Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Тиморин, Смешанные билинейные соотношения Ходжа–Римана в линейном контексте, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 63–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:00:10

УДК 512.647+514.177+515.165.4

Смешанные билинейные соотношения Ходжа–Римана в линейном контексте*

© 1998. В. А. ТИМОРИН

0. Введение. Неравенства Александрова–Фенхеля в теории смешанных объемов [1] представляют собой далекое обобщение изопериметрического неравенства. Содержателен уже линейный вариант этих неравенств, связывающий смешанные дискриминанты различных наборов положительно определенных квадратичных форм [2]. Например, с помощью неравенств на смешанные дискриминанты была решена старая проблема Ван дер Вардена о перманентах дважды стохастических матриц [3, 4]. Известно [5], что неравенства Александрова–Фенхеля тесно связаны с так называемыми соотношениями Ходжа–Римана в когомологиях компактных кэлеровых многообразий [6]. Точнее, они связаны с этими соотношениями лишь для когомологий типа $(1, 1)$. Теория гармонических форм сводит соотношения Ходжа–Римана к их линейному варианту. В статье обобщается линейный вариант соотношений Ходжа–Римана, а именно, строится их смешанный аналог. Для форм типа $(1, 1)$ этот смешанный аналог в точности эквивалентен неравенствам Александрова для смешанных дискриминантов.

Я благодарен А. Г. Хованскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

1. Соотношения Ходжа–Римана (линейный вариант). Пусть V — комплексное n -мерное пространство. Пространство $\Lambda^* = \Lambda^*(V^*)$ дифференциальных форм с постоянными коэффициентами на V (т. е. комплекснозначных вещественно-полилинейных антисимметрических функционалов) снабжено естественной биградуировкой:

$$\Lambda^* = \bigoplus_{p,q \leq n} \Lambda^{p,q},$$

где $\Lambda^{p,q}$ порождается произведениями p $\mathbb{C}$ -линейных и q $\mathbb{C}$ -антилинейных функционалов. Элементы пространства $\Lambda^{p,q}$ называются (p, q) -формами. Форма ω типа $(1, 1)$ называется положительной, если она совпадает с мнимой частью некоторой положительно определенной эрмитовой метрики, другими словами, если для каждого ненулевого вектора $\xi \in V$ выполняется неравенство

$$\omega(\xi, i\xi) > 0.$$

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-01-00455), INTAS (грант 93-570ext), а также программы «Соросовские студенты» (грант s97-1786).

Формой Ходжа–Римана на биоднородной компоненте $\Lambda^{p,q}$ называется полуторалинейная эрмитова симметрическая форма следующего вида:

$$Q_0(\alpha, \beta) = i^{p-q}(-1)^{(n-p-q)(n-p-q-1)/2} * (\alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \omega^{n-p-q}),$$

где $(1, 1)$ -форма ω положительна. Примитивным подпространством $P^{p,q}$ в $\Lambda^{p,q}$ относительно формы ω называется пространство таких форм α , для которых

$$\alpha \wedge \omega^{n-p-q+1} = 0.$$

ЛИНЕЙНЫЙ ВАРИАНТ БИЛИНЕЙНЫХ СООТНОШЕНИЙ ХОДЖА–РИМАНА. Форма Ходжа–Римана Q_0 положительно определена на примитивном подпространстве $P^{p,q}$.

2. Смешанные соотношения Ходжа–Римана в линейном контексте. Сформулируем обобщение билинейных соотношений Ходжа–Римана на случай нескольких положительных $(1, 1)$ -форм. Пусть теперь $\omega_1, \dots, \omega_{n-p-q}$, $\omega_{n-p-q+1}$ — положительные $(1, 1)$ -формы. Положим

$$\Omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-p-q}.$$

Определим смешанную форму Ходжа–Римана следующим образом:

$$Q(\alpha, \beta) = i^{p-q}(-1)^{(n-p-q)(n-p-q-1)/2} * (\alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \Omega).$$

Смешанное примитивное подпространство $P^{p,q}$ состоит в этом случае из таких форм α в $\Lambda^{p,q}$, для которых

$$\alpha \wedge \Omega \wedge \omega_{n-p-q+1} = 0.$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Смешанная форма Ходжа–Римана Q положительно определена на (смешанном) примитивном подпространстве $P^{p,q}$.

Сформулированное утверждение мы будем доказывать индукцией по размерности V . Основание индукции ($\dim V = 1$) очевидно, так что мы можем считать, что для пространств размерности $n - 1$ наше соотношение уже доказано. На каждом шаге индукции мы будем гомотопировать смешанную форму Ходжа–Римана к стандартной (разд. 6). При этом мы будем следить за тем, чтобы в ходе гомотопии наша форма ни разу не выродилась (разд. 5). Для доказательства невырожденности нам понадобится предложение из разд. 4, в котором используется предположение индукции.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сопоставим матрице $A = (a_{jk})$ $(1, 1)$ -форму

$$\hat{A} = \frac{i}{2} \sum_{j,k} a_{jk} dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

Смешанный дискриминант матриц $A_1, \dots, A_n$ в этом случае выражается как внешнее произведение соответствующих форм:

$$\det(A_1, \dots, A_n) = (-1)^{n(n-1)/2} * (\hat{A}_1 \wedge \dots \wedge \hat{A}_n).$$

Смешанные соотношения Ходжа–Римана для $(1, 1)$ -форм эквивалентны неравенствам Александрова на смешанные дискриминанты. Предлагаемое доказательство общих смешанных соотношений является непосредственным обобщением рассуждений Александрова [1, 2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Основная теорема сформулирована в препринте М. Громова [7] для случая (p, p) -форм и доказана для случая $(1, 1)$ -форм методом, отличным от метода Александрова. Мне неизвестно, каким образом рассуждения Громова можно перенести на общий случай.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в качестве Ω взять вместо произведения положительных $(1, 1)$ -форм линейную комбинацию с положительными коэффициентами таких произведений, то соотношения Ходжа–Римана перестают выполняться. Например, в $\mathbb{C}^4$ рассмотрим форму

$$\Omega = dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3 \wedge dx^4 \wedge dy^4.$$

(Мы воспользовались вещественными координатами $x^1, y^1, \dots, x^4, y^4$ в $\mathbb{C}^4$. Комплексные координаты $z^1, \dots, z^4$ выражаются через вещественные следующим образом: $z^j = x^j + iy^j$.)

Эта форма, хотя и не является положительной линейной комбинацией произведений положительных $(1, 1)$ -форм, может быть сделана таковой путем сколь угодно малого шевеления. Однако нетрудно проверить, что форма Ходжа–Римана, построенная по рассматриваемой форме Ω , имеет двукратное собственное значение 1 в стандартном базисе, в то время как соотношения Ходжа–Римана предписывают только одно положительное собственное значение.

3. Леммы. Докажем несколько простых лемм.

ЛЕММА 1. Пусть W — гиперплоскость, определяемая уравнением $\varphi(z) = 0$, где φ — комплексно-линейный функционал на V . Тогда для произвольной формы $\theta \in \Lambda^*$ имеет место равенство

$$\theta \wedge \varphi \wedge \overline{\varphi} = \pi^*(\theta|_W) \wedge \varphi \wedge \overline{\varphi},$$

где $\pi: V \rightarrow W$ — некоторая проекция, а $\theta|_W$ — ограничение формы θ на подпространство W .

Действительно, можно без ограничения общности считать, что $\varphi = dz^n$, а $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$. В этом случае лемма проверяется явным вычислением.

ЛЕММА 2. Пусть по-прежнему W — гиперплоскость, определяемая уравнением $\varphi(z) = 0$, где φ — комплексно-линейный функционал на V ,

$$\psi \in \Lambda^{n-1, n-1}(W^*), \quad *_W(\psi) > 0$$

(здесь $*_W$ — оператор «звездочка» для пространства W с эрмитовой метрикой, индуцированной из V). В этом случае

$$*\left(\frac{i}{2} \pi^*(\psi) \wedge \varphi \wedge \overline{\varphi}\right) > 0.$$

В самом деле, можно без ограничения общности считать, что $\varphi = dz^n$, $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$, а $\psi = \text{vol}(W) = (dx^1 \wedge dy^1) \wedge \dots \wedge (dx^{n-1} \wedge dy^{n-1})$. В этом случае $\frac{i}{2}\pi^*(\psi) \wedge \varphi \wedge \bar{\varphi} = \text{vol}(V) = (dx^1 \wedge dy^1) \wedge \dots \wedge (dx^n \wedge dy^n)$.

ЛЕММА 3. Пусть форма

$$\alpha \in \Lambda^{p,q}(V^*), \quad p + q < n,$$

обращается в нуль при ограничении на каждую из гиперплоскостей $W_1, \dots, W_n$ общего положения. Тогда $\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, можно без ограничения общности считать, что $W_j = \langle e_1, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_n \rangle$ («крышка» над элементом означает, что этот элемент в данной записи отсутствует). Запишем α в координатах следующим образом:

$$\alpha = \sum_{\#I=p, \#J=q} a_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда хотя бы один коэффициент $a_{I,J}$ отличен от нуля. Поскольку $\#I + \#J = p + q < n$, то найдется такой индекс j , который не лежит ни в I , ни в J . Но тогда в разложении формы $\alpha|_{W_j}$ встретится член $a_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$, что противоречит предположению $\alpha|_{W_j} = 0$ ($1 \leq j \leq n$).

4. Изоморфизм между $\Lambda^{p,q}$ и $\Lambda^{n-q,n-p}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Оператор умножения на Ω задает изоморфизм между $\Lambda^{p,q}$ и $\Lambda^{n-q,n-p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $p + q = n$ очевиден, поскольку тогда рассматриваемое отображение тождественное. Мы будем рассматривать случай $p + q < n$. Размерности указанных пространств совпадают, так что достаточно доказать инъективность описанного отображения. Для этого предположим, что

$$\alpha \wedge \Omega = 0 \quad \text{для некоторого } \alpha \in \Lambda^{p,q}. \quad (1)$$

По теореме о приведении эрмитовой метрики к главным осям справедливо разложение

$$\omega_{n-p-q} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \varphi^j \wedge \bar{\varphi}^j,$$

где φ^j — линейно независимые комплексно-линейные функционалы. Рассмотрим теперь гиперплоскости

$$W_j = \{\varphi^j = 0\}$$

и ограничим равенство (1) на каждую из них. В результате получим

$$\alpha|_{W_j} \wedge \omega_1|_{W_j} \wedge \dots \wedge \omega_{n-p-q}|_{W_j} = 0,$$

откуда следует, что $\alpha|_{W_j}$ является примитивной формой на W_j . Согласно предположению индукции,

$$C *_W (\alpha|_{W_j} \wedge \bar{\alpha}|_{W_j} \wedge \theta|_{W_j}) \geq 0, \quad (2)$$

где $\theta = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-p-q-1}$, а C — постоянный коэффициент, фигурирующий в соотношениях Ходжа–Римана. Согласно леммам 1 и 2,

$$C * (\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \theta \wedge \omega_{n-p-q}) = C * (\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-p-q}) \geq 0. \quad (3)$$

Неравенство (3) получается из неравенства (2) следующим образом: (2) умножается на $\frac{i}{2} \varphi^j \wedge \bar{\varphi}^j$, а потом суммируется по j . Но из (1) вытекает, что в (3) реализуется равенство. Стало быть, равенство достигается и во всех неравенствах (2). Но в силу предположения индукции смешанная форма Ходжа–Римана на W_j невырождена, а следовательно, $\alpha|_{W_j} = 0$ для всякого j . Согласно лемме 3, отсюда вытекает, что $\alpha = 0$. Тем самым предположение доказано.

5. Следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Форма Ходжа–Римана невырождена на $\Lambda^{p,q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить, что для всякого $\alpha \in \Lambda^{p,q}$ найдется такой элемент $\beta \in \Lambda^{p,q}$, что $\alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \Omega \neq 0$. Действительно, согласно предложению 6, элемент $\alpha \wedge \Omega$ отличен от нуля. Теперь достаточно положить

$$\beta = \overline{*(\alpha \wedge \Omega)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пространство $\Lambda^{p,q}$ разлагается в ортогональную прямую сумму*

$$\Lambda^{p,q} = P^{p,q} \oplus \perp \omega_{n-p-q+1} \wedge \Lambda^{p-1,q-1}$$

(ортогональность понимается в смысле билинейной формы Q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что имеет место разложение в указанную прямую сумму, вытекает непосредственно из предложения 1. Действительно, из этого предложения следует, что гомоморфизм умножения на элемент $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-p-q+1}$ является изоморфизмом в ограничении на пространство $\omega_{n-p-q+1} \wedge \Lambda^{p-1,q-1}$ (поскольку умножение на $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-p-q} \wedge \omega_{n-p-q+1}^2$ осуществляет изоморфизм $\Lambda^{p-1,q-1} \cong \Lambda^{n-q+1,n-p+1}$), а примитивное подпространство является ядром рассматриваемого гомоморфизма. Осталось установить ортогональность. Рассмотрим для этого по одному элементу из каждого прямого слагаемого:

$$\alpha \in P^{p,q}, \quad \omega_{n-p-q+1} \wedge \beta \in \omega_{n-p-q+1} \wedge \Lambda^{p-1,q-1}.$$

Тогда скалярное произведение этих элементов равно

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= C \alpha \wedge \overline{(\omega_{n-p-q+1} \wedge \beta)} \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-p-q} \\ &= C \bar{\beta} \wedge (\alpha \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-p-q+1}) = 0. \end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Размерность примитивного пространства равна*

$$\dim(P^{p,q}) = \dim(\Lambda^{p,q}) - \dim(\Lambda^{p-1,q-1}).$$

В частности, эта размерность не зависит от выбора положительных $(1, 1)$ -форм $\omega_1, \dots, \omega_{n-p-q}, \omega_{n-p-q+1}$.

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 2.

СЛЕДСТВИЕ 4. Форма Q невырождена в ограничении на примитивное подпространство $P^{p,q}$.

В самом деле, это следует из предложений 2 и 3.

6. Гомотопия. Рассмотрим семейство положительных $(1, 1)$ -форм

$$\omega_i^t = (1 - t)\omega_i + t\omega, \quad t \in [0, 1].$$

По нему получим семейство смешанных форм Ходжа–Римана. Каждая форма задается на собственном примитивном пространстве $P_t^{p,q}$. Как мы уже установили, все эти формы невырождены, а все примитивные пространства имеют одну и ту же размерность. В конечный момент $t = 1$ мы имеем положительно определенную форму (это соответствует обычным билинейным соотношениям Ходжа–Римана в линейной ситуации). Следовательно, и в начальный момент форма положительно определена, поскольку в течение всего пути она ни разу не вырождается. Таким образом, смешанные соотношения Ходжа–Римана в линейной ситуации доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения. Матем. сб., **2**, 1205–1238 (1937).
2. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы. Матем. сб., **3**, 227–251 (1938).
3. Егорычев Г. П. Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманентах. Сиб. матем. ж., **22**, вып. 6, 65–71 (1981).
4. Фаликман Д. И. Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманентах дважды стохастических матриц. Матем. заметки, **29**, вып. 6, 931–938 (1981).
5. Khovanskii A. G. Algebra and mixed volumes. In: Burago Y. D., Zalgaller V. A., Geometrical inequalities, Series of Geometry, Vol. 285, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1988, pp. 182–207.
6. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Мир, М., 1982.
7. Gromov M. Convex sets and Kahler manifolds. IHES/M/88/10 preprint, 1988.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
27 января 1998 г.