P) - A(R_j)) \cdot \vartheta(\varepsilon + A(\infty_-) - A(P_j))}{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(P) - A(P_j)) \cdot \vartheta(\varepsilon + A(\infty_-) - A(R_j))},\end{aligned}$$

где постоянные $a_1^\pm$ и $b_1^\pm$ определяются условиями

$$\begin{aligned}\int_{P_0}^P \eta_1^\pm - a_1^\pm &= k_\pm + O(k_\pm^{-1}) \quad \text{около } \infty_\pm, \\ \int_{P_0}^P \eta_1^\pm - b_1^\pm &= O(k_\mp^{-1}) \quad \text{около } \infty_\mp\end{aligned}\tag{27}$$

и

$$F_1(z, \bar{z}) = U_1^+ z + U_1^- \bar{z} + \delta - A(Q), \quad F_2(z, \bar{z}) = U_1^+ z + U_1^- \bar{z} + \delta - A(R).$$

Потенциалы U и V имеют вид

$$U = c_1 \exp(z(a_1^+ - b_1^+) + \bar{z}(b_1^- - a_1^-)) \frac{\vartheta(A(\infty_+) + F_2(z, \bar{z}))}{\vartheta(A(\infty_-) + F_2(z, \bar{z}))},\tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}c_1 &= - \frac{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(\infty_-) - A(P_j))}{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(\infty_+) - A(P_j)) \cdot \vartheta(\varepsilon + A(\infty_-) - A(R_j))} \\ &\quad \times \prod_{j=l}^g \vartheta(\varepsilon + A(\infty_+) - A(R_l)) \cdot \sum (U_1^+)^m \frac{\partial \vartheta(\varepsilon)}{\partial u^m},\end{aligned}$$

и

$$V = c_2 \exp(z(b_1^+ - a_1^+) + \bar{z}(a_1^- - b_1^-)) \frac{\vartheta(A(\infty_-) + F_1(z, \bar{z}))}{\vartheta(A(\infty_+) + F_1(z, \bar{z}))},\tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(\infty_+) - A(P_j))}{\prod^{g+1} \vartheta(\varepsilon + A(\infty_-) - A(P_j)) \cdot \vartheta(\varepsilon + A(\infty_+) - A(Q_j))} \\ &\quad \times \prod_{j=l}^g \vartheta(\varepsilon + A(\infty_-) - A(Q_l)) \cdot \sum (U_1^-)^m \frac{\partial \vartheta(\varepsilon)}{\partial u^m}.\end{aligned}$$

Здесь мы предполагаем, что пути, соединяющие P_0 и малые окрестности бесконечностей, и пути, входящие в определение $A(P)$ и $A(\infty_{\pm})$ — одни и те же и для некоторых их гомотопических классов выполняются разложения (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Формулы для ψ проверяются с помощью периодических свойств тэта-функций и теоремы Римана о нулях тэта-функций [4].

Выведем (28) и (29). Например, около ∞_- функция ψ_1 разлагается в произведение $\vartheta(\varepsilon + A(P) - A(\infty_-)) \cdot H(z, \bar{z}, P) \cdot \exp(k_- \bar{z})$ и известно, что $\partial A(P)/\partial k_-^{-1} = U_1^-$ в ∞_- . Следовательно $\xi_{11}^- = H(z, \bar{z}, \infty_-) \cdot \sum (U_1^-)^j \partial \vartheta(\varepsilon)/\partial w^j$.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть спектральные данные $(\Gamma, \infty_{\pm}, k_{\pm}, D)$ конечно-зонного оператора L вида (23) (см. предложение 1) удовлетворяют следующим условиям:

(i) существует голоморфная инволюция $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, такая, что $\sigma(\infty_{\pm}) = \infty_{\pm}$, $\sigma(k_{\pm}) = -k_{\pm}$ и существует мероморфный дифференциал ω на Γ с нулями в $D + \sigma(D)$ и двумя полюсами в $\infty_{\pm}$ с главными частями $(\pm k_{\pm}^2 + O(k_{\pm}^{-1})) dk_{\pm}^{-1}$;

(ii) существует антиголоморфная инволюция $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma$, такая, что $\tau(\infty_{\pm}) = \infty_{\mp}$, $\tau(k_{\pm}) = -\bar{k}_{\mp}$ и существует мероморфный дифференциал $\tilde{\omega}$ на Γ с нулями в $D + \tau(D)$ и двумя полюсами в $\infty_{\pm}$ с главными частями $(k_{\pm}^2 + O(k_{\pm}^{-1})) dk_{\pm}^{-1}$.

Тогда L имеет вид (2) с вещественным потенциалом U , т. е. $U = V = \bar{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем мероморфный дифференциал $\psi_1(P)\psi_2(\sigma(P))\omega$ с полюсами только в $\infty_{\pm}$. Сумма его вычетов равна $\xi_{21}^+ + \xi_{11}^-$. Так как она равна нулю, то, согласно (26), это влечет за собой равенство $U = V$.

Теперь рассмотрим дифференциалы $\psi_1(P)\overline{\psi_1(\tau(P))}\tilde{\omega}$ и $\psi_2(P)\overline{\psi_2(\tau(P))}\tilde{\omega}$ и, вычисляя, как выше, суммы их вычетов, заключаем, что $U = \bar{U}$ и $V = \bar{V}$.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) Пусть спектральные данные $(\Gamma, \infty_{\pm}, k_{\pm}, D)$ удовлетворяют условиям предложения 3; тогда для любых n точек $Q_1, \dots, Q_n \in \Gamma \setminus \{\infty_{\pm}, P_1, \dots, P_g\}$ и любых n постоянных $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ вектор-функция $\psi(z, \bar{z}) = a_1\psi(z, \bar{z}, Q_1) + \dots + a_n\psi(z, \bar{z}, Q_n)$ определяет по формулам (3) поверхность, погруженную в $\mathbb{R}^3$.

2) Если $\psi(z + \gamma) = \pm\psi(z)$ для $z \in \mathbb{C}$ и $\gamma \in \Lambda$, где $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — решетка ранга два в $\mathbb{C}$, то это погружение сворачивается в погружение тора $\mathbb{C}/\Lambda$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{C}/\Lambda} \psi_1^2 dz \wedge d\bar{z} = \int_{\mathbb{C}/\Lambda} \psi_2^2 dz \wedge d\bar{z} = \int_{\mathbb{C}/\Lambda} \psi_1 \bar{\psi}_2 dz \wedge d\bar{z} = 0. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Второе утверждение достаточно ясно для торов вращения [17] и было распространено на общий случай М. Шмидтом.

Пусть (γ_1, γ_2) — положительно ориентированный базис решетки Λ . Согласно (3), $X^1 + iX^2 = i \int (\bar{\psi}_2^2 dz - \bar{\psi}_1^2 d\bar{z})$. Мы также имеем

$$\begin{aligned} d(x(\bar{\psi}_2^2 dz - \bar{\psi}_1^2 d\bar{z})) &= i(\bar{\psi}_1^2 + \bar{\psi}_2^2) dx \wedge dy, \\ d(y(\bar{\psi}_2^2 dz - \bar{\psi}_1^2 d\bar{z})) &= (\bar{\psi}_1^2 - \bar{\psi}_2^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Из теоремы Стокса следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}/\Lambda} (\bar{\psi}_1^2 + \bar{\psi}_2^2) dz' \wedge d\bar{z}' &= -2 \left(\operatorname{Re} \gamma_1 \int_z^{z+\gamma_2} \tau - \operatorname{Re} \gamma_2 \int_z^{z+\gamma_1} \tau \right), \\ \int_{\mathbb{C}/\Lambda} (\bar{\psi}_1^2 - \bar{\psi}_2^2) dz' \wedge d\bar{z}' &= 2i \left(\operatorname{Im} \gamma_1 \int_z^{z+\gamma_2} \tau - \operatorname{Im} \gamma_2 \int_z^{z+\gamma_1} \tau \right), \end{aligned}$$

где $\tau = \bar{\psi}_2^2 dz' - \bar{\psi}_1^2 d\bar{z}'$. Следовательно, $X^1 + iX^2$ периодична относительно Λ , если и только если первые два равенства из (30) выполняются. Эквивалентность последнего Λ -периодичности X^3 доказывается аналогично. Предложение доказано³.

Конечнозонные потенциалы могут быть выписаны в терминах тэта-функций Прима накрытия $\Gamma \rightarrow \Gamma/\sigma$, как и в случае двумерного оператора Шрёдингера [19, 20], но, в отличие от этого случая, мы не можем утверждать, что инволюция σ имеет только две гладкие неподвижные точки.

§5. Функционал Уиллмора

Следующая гипотеза Уиллмора широко известна:

для торов, погруженных в $\mathbb{R}^3$, минимум функционала Уиллмора

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} H^2 d\mu,$$

где $d\mu$ — индуцированная мера Лиувилля, равен $2\pi^2$ и достигается на торе Клиффорда и его образах под действием конформных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$.

Тор Клиффорда получается вращением окружности радиуса 1 вокруг оси, лежащей в той же плоскости, что и окружность, и отстоящей от окружности на расстояние $\sqrt{2}$.

К настоящему времени эта гипотеза доказана только в некоторых частных случаях (см. обзор их в [16]).

Согласно (4), для тора $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ простейший интеграл Крускала

$$4 \int_{\mathbb{C}/\Lambda} U^2(z, \bar{z}) dx dy,$$

³ Построенные поверхности могут иметь сингулярности, которые находятся в точности в тех точках, где $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 0$. Для C^2 -регулярных поверхностей условия периодичности (30) достаточно наглядны, так как, согласно (7) и (8), $\psi_1^2 = -\partial(X^2 + iX^1)$, $\psi_2^2 = \bar{\partial}(X^2 + iX^1)$ и $\psi_1\bar{\psi}_2 = \partial X^3$ всюду.

где $U: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ — потенциал его представления Вейерштрасса, совпадает с $\mathcal{W}(\Sigma)$ [16]. Это ведет к гипотезе, что

для фиксированных конформных классов торов минимумы функционала $\mathcal{W}$ достигаются на торах наименьшего спектрального радиуса.

Это соответствует гипотезе Уиллмора, так как спектральный род тора Клиффорда равен нулю (это выводится из его представления Вейерштрасса, найденного в [17]).

Представление Вейерштрасса дает физическое объяснение для нижних границ функционала $\mathcal{W}$: дело в том, что для малых возмущений нулевого потенциала $U = 0$ плоскости вида (3) не сворачиваются в торы и, так как для U функционал Уиллмора является квадратом его L_2 -нормы, нижняя оценка показывает, насколько большим должно быть возмущение, чтобы плоскости свернулись в торы.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Часть этой работы была проделана во время пребывания автора в IHES (январь 1997 г.). Автор благодарит П. Гриневича, У. Пинкалля и М. Шмидта за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bobenko A. Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases. In: Harmonic maps and integrable systems, Aspects Math. E23, Vieweg, 1994, pp. 83–127.
2. Дубровин Б. А. Матричные конечнозонные операторы. Итоги науки и техники, Современ. проблемы математики. Новейшие достижения, т. 23, 1983, с. 33–78.
3. Eisenhart L. P. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. Dover, New York, 1909.
4. Fay J. Theta functions on Riemann surfaces. Lect. Notes in Math., Vol. 352, Springer-Verlag, 1973.
5. Grinevich P., Schmidt M. U. Conformal invariant functionals on tori in $\mathbb{R}^3$. Готовится к печати в J. Geom. Phys.
6. Hitchin N. Harmonic maps from a 2-torus into the 3-sphere. J. Differential Geom., **31**, 627–710 (1990).
7. Kamberov G., Pedit F., Pinkall U. Bonnet pairs and isothermic surfaces. Готовится к печати в Duke Math. J.
8. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН, **77**, 11–14 (1951).
9. Konopelchenko B. G. Induced surfaces and their integrable dynamics. Stud. Appl. Math., **96**, 9–52 (1996).
10. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. УМН, **32**, вып. 6, 183–206 (1977).
11. Кричевер И. М. Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения. УМН, **44**, вып. 2, 121–184 (1989).
12. Кучмент П. А. Теория Флоке для уравнений в частных производных. УМН, **37**, вып. 4, 3–52 (1982).
13. Milnor J. Morse Theory. Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, 1963.
14. Pinkall U., Sterling I. On the classification of constant mean curvature tori. Ann. of Math., **130**, 407–451 (1989).
15. Previato E. Hyperelliptic quasi-periodic and soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation. Duke Math. J., **52**, 329–377 (1985).

16. *Taimanov I. A.* Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces. In: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 179, 1997, pp. 133–151.
17. *Taimanov I. A.* Surfaces of revolution in terms of solitons. Ann. Global Anal. Geom., **15**, 419–435 (1997).
18. *Тайманов И. А.* Глобальное представление Вейерштрасса и его спектр. УМН, **52**, вып. 6, 187–188 (1997).
19. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы. ДАН, **279**, 784–788 (1984).
20. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Точные формулы и эволюционные уравнения. ДАН, **279**, 20–24 (1984).

Институт математики СО РАН, Новосибирск
e-mail: taimanov@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
30 декабря 1997 г.