Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Зиглин, Об отсутствии вещественно-аналитического первого интеграла в некоторых задачах динамики, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa441>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:53:50

УДК 517.913

Об отсутствии вещественно-аналитического первого интеграла в некоторых задачах динамики

© 1997. С. Л. Зиглин

1. Формулировка результатов. В [1, 2] было доказано отсутствие дополнительного мероморфного первого интеграла (образующего с известными функционально независимую систему) в некоторых задачах динамики в комплексифицированном фазовом пространстве.

В настоящей работе доказывается отсутствие в этих задачах мероморфного (в частности, аналитического) первого интеграла и в вещественном фазовом пространстве. Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *В задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки общий дополнительный вещественно-мероморфный¹ первый интеграл существует только в известных случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, а частный (при нулевой постоянной площадей) — только в трех указанных выше случаях и в случае Горячева–Чаплыгина.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Для динамически несимметричного тела утверждение теоремы 1 следует из [3, 4]. Для задачи о движении динамически симметричного тяжелого твердого тела около неподвижной точки отсутствие дополнительного вещественно-аналитического первого интеграла (общего или частного) доказано в [5, 6] (см. также [7]) для случая, когда один из главных моментов инерции много меньше двух других (возмущенный сферический маятник), в [8, 9] (см. также [7, 10]) для возмущенного случая Лагранжа и в [11] для случая, когда центр тяжести лежит в экваториальной плоскости и отношение главных моментов инерции больше четырех.

ТЕОРЕМА 2. *Система Хенона–Хейлеса [12] не имеет дополнительного вещественно-мероморфного первого интеграла.*

ТЕОРЕМА 3. *В задаче Сулова [13] о движении твердого тела около неподвижной точки с неголономной связью, состоящей в том, что угловая скорость ортогональна направлению, неподвижному в системе координат, связанной с телом, в случае [14], когда указанное направление совпадает с направлением одной из главных осей инерции в точке подвеса, тело находится в однородном поле тяжести и центр тяжести лежит на указанной оси, дополнительный вещественно-мероморфный первый интеграл существует, только если тело динамически симметрично (аналог случая Лагранжа движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки без дополнительных связей).*

¹То есть представимый в окрестности любой точки в виде отношения вещественно-аналитических функций.

2. Некоторые используемые сведения. Будем использовать следующие определения из [15]. Пусть M — комплексное многообразие, v — аналитическое векторное поле на M и Γ — его комплексная фазовая кривая, не являющаяся положением равновесия.

Пусть f — аналитическая функция на M , постоянная на Γ . Будем обозначать через f' функцию на нормальном расслоении $N\Gamma = T_\Gamma M / T\Gamma$ кривой Γ в M , порожденную функцией df на $T_\Gamma M$. Очевидно, что f' линейна в слоях расслоения $N\Gamma$.

Пусть $H = (H_1, \dots, H_l)$, $l \geq 0$, — аналитические первые интегралы векторного поля v , такие, что их дифференциалы линейно независимы на Γ . Будем называть приведенным фазовым пространством системы в нормальных вариациях вдоль Γ поверхность уровня $N_p\Gamma = \{\xi \in N\Gamma \mid H'(\xi) = p\}$, $p \in \mathbb{C}^l$, ее первых интегралов, а приведенной системой в вариациях ограничение этой системы на указанную поверхность.

Очевидно, что $N_p\Gamma$ является голоморфным аффинным (при $p = 0$ векторным) расслоением над Γ , а приведенная система в вариациях линейна (при $p = 0$ однородна).

Группой монодромии линейной системы в голоморфном аффинном (векторном) расслоении над римановой поверхностью будем называть образ естественного антипредставления фундаментальной группы этой поверхности в какой-либо точке в группу аффинных (линейных) преобразований слоя над этой точкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [15]. Если дифференциальное уравнение, определяемое векторным полем v , имеет дополнительный мероморфный первый интеграл в некоторой области $U \subset M$, такой, что фундаментальная группа фазовой кривой Γ (в некоторой точке) представима петлями, лежащими в U , то группа монодромии приведенной системы в вариациях вдоль Γ при любом $p \in \mathbb{C}^l$ имеет дополнительный рациональный первый интеграл.

Будем использовать выражение «почти все» в смысле «все, кроме, может быть, счетного числа».

3. Доказательство теорем 1–3. Будем считать, что в задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки тело является динамически симметричным. Для динамически несимметричного тела, как указано выше, результат следует из [3, 4].

Для каждой из рассматриваемых систем в [1, 2] указано инвариантное двумерное комплексное вещественно-аналитическое многообразие $\widetilde{M}^2$, на котором система имеет вещественно-аналитический первый интеграл (энергии) и интегрируется в квадратурах. В [1, 2] указано однопараметрическое семейство Γ_k , $0 < k \leq 1$, комплексных фазовых кривых этой системы, не являющихся положениями равновесия, на которых дифференциалы известных первых интегралов $H = (H_1, \dots, H_l)$ линейно независимы, и имеет место следующее доказываемое ниже

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для почти всех k существует $p \in \mathbb{C}^l$, такое, что группа монодромии приведенной системы в вариациях вдоль фазовой кривой Γ_k на приведенном фазовом пространстве $N_p\Gamma_k = \{\xi \in N\Gamma_k \mid H'(\xi) = p\}$ ² не имеет рационального первого интеграла.

²Строго говоря, в обозначении операции $H \rightarrow H'$ следует указывать значение параметра k кривой Γ_k , но, чтобы не усложнять обозначений, условимся этого не делать.

Из предложения 1 и предложения, сформулированного в разд. 2, вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Ни одна из рассматриваемых систем не имеет дополнительного мероморфного первого интеграла ни в какой области U комплексифицированного фазового пространства, такой, что для более чем счетного числа значений k фундаментальная группа фазовой кривой Γ_k представима петлями, лежащими в U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Покажем, что для всех рассматриваемых систем, кроме задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки в случае Горячева–Чаплыгина, предложение 1 справедливо уже при $p = 0$.

Действительно, для системы Хенона–Хейлеса в [1] доказано, что искомый первый интеграл может существовать только при значениях параметра k , при которых собственные значения некоторого двумерного линейного симплектического преобразования, аналитически зависящего от k , не равные тождественно $\pm i$, равны $\pm i$. Очевидно, что число таких значений не более чем счетно.

Для задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки в случае, когда центр тяжести не лежит в экваториальной плоскости, в [1] доказано, что указанный первый интеграл не может существовать на всем интервале $0 < k < 1$, однако доказательство справедливо и для любого подмножества этого интервала, имеющего предельную точку, в частности, для любого более чем счетного подмножества.

Для задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки в случае, когда центр тяжести лежит в экваториальной плоскости, и для задачи Суслова из [1, 2] следует, что:

(I) Приведенная система в вариациях инвариантна относительно некоторого инволютивного диффеоморфизма, не имеющего неподвижных точек и линейного в слоях приведенного фазового пространства (порожденного инволютивным диффеоморфизмом исходного фазового пространства, явно выписанным в [1, 2]).

(II) Группа монодромии факторсистемы этой системы по действию указанного диффеоморфизма может иметь рациональный первый интеграл только при значениях параметра k , при которых собственные значения некоторого двумерного линейного симплектического преобразования, аналитически зависящего от k , не равные тождественно корням из единицы, равны корням из единицы. Ясно, что число таких значений не более чем счетно.

Так как очевидно, что линейная система в голоморфном векторном расслоении над римановой поверхностью имеет мероморфный первый интеграл тогда и только тогда, когда ее группа монодромии имеет рациональный первый интеграл, то из (II) следует, что

(III) При почти всех k указанная факторсистема не имеет мероморфного первого интеграла.

Из (I), (III), согласно лемме п. 1.5 из [15], следует, что при этих значениях k приведенная система в вариациях также не имеет мероморфного первого интеграла, а отсюда, в свою очередь, следует, что ее группа монодромии не имеет рационального первого интеграла, что и требовалось доказать.

Остается доказать предложение 1 для случая Горячева–Чаплыгина. В этом случае система Эйлера–Пуассона, описывающая движение тяжелого твердого

тела около неподвижной точки, при соответствующем выборе единиц измерения и направлений главных осей инерции в точке подвеса [1] имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= 3M_2M_3, & \dot{M}_2 &= -3M_1M_3 + \gamma_3, & \dot{M}_3 &= -\gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 &= 4M_3\gamma_2 - M_2\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= -4M_3\gamma_1 + M_1\gamma_3, & \dot{\gamma}_3 &= M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — кинетический момент тела и единичный вектор, направленный против силы тяжести, в проекциях на главные оси инерции в точке подвеса.

Будем рассматривать систему (1) в комплексифицированном фазовом пространстве $M^5 = \{x = (\vec{M}, \vec{\gamma}) \in \mathbb{C}^6 \mid \vec{\gamma}^2 = 1\}$. Она имеет функционально независимые «общие» первые интегралы:

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) + 2M_3^2 + \gamma_1$$

(энергии) и

$$P = \langle \vec{M}, \vec{\gamma} \rangle$$

(площадей), а на многообразии $M_0^4 = \{x \in M^5 \mid P(x) = 0\}$ — дополнительный «частный» первый интеграл

$$F = M_3(M_1^2 + M_2^2) - M_1\gamma_3.$$

Система (1) имеет инвариантное двумерное многообразие $\widetilde{M}^2 \subset M_0^4$, задаваемое в M^5 уравнениями $M_1 = M_3 = \gamma_2 = 0$.

На многообразии $\widetilde{M}^2$ она имеет однопараметрическое семейство решений $x = \tilde{x}(t, k)$, $0 < k \leq 1$, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} M_1 &= M_3 = \gamma_2 = 0, & M_2 &= \widetilde{M}_2(t, k) = -2k \operatorname{cn}(t, k), \\ \gamma_1 &= \tilde{\gamma}_1(t, k) = 2k^2 \operatorname{sn}^2(t, k) - 1, & \gamma_3 &= \tilde{\gamma}_3(t, k) = 2k \operatorname{sn}(t, k) \operatorname{dn}(t, k), \\ k &= \sqrt{(1+h)/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\operatorname{sn}(t, k)$, $\operatorname{cn}(t, k)$, $\operatorname{dn}(t, k)$ — эллиптические функции Якоби с модулем k , а h — постоянная интеграла энергии.

Эти решения однозначны, мероморфны, а при $0 < k < 1$, что далее и будет предполагаться, и двоякопериодичны по t с периодами $T_{1,2}(k) = 2K(k) \pm 2iK'(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k , $K'(k) = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, и имеют в ячейках по два полюса $a_{1,2}(k) = \pm iK'(k) \pmod{T_{1,2}(k)}$. Обозначим их фазовые кривые через Γ_k .

Приведенная система в вариациях вдоль фазовой кривой Γ_k на приведенном фазовом пространстве $N_p\Gamma_k = \{\xi \in N\Gamma_k \mid H'(\xi) = 0, P'(\xi) = p\}$, $p \in \mathbb{C}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{M}'_1 &= 3\widetilde{M}_2(t, k)M'_3, & \dot{M}'_3 &= -\gamma'_2, \\ \dot{\gamma}'_2 &= \tilde{\gamma}_3(t, k)M'_1 - 4\tilde{\gamma}_1(t, k)M'_3, & \tilde{\gamma}_1(t, k)M'_1 + \tilde{\gamma}_3(t, k)M'_3 + \widetilde{M}_2(t, k)\gamma'_2 &= p. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\alpha_{i,k}: [0, 1] \rightarrow \Gamma_k$ ($i = 1, 2$) — гладкие петли с общей отмеченной точкой, такие, что их поднятия $\beta_{i,k}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ относительно $\tilde{x}(\cdot, k)$ суть соответственно прямолинейный путь, такой, что $\beta_{1,k}(1) - \beta_{1,k}(0) = 4K(k)$, и петля, однократно обходящая полюс $a_1(k)$ решения $x = \tilde{x}(t, k)$ в положительном направлении, и пусть $g_{i,k,p}$ — соответствующие им преобразования монодромии.

Будем называть аффинное преобразование жордановым, если оно имеет неподвижную точку и матрица его линейной части является жордановой клеткой.

Собственными векторами и собственными значениями аффинного преобразования будем называть собственные векторы и собственные значения его линейной части.

Обозначим через $F'_{k,p}$ ограничение функции

$$F' = \widetilde{M}_2^2(t, k) M'_3 - \tilde{\gamma}_3(t, k) M'_1: N\Gamma_k \rightarrow \mathbb{C}$$

на слой приведенного фазового пространства $N_p\Gamma_k$ над точкой $\alpha_{i,k}(0)$.

ЛЕММА. Преобразование $g_{1,k,p}$ при почти всех k и всех p является жордановым с единичным собственным значением и собственным вектором, обращающим в нуль 1-форму $F'_{k,0}$, а преобразование $g_{2,k,p}$ при всех k и $p \neq 0$ — сдвигом на вектор, не обращающий в нуль эту 1-форму (а при $p = 0$ — тождественным преобразованием).

Из этой леммы следует (ср. [16, 17]) отсутствие рационального первого интеграла группы монодромии при почти всех k и всех $p \neq 0$. Действительно, он должен быть постоянным как на всех прямых, параллельных собственному вектору преобразования $g_{1,k,p}$, так и на всех прямых, параллельных вектору сдвига преобразования $g_{2,k,p}$, и, следовательно, тождественно постоянным, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. (А) *Случай $p = 0$.* При $p = 0$ система (3) имеет первый интеграл F' и интегрируется в квадратурах. Ее общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} M'_1 &= \widetilde{M}_2^3(t, k)(c + 3fJ(t, k)), \\ M'_3 &= \widetilde{M}_2(t, k)\tilde{\gamma}_3(t, k)(c + 3fJ(t, k)) + f\widetilde{M}_2^{-2}(t, k), \\ \gamma'_2 &= -(\widetilde{M}_2^2(t, k)\tilde{\gamma}_1(t, k) + \tilde{\gamma}_3^2(t, k))(c + 3fJ(t, k)) - f\widetilde{M}_2^{-3}(t, k)\tilde{\gamma}_3(t, k), \\ J(t, k) &= \int_{t_0(k)}^t \widetilde{M}_2^{-4}(\tau, k) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь c, f — произвольные постоянные, причем f — постоянная интеграла F' , $t_0: (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ — произвольная функция, такая, что $t_0(k) \neq b_{m,n}(k)$, где $b_{m,n}(k) = nK(k) + i(m + 2n - 1)K'(k)$ (m, n целые) — нули и полюсы функции $M_2 = \widetilde{M}_2(t, k)$; интеграл берется по любому кусочно-гладкому пути, не проходящему через точки $b_{m,n}(k)$.

Из формул (4) следует, что:

(I) Это решение однозначно, и, следовательно, $g_{2,k,0} = \text{id}$. Действительно, так как матрица правой части системы (3) имеет особенности только в полюсах решения $x = \tilde{x}(t, k)$, то ее решение (4) могло бы иметь ветвление только в этих

точках, но, как следует из (2), в этих точках подынтегральное выражение в интеграле $J(t, k)$ регулярно, и, следовательно, этот интеграл, а значит, и все решение (4) однозначны.

(II) При $f = 0$ это решение имеет период $4K(k)$ и, следовательно, преобразование $g_{1,k,0}$ имеет неподвижный вектор.

Для доказательства леммы в случае $p = 0$ остается проверить, что при $f \neq 0$ и почти всех k число $4K(k)$ не является периодом этого решения, и, следовательно, преобразование $g_{1,k,0}$ жорданово.

Пусть $\beta_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — прямолинейный путь, такой, что $\beta_k(1) - \beta_k(0) = 4K(k)$, $\text{Im } \beta_k(0) \neq nK'(k)$, n целое. Положим

$$\Delta(k) = J(\beta_k(1), k) - J(\beta_k(0), k).$$

Имеем

$$\Delta(k) = \int_{\beta_k} \widetilde{M}_2^{-4}(t, k) dt.$$

Переходя к новой переменной интегрирования θ по формулам $\tilde{\gamma}_1(t, k) = -\sin \theta$, $\tilde{\gamma}_3(t, k) = \cos \theta$ (θ при $0 \leq \theta < \pi$ совпадает с эйлеровым углом ну-тации), получаем

$$\Delta(k) = 2^{-5/2} \int_{\delta_k} (h + \sin \theta)^{-5/2} d\theta, \quad h = 2k^2 - 1,$$

где $\delta_k: [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbb{C}}^1$ — петля на комплексифицированной окружности $\mathbf{S}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ с угловой координатой $\theta \pmod{2\pi}$, однократно обходящая отрезок $I_k = [-\arcsin h, \pi + \arcsin h]$. Направление обхода и ветвь подынтегрального выражения связаны следующим образом: при стягивании петли δ_k к отрезку I_k вещественная часть подынтегрального выражения положительна на той стороне отрезка, на которой движение вдоль петли происходит в направлении увеличения $\text{Re } \theta$.

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{d^2}{dh^2} \int_{\delta_k} (h + \sin \theta)^{-1/2} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{d^2}{dh^2} \int_{-\arcsin h}^{\pi/2} (h + \sin \theta)^{-1/2} d\theta = \frac{4}{3} \frac{d^2}{dh^2} K(\sqrt{(1+h)/2}). \end{aligned}$$

Так как $K(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 1$, то $\Delta(k) \neq 0$ при почти всех h , а значит, и при почти всех k , что и требовалось доказать.

(Б) *Случай $p \neq 0$.* Поскольку при любых i, k, p линейная часть преобразования $g_{i,k,p}$ совпадает с $g_{i,k,0}$, для доказательства леммы остается проверить, что

(i) при почти всех k и всех p преобразование $g_{1,k,p}$ сохраняет линейную функцию $F'_{k,p}$;

(ii) при всех k и $p \neq 0$ преобразование $g_{2,k,p}$ не сохраняет эту функцию.

Действительно, из (А) и (i) следует, что при почти всех k и всех p преобразование $g_{1,k,p}$ имеет жорданову линейную часть и сохраняет прямые, параллельные ее собственному вектору. Отсюда следует, что оно имеет неподвижную точку и, значит, само является жордановым.

Из (А) и (ii) следует, что преобразование $g_{2,k,p}$ при всех k и $p \neq 0$ является сдвигом на вектор, не обращающий в нуль 1-форму $F'_{k,0}$. Утверждение доказано.

Обозначим через f_p функцию на фазовой кривой Γ_k , такую, что $f_p(x)$ равно значению производной $\dot{F}'$ функции F' в силу систем (1), (3) в слое приведенного фазового пространства $N_p\Gamma_k$ над точкой x (оно постоянно в этом слое, так как функция $\dot{F}'$ линейна в слоях нормального расслоения $N\Gamma_k$ и равна нулю на приведенном фазовом пространстве $N_0\Gamma_k$).

Полагая

$$\Delta_i(k, p) = F'_{k,p} \circ g_{i,k,p} - F'_{k,p}, \quad i = 1, 2,$$

имеем

$$\Delta_i(k, p) = \int_{\beta_{i,k}} f_p(\tilde{x}(t, k)) dt.$$

Из (1), (3), (2) получаем

$$f_p(\tilde{x}(t, k)) = -p\widetilde{M}_2(t, k) = 2p \operatorname{cn}(t, k),$$

откуда $\Delta_1(k, p) = 0$,

$$\Delta_2(k, p) = 4pk\pi i \operatorname{Res} \operatorname{cn}(iK'(k), k) = 4\pi p \neq 0$$

при $p \neq 0$. Лемма и предложение 1 доказаны.

Каждая из рассматриваемых систем имеет на многообразии $\widetilde{M}^2$ вещественную неподвижную гиперболическую точку x_0 . Вещественная часть фазовой кривой Γ_1 содержит компоненты, являющиеся вещественными фазовыми кривыми решений, стремящихся к x_0 при $t \rightarrow \pm\infty$. (Для системы Хенона–Хейлеса такая компонента одна, а для остальных рассматриваемых систем таких компонент две, и их объединение совпадает с $\operatorname{Re}\Gamma_1$.) Обозначим через Ω замыкание их объединения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любой комплексной окрестности $U \subset \widetilde{M}^2$ множества Ω существует $\varepsilon > 0$, такое, что при $0 < |k-1| < \varepsilon$ фундаментальная группа фазовой кривой Γ_k представима петлями, лежащими в U .

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3 справедливо и при $k = 1$, однако для дальнейшего это не требуется.

Из предложений 2 и 3 следует отсутствие у рассматриваемых систем дополнительного мероморфного первого интеграла в любой комплексной, а значит, и в вещественной области фазового пространства, содержащей Ω , что и доказывает теоремы 1–3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Для каждой из рассматриваемых систем в [1, 2] указано однопараметрическое семейство решений $x = \varphi(t, k)$, соответствующих фазовым кривым Γ_k . При $0 < k < 1$ эти решения однозначны, мероморфны, двоякопериодичны по t и вещественны при вещественных значениях t .

Пусть $T(k)$ и $T'(k)$ — минимальные вещественный и чисто мнимый периоды решения $x = \varphi(t, k)$. Для системы Хенона–Хейлеса они являются примитивными (т.е. любой период является их целочисленной линейной комбинацией).

ций), и решение имеет в ячейках по одному полюсу $T'(k)/2 \pmod{T(k), T'(k)}$, а для остальных рассматриваемых систем примитивными являются периоды $T_{1,2}(k) = (T(k) \pm T'(k))/2$, и решение имеет в ячейках по два полюса $\pm T'(k)/4 \pmod{T_{1,2}(k)}$.

Положим для системы Хенона–Хейлеса $t_0(k) = T(k)/2$, а для остальных рассматриваемых систем $t_0(k) = T(k)/4$. Пусть $\gamma_k, \gamma'_k: [0, 1] \rightarrow \Gamma_k$ — петли с общей отмеченной точкой $x_k = \varphi(t_0(k), k)$, соответствующие изменению времени вдоль периодов $T(k), T'(k)$ решения $x = \varphi(t, k)$. Из сказанного выше следует, что для системы Хенона–Хейлеса гомотопические классы петель γ_k, γ'_k являются образующими фундаментальной группы $\pi_1(\Gamma_k)$, а для остальных рассматриваемых систем эти петли пересекаются еще в одной точке $x'_k = \varphi(t_0(k) + T(k)/2, k) = \varphi(t_0(k) + T'(k)/2, k)$ и фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma_k)$ представима петлями, состоящими из полупетель этих петель с концами в точках x_k, x'_k .

Из формул, приведенных в [1, 2], следует, что при $k \rightarrow 1$ точка x_k стремится к x_0 , петля γ_k — к множеству Ω , а петля γ'_k — к точке x_0 (последнее следует также из нормальной формы рассматриваемых систем на многообразии $\widetilde{M}^2$ в окрестности точки x_0 или из непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начального условия и ограниченности периода $T'(k)$ на любом интервале $0 < k_0 < k < 1$). Предложение 3 доказано.

Автор благодарен В. И. Арнольду, А. Д. Брюно, В. В. Козлову, А. И. Нейштадту и А. И. Овсевичу за полезные обсуждения.

Пользуясь случаем, исправим следующие неточности, замеченные в работах [1, 15].

В [1] в первом слагаемом в подынтегральном выражении в (13) должно быть $\sin 2(\chi_0 + \omega x)$, а не $\sin 2\chi_0 + \omega x$.

В уравнении $\chi^1(pq, \chi_0) = 0$ после формулы (19) выражение в скобках должно быть равно $-1/4 + \omega^2$, а не $-1/4 + 1/\omega^2$, и, следовательно, обращается в нуль при $\omega = 1/2$, а не при $\omega = 2$.

Дополнительный первый интеграл для случая Горячева–Чаплыгина должен иметь вид $F = M_3(M_1^2 + M_2^2) - M_1\gamma_3$, как в настоящей работе, а не $F = M_3(M_1^2 + M)^2 - M_1\gamma_3$.

Приведенное в [1] доказательство отсутствия частного дополнительного мероморфного первого интеграла в задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки во всех случаях, кроме известных случаев интегрируемости, является вследствие предложения п. 1.2 из [15] (предложение разд. 2 настоящей работы) одновременно доказательством отсутствия в этих случаях общего дополнительного мероморфного первого интеграла, так что отдельное доказательство этого утверждения, приведенное в [1], так же как и сформулированное для него замечание к теореме В. В. Козлова в [15], могут быть опущены.

В алгебраической лемме п. 1.2 из [15] пропущено условие соизмеримости весов $s_1, \dots, s_m$ (т.е. должно быть $s_i = n_i s$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, m$, $s \in \mathbb{R}$), нужное для того, чтобы описанный в доказательстве леммы процесс понижения показателя зависимости $\mu(\Phi_1, \dots, \Phi_r)$ исходной системы функций $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ был конечен.

В то же время условие неотрицательности весов $s_1, \dots, s_m$ в случае поля рациональных функций излишне и в доказательстве не используется. Вследствие этого алгебраическая лемма в [18] также становится излишней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике, II. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 1, 8–23 (1983).
2. Зиглин С. Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в одной задаче динамики твердого тела. ДАН СССР, **292**, №4, 804–807 (1987).
3. Зиглин С. Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела. Труды ММО, **41**, 287–303 (1980).
4. Зиглин С. Л. Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых с двумя степенями свободы. Изв. АН СССР, сер. матем., **51**, №5, 1088–1103 (1987).
5. Козлов В. В., Трещев Д. В. Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, I. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №6, 73–81 (1985).
6. Козлов В. В., Трещев Д. В. Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, II. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №1, 39–44 (1986).
7. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995.
8. Болотин С. В. Двоякоасимптотические траектории и условия интегрируемости гамильтоновых систем. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №1, 55–63 (1990).
9. Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №3, 70–77 (1990).
10. Довбыш С. А. О сепаратрисе неустойчивого положения равновесия волчка Гесса–Аппельерота. ПММ, **56**, вып. 4, 632–642 (1992).
11. Болотин С. В. Вариационные методы построения хаотических движений в динамике твердого тела. ПММ, **56**, вып. 2, 230–239 (1992).
12. Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments. Astron. J., **69**, 73–79 (1964).
13. Суслов Г. К. Теоретическая механика. Гостехиздат, М.–Л., 1946.
14. Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики, **8**, вып. 3, 85–107 (1985).
15. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике, I. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 3, 30–41 (1982).
16. Козлов В. В. Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела. ПММ, **42**, вып. 3, 400–406 (1978).
17. Козлов В. В. Ветвление решений и полиномиальные интегралы в обратимой системе на торе. Матем. заметки, **44**, вып. 1, 100–104 (1988).
18. Зиглин С. Л. О полиномиальных первых интегралах гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 88–89 (1991).