Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Диаграммы Кокстера–Дынкина
частично упорядоченных множеств и диаграм-
мы А'Кампо–Гусейн-Заде простых особенностей,
Функц. анализ и его прил., 1997, том 31, вы-
пуск 1, 12–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa442>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:21:55

УДК 515.1

Диаграммы Кокстера–Дынкина частично упорядоченных множеств и диаграммы А'Кампо–Гусейн-Заде простых особенностей

© 1997. Г. Г. Ильяута

Группа монодромии в гомологиях слоя Милнора комплексной изолированной особенности описывается с помощью набора диаграмм Кокстера–Дынкина (д.К.–Д.) [1]. Для простых особенностей наиболее замечательными во многих отношениях диаграммами являются д.К.–Д. простых алгебр Ли. В настоящее время нет результатов, позволяющих для более сложных особенностей выделить «самые хорошие» д.К.–Д. Претендентами являются д.К.–Д., построенные методом А'Кампо–Гусейн-Заде по специального вида вещественным шевелениям особенности — диаграммы А'Кампо–Гусейн-Заде (д.А.–Г.) [1, 4]. Основным результатом статьи является критерий того, что д.К.–Д. простой особенности является д.А.–Г. Точнее, доказана такая теорема: для простых особенностей следующие два свойства выделяют д.А.–Г.: (1) матрица оператора вариации диаграммы имеет неотрицательные элементы (для вещественных шевелений особенностей функции более чем двух переменных это свойство не доказано, см. гипотезу в [6]) и (2) матрицы оператора вариации и формы Зейферта диаграммы сопряжены с помощью диагональной матрицы с ± 1 на диагонали (это свойство доказано в [4] для вещественных шевелений особенностей функций любого числа переменных, причем диагональная матрица происходит из комплексного сопряжения и на ее главной диагонали стоят числа $(-1)^{m_i}$, где m_i — индексы Морса соответствующих вещественных критических точек). В качестве промежуточного получен следующий результат: для д.К.–Д. простой особенности из (1) и (2) вытекает, что форма Зейферта диаграммы задает функцию Мёбиуса некоторого частично упорядоченного (ч.у.) множества (определение д.К.–Д. для любого ч.у. множества см. в §1). Этот факт наводит на мысль об усилении упомянутой в формулировке свойства (1) гипотезы: форма Зейферта д.К.–Д., построенной по вещественному шевелению особенности функции любого числа переменных [4], задает функцию Мёбиуса некоторого ч.у. множества. В развернутом виде это просто означает, что ненулевые элементы матрицы соответствующего оператора вариации V равны 1 и для всех $i < j < k$ из $V_{ij} = V_{jk} = 1$ следует, что $V_{ik} = 1$ (последнее условие эквивалентно свойству транзитивности указанного ч.у. множества: из $x < y$, $y < z$ следует, что $x < z$). Возможно, что и основной результат статьи верен для всех особенностей.

На д.А.–Г. можно определить структуру ч.у. множества, которая происходит из естественного порядка на множестве вещественных чисел. Д.А.–Г. представляют собой д.К.–Д. с дополнительной структурой: вершины диаграммы разделены на три множества, отвечающие максимумам, седлам и минимумам ве-

щественного шевеления особенности, по которому строится диаграмма, причем индексы пересечения базисных исчезающих циклов, отвечающих вершинам диаграммы, удовлетворяют специальным условиям [1]. Частичный порядок на вершинах д.А.–Г. вводится следующим образом: максимумы больше связанных с ними в диаграмме седел, а седла больше связанных с ними минимумов. Главная причина рассмотрения такой дополнительной структуры состоит в том, что индексы пересечения базисных исчезающих циклов, отвечающих вершинам диаграммы, соответствуют введенному отношению частичного порядка на вершинах. Исходя из этого замечания и работы [10], в которой с любой д.К.–Д. связывается ч.у. множество ее монотонных циклов, мы определяем набор д.К.–Д. для любого ч.у. множества (заметим, что для построенной ниже д.К.–Д. ч.у. множества определенное в [10] ч.у. множество монотонных циклов — это упорядоченное по включению множество цепей исходного ч.у. множества). Такое соответствие оказывается удивительно функториальным: функция Мёбиуса и дзета-функция ч.у. множества отвечают форме Зейферта и оператору вариации д.К.–Д., произведение ч.у. множеств соответствует тензорному произведению д.К.–Д., определенному теоремой Себастьяни–Тома о прямой сумме особенностей, а формула для следа оператора Кокстера диаграммы [5] является формулой для эйлеровой характеристики порядкового комплекса ч.у. множества [10]. Такой перевод с одного языка на другой может оказаться полезным и для теории ч.у. множеств. Например, введенная структура позволяет определить полином Александра ч.у. множества (характеристический полином оператора Кокстера соответствующей д.К.–Д.).

Язык теории ч.у. множеств хорошо приспособлен для изложения исчисления змей В. И. Арнольда [2]. Например, результаты о числе очень хороших M -морсификаций простой особенности для A_n [2] и для D_n , E_6 , E_7 , E_8 [11, 12] могут быть единым образом сформулированы так: число неэквивалентных очень хороших M -морсификаций простой особенности равно числу продолжений до полного порядка частичных порядков, которые задаются всеми д.А.–Г. этой особенности. Для особенности A_n эта переформулировка просто означает, что updown -перестановку можно рассматривать как продолжение частичного порядка до полного для ч.у. множества, задаваемого единственной д.А.–Г. особенности A_n (в [7] это ч.у. множество появляется под названиями «зигзаг» и «забор»). Р. Стенли пишет в [7], что число продолжений частичного порядка до полного «... является, вероятно, единственным весьма полезным числом, измеряющим «сложность» ч.у. множества ...».

Свойству (2) д.А.–Г. (см. выше) отвечает в теории ч.у. множеств эйлеровость [7]. Напомним, что эйлеровым называется конечное градуированное ч.у. множество P (через $r(x)$, $x \in P$, обозначим отвечающую градуировке функцию ранга), в котором есть минимальный и максимальный элементы и функция Мёбиуса вычисляется по формуле

$$\mu(x, y) = (-1)^{r(x)-r(y)}, \quad x, y \in P$$

(это основное свойство, отвечающее (2)). Для д.А.–Г. функция ранга задается индексами Морса вещественных критических точек шевеления особенности, по которому строится д.А.–Г. Каждый интервал ч.у. множества, задаваемого д.А.–Г.,

является эйлеровым ч.у. множеством. Для эйлеровых ч.у. множеств в [7] доказаны соотношения Дена–Соммервилля, которые нетрудно обобщить для д.А.–Г. Имеются два независимых соотношения, первое из которых (формула для эйлеровой характеристики) представляет собой формулу Милнора,

$$\mu = 2\delta - r + 1, \quad e - r = 2\delta = e_c + r$$

(μ — кратность особенности, δ — число двойных точек кривой, по которой строится д.А.–Г., r — число неприводимых компонент этой кривой, e — число ее ребер и e_c — число компактных ребер).

С каждой д.К.–Д. (и тем самым с каждым ч.у. множеством) связана квадратичная форма [1]. Назовем ч.у. множество эллиптическим (или простым), если его квадратичная форма положительно определена. Аналогично определяются параболические и гиперболические ч.у. множества. В статье приводится список всех конечных эллиптических ч.у. множеств, имеющих один максимальный и один минимальный элементы, т.е. список всех возможных интервалов в эллиптических ч.у. множествах.

Сформулируем еще одну гипотезу. Порядковым комплексом ч.у. множества называется симплициальный комплекс, симплексы которого взаимно однозначно соответствуют цепям ч.у. множества с естественным отношением инцидентности.

ГИПОТЕЗА. Порядковый комплекс ч.у. множества, задаваемого д.К.–Д. особенности, является стягиваемым пространством.

Можно рассматривать эту гипотезу как попытку обобщить тот факт, что д.К.–Д. особенности связна [1]. Из явного построения [1] легко следует, что эта гипотеза верна для д.А.–Г. особенностей функций двух переменных.

Свойства (1), (2) д.А.–Г. позволяют с помощью теоремы Перрона–Фробениуса о неотрицательных матрицах [3] получить информацию о спектре и собственных векторах матрицы индекса пересечения слоя Милнора. Действительно, из (2) следует, что матрицы оператора вариации V , формы Зейферта $S = V^{-1}$ и индекса пересечения $I = S + S^T$ связаны соотношением

$$D(V + V^T)D = S + S^T = I,$$

где D — диагональная матрица. Поэтому спектры матриц $V + V^T$ и I совпадают, а, согласно (1), $V + V^T$ имеет неотрицательные элементы.

Согласно теореме А'Кампо, среди д.К.–Д. особенностей деревьями являются только стандартные диаграммы простых особенностей A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 [8]. д.К.–Д. особенности строятся по форме Зейферта отмеченного базиса. Ниже мы покажем, что теорема А'Кампо может быть переформулирована для оператора вариации отмеченного базиса следующим образом: оператор вариации задает ч.у. множество, диаграмма Хассе которого является деревом, только для простых особенностей, причем соответствующая д.К.–Д. является стандартной (в этом случае диаграмма Хассе как граф совпадает с д.К.–Д., но д.К.–Д. в зависимости от нумерации вершин имеет несколько структур диаграммы Хассе). Напомним, что диаграммой Хассе конечного ч.у. множества P называется граф, вершинами которого являются элементы из P , а пара (a, b) образует ребро, если элемент b

предшествует элементу a (из $b \geq x \geq a$ следует, что $a = x$ или $x = b$), причем если $a < b$, то b рисуют «выше» a (т.е. с большей вертикальной координатой).

Так же как по форме Зейферта [1], д.К.–Д. можно построить по оператору вариации отмеченного базиса. Такое построение для оператора вариации ч.у. множества приводит к диаграмме, в которой все ребра пунктирны (в обозначениях [1]). Обладающие таким свойством д.К.–Д. изучались в [9].

§1. Диаграмма Кокстера–Дынкина частично упорядоченного множества

Рассмотрим конечное ч.у. множество P из n элементов и продолжение его частичного порядка до полного, т.е. сохраняющую порядок биекцию $P \rightarrow \{1 < \dots < n\}$. Такое продолжение существует [7]. В дальнейшем элементы из P нумеруются в соответствии с указанной биекцией. Напомним, что дзета-функция ч.у. множества определяется формулой

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ 0, & x \not\leq y. \end{cases}$$

Пусть H — целочисленная решетка с выделенным базисом, элементы которого взаимно однозначно соответствуют элементам множества P , а V — линейный оператор на H , задаваемый в данном базисе верхнетреугольной матрицей: $V_{ij} = 1$, если $x_i \leq x_j$, и $V_{ij} = 0$ в остальных случаях ($x_i, x_j \in P$). По определению V задает дзета-функцию ч.у. множества P , а $S = V^{-1}$ — функцию Мёбиуса [7]. Назовем V оператором вариации, а S — формой Зейферта ч.у. множества P . Аналогично тому, как в [1] по S строится д.К.–Д. Γ_S , по V также можно построить д.К.–Д. Γ_V . Определенные объекты в следующем смысле не зависят от выбора продолжения частичного порядка на P до полного.

ЛЕММА 1. *Диаграммы, построенные по различным продолжениям частичного порядка на P до полного, лежат в одной орбите действия группы кос на д.К.–Д.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если две вершины д.К.–Д. с последовательными номерами не соединены ребром, то действие соответствующей образующей группы кос на диаграмму заключается просто в перестановке номеров этих вершин [1]. Покажем, что таких операций достаточно для того, чтобы перевести друг в друга все д.К.–Д., полученные по различным продолжениям частичного порядка на P до полного. Заметим, что номер 1 в любом продолжении частичного порядка до полного может иметь только некоторый минимальный элемент ч.у. множества. Поэтому по индукции достаточно доказать, что можно из любого продолжения с помощью описанных операций получить такое, в котором номер 1 имеет любой фиксированный минимальный элемент в P . Пусть этот элемент имеет номер k при некотором продолжении частичного порядка. Тогда любой из элементов $x_1, \dots, x_{k-1}$ не может быть меньше x_k (x_k — один из минимальных элементов в P) и не может быть больше x_k по определению продолжения частичного порядка. Поэтому вершины $k-1$ и k не соединены ребром в Γ_V и можно переставить их номера, и т.д.. Лемма доказана.

Свяжем с ч.у. множеством P квадратичную форму на H с матрицей

$$I_V = V + V^T$$

в выделенном базисе и сопряженную с ней форму с матрицей

$$I_S = S + S^T = SI_V S^T.$$

Назовем P эллиптическим (или простым), если одна из этих форм (а тогда и другая) положительно определена.

В качестве иллюстрации данных определений приведем переформулировку теоремы А'Кампо [8] для диаграммы Γ_V , построенной по оператору вариации отмеченного базиса особенности. Теорема А'Кампо относится к диаграмме Γ_S , построенной по форме Зейферта отмеченного базиса: среди диаграмм Γ_S особенностей деревьями являются только стандартные диаграммы простых особенностей A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 .

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим д.К.-Д. Γ_V и Γ_S отмеченного базиса особенности. Следующие условия эквивалентны:*

- (i) Γ_V задает ч.у. множество, диаграмма Хассе которого является деревом;
- (ii) особенность проста и Γ_S является одной из стандартных диаграмм A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 .

Для доказательства (i) $\implies$ (ii) по теореме А'Кампо достаточно проверить, что Γ_S является деревом. Для (ii) $\implies$ (i) достаточно доказать, что для любого дерева с упорядоченными вершинами Γ_S соответствующая диаграмма Γ_V задает ч.у. множество, диаграмма Хассе которого является деревом. Оба эти факта вытекают из следующих замечаний. Если диаграмма Хассе ч.у. множества является деревом, то любой его интервал является цепью. Значения дзета-функции и функции Мёбиуса на паре элементов x , y зависят только от интервала $[x, y] = \{z : x \leq z \leq y\}$ [7]. Диаграмма Γ_S для цепи является деревом (стандартной диаграммой особенности A_n ; Γ_V для цепи — это полный граф, также являющийся д.К.-Д. A_n , см. [1, п. 2.9, гл. 1]).

§2. Характеризация диаграмм А'Кампо–Гусейн-Заде простых особенностей

С отмеченным базисом особенности канонически связаны верхнетреугольные матрицы оператора вариации V и формы Зейферта S [1]. Для фиксации знаков в формулах предположим, что число переменных функции, задающей особенность, сравнимо с 1 по модулю 4; тогда на диагонали матриц V и S стоят 1. По S строится д.К.-Д. Γ_S и аналогично можно построить диаграмму Γ_V по V . Определим формально эти объекты для упорядоченного слабо отмеченного базиса особенности. А именно, S будет верхнетреугольной частью матрицы индекса пересечения слоя Милнора с 1 на диагонали, $V = S^{-1}$.

ТЕОРЕМА 2. *Для упорядоченного слабо отмеченного базиса простой особенности следующие условия эквивалентны:*

- (i) V имеет неотрицательные элементы и существует диагональная матрица D с +1 на диагонали, для которой $DV = SD$;
- (ii) Γ_S является диаграммой А'Кампо–Гусейн-Заде.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) $\implies$ (i) см. в [1]. Доказательство (i) $\implies$ (ii) состоит из нескольких частей. Сначала из (i) выводится, что V задает ч.у. множество.

Затем классифицируются (см. §3) интервалы в эллиптических (так как для простых особенностей индекс пересечения $S + S^T$ положительно определен) ч.у. множествах. Из того, что значения дзета-функции и функции Мёбиуса на паре элементов x, y определяются только интервалом $[x, y] = \{z : x \leq z \leq y\}$ [7], вытекает, что (i) должно выполняться для любого интервала рассматриваемого ч.у. множества. Проверка условия (i) для интервалов показывает, что годятся только диаграммы A_1, A_2, D_4 (см. §3). И далее уже нетрудно классифицировать эллиптические ч.у. множества, имеющие интервалы только типов A_1, A_2, D_4 . Все они задаются д.А.–Г. Классификационные части доказательства содержат немалый рутинный перебор, и мы их не приводим.

ЛЕММА 2. *В условиях теоремы 2 из (i) следует, что V задает ч.у. множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что все ненулевые элементы матрицы V равны 1, а также свойство транзитивности ч.у. множеств: если $x < y$, $y < z$, то $x < z$. Для матрицы это означает, что при любых $i < j < k$ из $V_{ij} = V_{jk} = 1$ следует, что $V_{ik} = 1$.

Для простой особенности квадратичная форма $V + V^T$ положительно определена и принимает на векторе $e_i - e_j$, $i < j$ ($e_1, e_2, \dots$ — базис из условия теоремы) значение $4 - 2V_{ij}$. Поэтому $V_{ij} \leq 1$ и из (i) следует, что $V_{ij} = 0$ или 1. Из (i) также следует, что $V_{ij} = \pm S_{ij}$ для всех i, j .

Докажем транзитивность индукцией по кратности особенности. Пусть для кратности $< N$ лемма верна, и докажем ее для кратности N от противного. Пусть $V_{1N} = 0$ и $V_{1m}V_{mN} = 1$ для некоторого m , $1 < m < N$. Поскольку $V = S^{-1}$, сумма $\sum_{1 < k < N} V_{1k}S_{kN}$ равна 0 и поэтому в ней по крайней мере два ненулевых слагаемых. Итак, существуют i, j , $1 < i < j < N$, для которых $V_{1i} = V_{1j} = V_{iN} = V_{jN} = 1$. Для $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$ обозначим через $\langle i_1, \dots, i_k \rangle$ подрешетку, порожденную базисными векторами с номерами $i_1, \dots, i_k$. Из положительности определителя ограничения формы $V + V^T$ на $F_0 = \langle 1, i, j, N \rangle$ вытекает, что $V_{ij} = 1$. Тем самым у ограничения оператора V на F_0 все элементы выше диагонали равны 1, кроме $V_{1N} = 0$. Далее докажем индукцией по размерности подрешетки $\langle 1, i_1, \dots, i_k, N \rangle$, что у матрицы V все элементы выше диагонали равны 1, кроме $V_{1N} = 0$. Базой индукции будет F_0 . Пусть у ограничения V на $F = \langle 1, i_1, \dots, i_k, N \rangle$ все элементы выше диагонали равны 1, кроме $V_{1N} = 0$. В сумме

$$\sum_{i_{k-1} \leq q \leq N} V_{i_{k-1}q} S_{qN} = 0$$

три слагаемых для $q = i_{k-1}, i_k, N$ не равны 0 по предположению индукции. Поэтому существует $n \notin \{1, i_1, \dots, i_k, N\}$, для которого $V_{i_{k-1}n} = \pm S_{nN} = V_{nN} = 1$. По предположению индукции лемма 2 верна для подрешетки $\langle 1, \dots, N-1 \rangle$. Значит, из $V_{1i_{k-1}} = V_{i_{k-1}n} = 1$ следует, что $V_{1n} = 1$. Определитель ограничения формы $V + V^T$ на $F \cup \{n\}$ положителен, и нам неизвестны только его элементы V_{qn}, V_{nq} , $q \neq 1, n, N$. Нужно доказать, что эти элементы равны 1. Обозначим их через $a_1, \dots, a_k$ в любом порядке и приведем определитель к удобной для подсчета форме. Вычтем из строки N строку 1 и затем прибавим к столбцу 1 столбец N . Вычтем полученный столбец 1 с коэффициентом $1/2$ из

всех последующих столбцов. Легко видеть, что полученный определитель равен $4(1 - \sum(1 - a_q)^2)$. Из положительности вытекает, что все a_q равны 1. Итак, по индукции получаем, что $V_{ij} = 1$ для всех i, j , за одним исключением: $V_{1N} = 0$. Нетрудно заметить, что тогда $S_{1N} = 1 \neq \pm V_{1N} = 0$. Это противоречит (i).

§3. Классификация интервалов в эллиптических ч.у. множествах

Ниже приводятся диаграммы Хассе всех эллиптических ч.у. множеств, имеющих один максимальный и один минимальный элементы, т.е. диаграммы Хассе всех возможных интервалов в эллиптических ч.у. множествах. Не различаются двойственные ч.у. множества, т.е. полученные одно из другого заменой $>$ на $<$ (переворачиванием диаграммы Хассе). Соответствующие диаграммам Хассе д.К.-Д. являются д.К.-Д. простых особенностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Наука, М., 1984.
2. Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера. УМН, **47**, вып. 1, 3–45 (1992).

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Наука, М., 1988.
4. Гусейн-Заде С. М. Индекс особой точки градиентного векторного поля. Функц. анализ и его прил., **18**, вып. 1, 7–12 (1984).
5. Ильюта Г. Г. О преобразовании Кокстера изолированной особенности. УМН, **42**, вып. 2, 227–228 (1987).
6. Ильюта Г. Г. Теорема А'Кампо на дискриминанте. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 2, 12–20 (1994).
7. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Мир, М. (1990).
8. A'Campo N. Le groupe de monodromie du deploiment des singularites isolees de courbes planes 2. Act. Congr. Intern. Math. (Vancouver, 1974), Vol. 1, 395–404 (1975).
9. Cameron P. J., Goethals J. M., Seidel J. J., Shult E. E. Line graphs, root systems and elliptic geometry. J. Algebra, **43**, 305–327 (1976).
10. Ebeling W. On Coxeter–Dynkin diagrams of hypersurface singularities. Intern. Geometrical Colloquium, Moscow, May 10–14, 1993.
11. Goryunov V. V. Subprincipal Springer cones and morsifications of Laurent polynomials and D_μ singularities. European Singularity Project, Preprint No. 46, 1993.
12. Goryunov V. V. Morsification of rational functions. European Singularity Project, Preprint No. 47, 1993.

Государственная академия
нефти и газа им. И. М. Губкина

Поступило в редакцию
25 декабря 1995 г.