Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Пивоварчик, Теорема Амбарцумяна для краевой задачи Штурма–Лиувилля на звездообразном графе, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:29:08

$\widetilde{M}(\widehat{L}+0) > \widetilde{M}(\widehat{L}) (= \widehat{M}(\widehat{L}))$, что составляет лишь «незначительную часть» множества всех весомых продлений вправо (см. подстрочное примечание на предыдущей странице).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ledermann W., Reuter G. E.* Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **246**, 321 (1954).
2. *Karlin S., McGregor J.* Trans. Amer. Math. Soc., **85**, 489–546 (1957). 3. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Дополнение II к кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Мир, М., 1968. 4. *Кац И. С.* Укр. матем. ж., **46**, 155–176 (1994).
5. *Küchler U.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. (Kyoto Univ.), **16**, No. 1 (1980). 6. *Watanabe S.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **31**, 115–124 (1974/75). 7. *Kasahara Y.* Japan J. Math., **1**, 67–84 (1975). 8. *Крейн М. Г.* ДАН СССР, **87**, 881–884 (1952).
9. *Feller W. J.* Math. Pures Appl., **38**, 301–345 (1959).

Одесская национальная академия
пищевых технологий
e-mail: peka@osoft.odessa.ua

Поступило в редакцию
24 июля 2003 г.

УДК 517.5+517.43

Теорема Амбарцумяна для краевой задачи Штурма–Лиувилля на звездообразном графе

© 2005. В. Н. ПИВОВАРЧИК

Теорема Амбарцумяна [1] утверждает, что если спектр задачи Штурма–Лиувилля на интервале $[0, \pi]$ с вещественным потенциалом из $L_1(0, \pi)$ и краевыми условиями Неймана

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

совпадает с последовательностью $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$, где $\lambda_k = k^2$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то потенциал равен нулю почти всюду на $[0, \pi]$. Известно [2–4], что этот случай является исключительным и, вообще говоря, два спектра краевых задач однозначно определяют (почти всюду) потенциал. Различные обобщения теоремы Амбарцумяна можно найти в [5–7]. Мы будем рассматривать краевую задачу не на интервале, а на компактном графе. Задачи рассеяния и спектральные задачи на графах рассматривались во многих публикациях (см., например, [8, 9]). Менее изучены обратные спектральные задачи и обратные задачи рассеяния на графах [10–13]. Для обратных спектральных задач, порождаемых уравнением Штурма–Лиувилля на графах, известно, что один спектр, вообще говоря, не определяет однозначно потенциалы на ребрах графа (для звездообразного графа см. [12], для общего случая — [13]).

В настоящей статье рассмотрен исключительный случай, когда один спектр (точнее, даже часть его) краевой задачи на звездообразном графе однозначно определяет набор потенциалов на ребрах графа, что является аналогом теоремы Амбарцумяна. При доказательстве теорем мы используем метод работы [5] (см. также [3]).

Рассмотрим спектральную задачу

$$y_j'' + \lambda y_j - q_j(x)y_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1_j)$$

$$y_j'(\lambda, 0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2_j)$$

$$y_1(\lambda, a) = y_2(\lambda, a) = y_3(\lambda, a), \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^3 y_j'(\lambda, a) = 0, \quad (4)$$

где $q_j \in L_2(0, a)$ ($j = 1, 2, 3$) — вещественные функции. К такой задаче сводится с помощью преобразования Лиувилля краевая задача о малых поперечных колебаниях звездообразного графа, состоящего из трех неоднородных гладких струн, свободные концы которых могут без трения двигаться в направлении, перпендикулярном равновесному положению.

Обозначим через $c_j(\lambda, x)$ решение уравнения (1_j) , удовлетворяющее условиям $c_j(\lambda, 0) - 1 = c_j'(\lambda, 0) = 0$. Спектр σ задачи (1_j) , (2_j) , (3) , (4) , состоящий, очевидно, из нормальных собственных значений, совпадает с множеством корней функции

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^3 c_j'(\lambda, a) \prod_{j \neq p \in \{1, 2, 3\}} c_p(\lambda, a). \quad (5)$$

Если $q_j(x) \equiv 0$, то, делая подстановку $c_j(\lambda, a) = \cos \sqrt{\lambda}a$, $c_j'(\lambda, a) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a$ в (5) , получаем

$$\varphi(\lambda) = -3\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a \cos^2 \sqrt{\lambda}a.$$

Множество корней этой функции является объединением подпоследовательностей $\{\frac{\pi^2 k^2}{a^2}\}_0^\infty$ и $\{\frac{\pi^2}{a^2}(k - \frac{1}{2})^2\}_1^\infty$. Кратность (геометрическая) каждого собственного значения из первой подпоследовательности равна 1, а кратность (геометрическая) каждого собственного значения из второй подпоследовательности равна 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть 0 является наименьшим собственным значением задачи (1_j) , (2_j) , (3) , (4) , и пусть $\{\frac{\pi^2 m_k^2}{a^2}\}_{k=1}^\infty \subset \sigma$, где $\{m_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$.

Тогда $q_j(x) \stackrel{n.6.}{=} 0$ ($j = 1, 2, 3$) является единственной тройкой вещественных потенциалов из $L_2(0, a)$, для которых все элементы последовательности $\{0\} \cup \{\frac{\pi^2 m_k^2}{a^2}\}_{k=1}^\infty$ являются (простыми) собственными значениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [4]), что если $q_j(x) \in L_2(0, a)$, то

$$c_j(\sqrt{\lambda}, a) = \cos \sqrt{\lambda}a + K_j(a, a) \frac{\sin \sqrt{\lambda}a}{\sqrt{\lambda}} - \int_0^a K_{jt}(a, t) \frac{\cos \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt, \quad (6)$$

$$c_j'(\lambda, a) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a + K_j(a, a) \cos \sqrt{\lambda}a + \int_0^a K_{jx}(a, t) \cos \sqrt{\lambda}t dt, \quad (7)$$

где функции $K_j(x, t)$ имеют частные производные первого порядка $K_{jx}(x, t)$ и $K_{jt}(x, t)$, которые принадлежат пространству $L_2(0, a)$ как функции от t при фиксированном x , и $K_j(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q_j(t) dt$. Используя лемму 1.4.3 из [4] и

представления (6) и (7), получаем

$$c_j((\pi m_k a^{-1})^2, a) \underset{k \rightarrow \infty}{=} (-1)^{m_k} + o(m_k^{-1}), \quad (8)$$

$$c'_j((\pi m_k a^{-1})^2, a) \underset{k \rightarrow \infty}{=} (-1)^{m_k} K_j(a, a) + o(1). \quad (9)$$

Подставляя (6) и (7) в (5) и используя (8) и (9), получаем

$$0 \equiv \varphi((\pi m_k a^{-1})^2) \underset{k \rightarrow \infty}{=} (-1)^{m_k} \sum_1^3 K_j(a, a) + o(1). \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} \sum_1^3 \int_0^a q_j(x) dx = \sum_1^3 K_j(a, a) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим операторную трактовку задачи. Обозначим через A оператор, действующий в гильбертовом пространстве H , являющемся прямой суммой трех экземпляров пространства $L_2(0, a)$, по формулам

$$A\{y_j\}_1^3 = \{-y_j''(x) + q_j(x)y_j(x)\}_1^3,$$

причем

$$D(A) = \left\{ Y = \{y_j(x)\}_1^3 : y_j(x) \in L_2(0, a), -y_j''(x) + q_j(x) \in L_2(0, a), \right. \\ \left. y_j'(0) = 0 \ (j = 1, 2, 3), y_1(a) = y_2(a) = y_3(a), \sum_{j=1}^3 y_j'(a) = 0 \right\}.$$

Легко показать, что этот оператор является самосопряженным и его спектр, состоящий из нормальных собственных значений, совпадает с множеством корней функции $\varphi(\lambda)$. Поскольку наименьшее собственное значение равно 0, используя принцип минимакса, мы получаем

$$0 = \min_{\|Y\|=1} (AY, Y) = \min_{\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + \|y_3\|^2 = 1} \left(- \sum_1^3 \int_0^a y_j' \bar{y} dx + \sum_1^3 \int_0^a q_j(x) |y_j|^2 dx \right), \quad (12)$$

где $\|y_j\| = \int_0^a |y_j|^2 dx$. Подставляя $y_1 = y_2 = y_3 = C = \text{const} \neq 0$ в (12) и используя (11), получаем, что вектор $Y = (C, C, C)^t$ удовлетворяет уравнению $AY = 0$. Значит, $q_j \stackrel{\text{н.в.}}{=} 0$ ($j = 1, 2, 3$). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) 0 является наименьшим собственным значением задачи (1_j), (2_j), (3), (4);
- 2) $\left\{ \frac{\pi^2}{a^2} \left(m_k - \frac{1}{2} \right)^2 \right\}_{k=1}^\infty \subset \sigma$, где $\{m_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$;
- 3) кратность каждого собственного значения $\frac{\pi^2}{a^2} \left(m_k - \frac{1}{2} \right)^2$ больше 1.

Тогда

1) $q_j(x) \stackrel{\text{н.в.}}{=} 0$ ($j = 1, 2, 3$) является единственной тройкой вещественных потенциалов $q_j \in L_2(0, a)$, порождающей задачу (1_j), (2_j) ($j = 1, 2, 3$), (3), (4) с такими собственными значениями;

2) кратность каждого собственного значения $\frac{\pi^2}{a^2} \left(m_k - \frac{1}{2} \right)^2$ равна 2;

3) кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна 1.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Положим для краткости $\mu_k = \left(\frac{\pi m_k}{a} - \frac{\pi}{2a}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, $K_j = K_j(a, a)$ ($j = 1, 2, 3$) и

$$\tilde{K}_{js}(\lambda) = \int_0^a K_{js}(a, t) \cos \sqrt{\lambda} t \, dt \quad (j = 1, 2, 3), \quad s = x, t.$$

Используя представления (6) и (7), получаем

$$c_j(\mu_k, a) = (-1)^{m_k-1} K_j \mu_k^{-1/2} - \tilde{K}_{jt}(\mu_k) \mu_k^{-1/2}, \quad (13)$$

$$c'_j(\mu_k, a) = (-1)^{m_k} \mu_k^{1/2} + \tilde{K}_{jx}(\mu_k). \quad (14)$$

По лемме 1.4.3 из [4] следует, что

$$\tilde{K}_{jx}(\mu_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{K}_{jt}(\mu_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (15)$$

Легко видеть также, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{K}_{js}(\lambda) \right|_{\mu_k} = - \int_0^a K_{js}(a, t) t \sin \mu_k t \, dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad s = x, t. \quad (16)$$

Подставляя (13) и (14) в (5), получаем следующее тождество:

$$0 \equiv \varphi(\mu_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1)^{m_k} \mu_k^{-1/2} \sum_{1 \leq j < j' \leq 3} K_j K_{j'} + o(\mu_k^{-1/2}),$$

откуда вытекает, что $\sum_{1 \leq j < j' \leq 3} K_j(a, a) K_{j'}(a, a) = 0$. По условию теоремы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\cos \sqrt{\lambda} a} \equiv 0 \quad (17)$$

тождественно по $k \in \mathbb{N}$. Подставляя (6) и (7) в (5), используя тождество $\cos \sqrt{\mu_k} a = 0$ и принимая во внимание (13)–(16), из (17) получаем

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow \mu_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\cos \sqrt{\lambda} a} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -2(K_1 + K_2 + K_3).$$

Отсюда следует (11). Теперь, чтобы окончить доказательство, достаточно повторить аргументы из доказательства теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ambarzumian V.* Z. Phys., **53**, 690–695 (1929).
2. *Borg G.* Acta Math., **78**, 1–96 (1946).
3. *Левитан Б. М., Гасымов М. Г.* УМН, **19(2)**, 3–63 (1964).
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
5. *Кузнецов Н. В.* ДАН СССР, **146**, 1259–1262 (1962).
6. *Harrel E. M.* Amer. J. Math. **109** (5), 787–795 (1987).
7. *Chern H.-H., Shen C.-L.* Inverse Problems, **13**, 15–18 (1997).
8. *Erner P.* Lett. Math. Phys., **38**, 313–320 (1996).
9. *Melnikov Yu., Pavlov B.* J. Math. Phys., **42**, No. 3, 1202–1228 (2001).
10. *Герасименко Н. И.* Теор. матем. физ., **75**, No. 2, 187–200 (1988).
11. *Carlson R.* Trans. Amer. Math. Soc., **351**, No. 10, 4069–4088 (1999).
12. *Pivovarchik V.* SIAM J. Math. Anal., **32**, No. 4, 801–819 (2000).
13. *von Below J.* In: Partial Differential Equations on Multistructures, Lect. Notes Pure Math., Vol. 219, M. Dekker, NY, 2001, pp. 19–36.