Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Карабегов, Конструкция канонической следовой плотности деформационного квантования с разделением переменных, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 07:49:30

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nahm W.* Quantum field theories in one and two dimensions. *Duke Math. J.*, **54**, No. 2, 579–613 (1987).

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
11 июня 1997 г.

УДК 517.9

Конструкция канонической следовой плотности деформационного квантования с разделением переменных

© 1998. А. В. КАРАБЕГОВ

В данной заметке мы приводим явную конструкцию канонической следовой плотности (см. [1]) деформационного квантования с разделением переменных на псевдокэлеровом многообразии, введенного в [2].

1. Для данного векторного пространства V назовем формальными векторами элементы пространства $V[\nu^{-1}, \nu] = \{v = \sum_{j \geq k} \nu^j v_j \mid v_j \in V, k \in \mathbb{Z}\}$ формальных рядов Лорана от параметра ν . Так мы определяем поле формальных чисел $\mathcal{K} = \mathbb{C}[\nu^{-1}, \nu]$, формальные функции, формы и т. д.

Пусть M есть $2n$ -мерное симплектическое многообразие с симплектической формой ω_{-1} и соответствующей скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, U — произвольное открытое подмножество в M и $\mathcal{F}(U) = C^\infty(U)[\nu^{-1}, \nu]$, $\mathcal{F}_0(U) = C_0^\infty(U)[\nu^{-1}, \nu]$ — пространства формальных функций на U .

Пусть на $\mathcal{F}(M)$ определено ассоциативное, непрерывное в ν -адической топологии $\mathcal{K}$ -линейное умножение $\star$ ($\star$ -умножение), заданное на функциях $f, g \in C^\infty(M)$ формулой $f \star g = \sum_{r \geq 0} \nu^r C_r(f, g)$, где C_r , $r \geq 0$, суть билинейные дифференциальные по обоим аргументам операторы, такие, что $C_0(f, g) = fg$ и $C_1(f, g) - C_1(g, f) = i\{f, g\}$. Тогда говорят, что на M задано деформационное квантование (см. [3]).

Для любого открытого подмножества $U \subset M$ умножение $\star$ можно ограничить на U . Умножение на $\mathcal{F}(U)$ будем обозначать по-прежнему через $\star$.

Следовой плотностью умножения $\star$ на U называется гладкая формальная плотность $d\mu$ на U , такая, что для любых $f, g \in \mathcal{F}_0(U)$ выполняется соотношение $\int_U f \star g d\mu = \int_U g \star f d\mu$. Б. В. Федосов построил в [1] глобальную следовую плотность $d\mu_{\text{can}}$ умножения $\star$ на симплектическом многообразии (M, ω_{-1}) . Эта плотность, называемая канонической, играет важную роль в теоремах об индексе в деформационном квантовании. Старший член формального ряда $d\mu_{\text{can}}$ равен $(2\pi\nu)^{-n} \omega_{-1}^n / n!$.

Любая следовая плотность $d\mu$ на $U \subset M$ представима в виде $d\mu = \lambda d\mu_{\text{can}}$, где λ — локально постоянная формальная функция на U .

Известно, что на достаточно малой окрестности U любой точки многообразия M существует дифференцирование δ алгебры $(\mathcal{F}(U), \star)$ вида $\delta = \partial/\partial\nu + A$, где A — формальный дифференциальный оператор на U . Можно показать, что для любой формальной функции $f \in \mathcal{F}_0(U)$ выполняется соотношение $(d/d\nu) \int_U f d\mu_{\text{can}} = \int_U \delta(f) d\mu_{\text{can}}$.

Предположим теперь, что U связана и на ней задана ненулевая следовая плотность $d\mu = \lambda d\mu_{\text{can}}$ умножения $\star$. Тогда λ — ненулевая формальная константа, $\lambda \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, и для $f \in \mathcal{F}_0(U)$ выполняется соотношение $(d/d\nu) \int_U f d\mu - \int_U \delta(f) d\mu = (d\lambda/d\nu) \lambda^{-1} \int_U f d\mu$, откуда мы можем определить элемент λ с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно вычислить, приравнявая старшие члены формальных рядов $d\mu$ и $\lambda d\mu_{\text{can}}$. Таким образом по $d\mu$ можно восстановить каноническую следовую плотность умножения $\star$ на U , $d\mu_{\text{can}} = \lambda^{-1} d\mu$.

2. Пусть на M задано $\star$ -умножение $\star$. Для любого открытого подмножества $U \subset M$ и $f, g \in \mathcal{F}(U)$ обозначим через L_f оператор левого $\star$ -умножения на f и через R_g — оператор правого $\star$ -умножения на g в алгебре $(\mathcal{F}(U), \star)$, так что $L_f g = f \star g = R_g f$. Эти операторы формальные дифференциальные. Обозначим через $\mathcal{L}(U)$ и $\mathcal{R}(U)$ множества всех операторов левого и правого $\star$ -умножения на U соответственно.

Пусть теперь на M задана комплексная структура, для которой симплектическая форма ω_{-1} имеет тип $(1, 1)$, т.е. является псевдокэлеровой формой. Тогда (M, ω_{-1}) — псевдокэлерово многообразие. Деформационное квантование на (M, ω_{-1}) называется квантованием с разделением переменных, если на любом открытом подмножестве $U \subset M$ $\star$ -умножение на голоморфную функцию a слева и $\star$ -умножение на антиголоморфную функцию b справа совпадают с поточечным умножением на эти функции, $L_a = a$, $R_b = b$.

Деформационные квантования, полученные из виковского и антивиковского квантований на $\mathbb{C}^n$ и из квантования Березина в [4–7] асимптотическим разложением произведения символов по $\hbar \rightarrow 0$, являются квантованиями с разделением переменных (здесь имеется в виду «постоянная Планка» $\hbar$, входящая в определение квантования Березина).

В работе [2] показано, что деформационные квантования с разделением переменных находятся во взаимно однозначном соответствии с формальными деформациями псевдокэлеровой формы $(1/\nu)\omega_{-1}$, т.е. с формальными рядами $\omega = \sum_{r \geq -1} \nu^r \omega_r$, где ω_r , $r \geq 0$, — замкнутые $(1, 1)$ -формы. А именно, пусть на произвольной стягиваемой координатной окрестности $U \subset M$ с голоморфными координатами $\{z^1, \dots, z^n\}$ задан формальный потенциал Φ формы ω , т.е. $\omega = i\partial\bar{\partial}\Phi$. Множество операторов левого $\star$ -умножения $\mathcal{L}(U)$ состоит из формальных дифференциальных операторов на U , коммутирующих с операторами умножения на антиголоморфные функции и с операторами $\partial\Phi/\partial\bar{z}^l + \partial/\partial\bar{z}^l$. Зная $\mathcal{L}(U)$, легко восстановить $\star$ -умножение $\star$ на U по формуле $f \star g = L_f g$, $f, g \in \mathcal{F}(U)$.

Для данного деформационного квантования с разделением переменных на псевдокэлеровом многообразии (M, ω_{-1}) со $\star$ -умножением $\star$ существует единственный формальный дифференциальный оператор I на M , такой, что для любого открытого подмножества $U \subset M$, любой голоморфной функции

a и антиголоморфной функции b на U выполняется соотношение $I(ab) = b \star a$ (здесь имеется в виду ограничение I на U). Легко проверить, что $I = 1 + \nu\Delta + \dots$, где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами, отвечающий псевдокэлеровой метрике на (M, ω_{-1}) . В частности, I обратим. Можно показать, что для деформационных квантований, полученных из виковского квантования на $\mathbb{C}^n$ и из квантования Березина на орбитах компактной полупростой группы Ли, оператор I получается из асимптотического разложения по $\hbar \rightarrow 0$ преобразования Березина, отображающего контравариантные символы в соответствующие ковариантные (см. [8]). Естественнее назвать I формальным преобразованием Березина. Введем новое умножение $\tilde{\star}$ на $\mathcal{F}(M)$ формулой $f\tilde{\star}g = I^{-1}(Ig \star If)$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

ЛЕММА 1. Умножение $\tilde{\star}$ на $\mathcal{F}(M)$ определяет деформационное квантование с разделением переменных на псевдокэлеровой многообразии $(M, -\omega_{-1})$.

Обозначим через $\tilde{\omega}$ формальную деформацию псевдокэлеровой формы $(-1/\nu)\omega_{-1}$, отвечающую $\star$ -умножению $\tilde{\star}$.

ТЕОРЕМА 1. На любой стягиваемой координатной окрестности $U \subset M$ с голоморфными координатами $\{z^1, \dots, z^n\}$, на которой задан формальный потенциал Φ формы ω , существует формальный потенциал Ψ формы $\tilde{\omega}$, такой, что $I(\partial\Psi/\partial z^k) = -\partial\Phi/\partial z^k$ и $I(\partial\Psi/\partial \bar{z}^l) = -\partial\Phi/\partial \bar{z}^l$. Плотность $d\mu = \exp(\Phi + \Psi) dz^1 \dots dz^n d\bar{z}^1 \dots d\bar{z}^n$ является следовой плотностью умножения $\star$ на U .

ТЕОРЕМА 2 (см. [9]). На произвольном стягиваемом открытом подмножестве $U \subset M$, на котором задан формальный потенциал Φ формы ω , оператор $\delta = d/d\nu + d\Phi/d\nu - R_{d\Phi/d\nu}$ является дифференцированием в алгебре $(\mathcal{F}(U), \star)$.

В обозначениях теоремы 1 выразим на окрестности U каноническую следовую плотность $d\mu_{\text{can}}$ умножения $\star$ в виде $d\mu_{\text{can}} = \lambda^{-1}d\mu$ для $\lambda \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Пользуясь теоремами 1 и 2, можно показать, что λ определяется с точностью до постоянного множителя из уравнения $(d\lambda/d\nu)\lambda^{-1} = I(d\Psi/d\nu) + d\Phi/d\nu$. Этот множитель вычисляется, как в п. 1.

Автор хотел бы выразить свою глубокую благодарность Б. В. Федосову за стимулирующие беседы и рецензентам за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fedosov B. V. J. Diff. Geom., **40**, 213–238 (1994).
2. Karabegov A. V. Comm. Math. Phys., **180**, 745–755 (1996).
3. Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerovich A., Sternheimer D. Ann. Phys., **111**, 61–151 (1978).
4. Moreno C. Lett. Math. Phys., **11**, 361–372 (1986).
5. Moreno C. Lett. Math. Phys., **12**, 217–229 (1986).
6. Cahen M., Gutt S., Rawnsley J. Trans. Amer. Math. Soc., **337**, 73–98 (1993).
7. Cahen M., Gutt S., Rawnsley J. Lett. Math. Phys., **34**, 159–168 (1995).
8. Березин Ф. А. ДАН СССР, **241**, № 1, 15–17 (1978).
9. Karabegov A. V. Lett. Math. Phys., **43**, 347–357 (1998).