Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Казарян, Относительная теория Морса одномерных расслоений и циклические гомологии, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 20–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 09:23:31

УДК 512.761+515.164.15

Относительная теория Морса одномерных расслоений и циклические гомологии

© 1997. М. Э. КАЗАРЯН¹

§1. Введение

Функция общего положения является функцией Морса. Функция может иметь неустранимые неморсовские особенности, если она зависит от дополнительных параметров, т. е. когда она задана в пространстве локально тривиального расслоения и рассматриваются ее ограничения на слои. Неизбежность существования слоев с неморсовскими ограничениями должна быть связана с нетривиальностью расслоения. В статье [3] мы показываем, что это так по крайней мере в случае, когда слои расслоения диффеоморфны окружности и ориентированны. В частности, все степени первого класса Чженя расслоения могут быть представлены как классы, двойственные по Пуанкаре определенным линейным комбинациям стратов множества негладкости функции минимума.

Например, предположим, что базой расслоения является риманова поверхность. Рассмотрим слои, ограничения функции на которые имеют вырожденную критическую точку глобального минимума или достигают глобального минимума в трех различных точках. Если функция является функцией общего положения, то такие слои образуют конечное множество, и *количество таких слоев, подсчитанное с учетом определенных знаков, равно удвоенному числу Чженя расслоения.*

В настоящей статье описаны комплексы для вычисления циклов, двойственных по Пуанкаре характеристическим классам S^1 -расслоений. В §2 мы даем абстрактное определение комплекса QCC и устанавливаем его основные свойства. В §3 доказывается основной результат статьи, теорема 3.2, в которой гомологии комплекса QCC связываются с топологией расслоения. Некоторые разновидности конструкции комплекса QCC описаны в §4. Результаты статьи получены применением стандартных методов теории циклических гомологий. В том же §4 описана связь между нашими комплексами и комплексами, возникающими в этой теории.

Наблюдение, что наши комплексы напоминают комплексы теории циклических гомологий, принадлежит Д. Каждану и Т. Екедалу. Автор выражает им глубокую признательность за ценные обсуждения.

¹Исследования автора поддержаны грантом INTAS №4373 и грантом РФФИ №95-01-01122а.

§2. Бикомплекс QCC

Пусть k — произвольное коммутативное кольцо коэффициентов, например $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$. Пусть $B = k[q]q \cong k[q]/k$ — кольцо многочленов от независимой переменной q с нулевым свободным членом. Положим $C^* = \bigoplus_{l \geq 0} B^{\otimes l}$, где $B^{\otimes l} = B \otimes_k B \otimes_k \cdots \otimes_k B$ (l раз). Для элементов k -модуля $B^{\otimes l}$ мы используем обозначение $[b_1, \dots, b_l]$, $b_i \in B$. Рассмотрим k -линейные отображения $C^* \rightarrow C^*$, заданные на элементе $b = [b_1, \dots, b_l] \in B^{\otimes l}$ следующими формулами:

$$\begin{aligned}\tau b &= (-1)^{l-1} [b_l, b_1, \dots, b_{l-1}] \in B^{\otimes l}, \\ \delta_0 b &= (-1)^{l-1} [b_l b_1, b_2, \dots, b_{l-1}] \in B^{\otimes l-1}, \\ \varepsilon_0 b &= [q, b_1, \dots, b_l] \in B^{\otimes l+1}.\end{aligned}\tag{1}$$

Определим отображения $C^* \rightarrow C^*$, задав их на $B^{\otimes l}$ следующими формулами:

$$\begin{aligned}\delta &= \sum_{i=1}^{l-1} \tau^{-i} \delta_0 \tau^i, & \delta' &= \delta + \delta_0, & \varepsilon &= \sum_{i=0}^l \tau^i \varepsilon_0 \tau^{-i}, & \varepsilon' &= \varepsilon - \varepsilon_0, \\ \beta &= \delta + \varepsilon, & \beta_0 &= \delta_0 - \varepsilon_0, & \beta' &= \delta' + \varepsilon' = \beta + \beta_0, & N &= \sum_{i=0}^{l-1} \tau^i.\end{aligned}\tag{2}$$

Если k содержит поле $\mathbb{Q}$, положим также

$$h = -\frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l-1} i \tau^i, \quad h' = \frac{1}{l}.$$

2.1. ЛЕММА. *Введенные отображения удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \varepsilon^2 = \delta \varepsilon + \varepsilon \delta = 0, & \beta^2 &= 0, & \delta'^2 &= \varepsilon'^2 = \delta' \varepsilon' + \varepsilon' \delta' = 0, & \beta'^2 &= 0, \\ (1 - \tau) \delta - \delta' (1 - \tau) &= (1 - \tau) \varepsilon - \varepsilon' (1 - \tau) = (1 - \tau) \beta - \beta' (1 - \tau) = 0, \\ \delta N - N \delta' &= \varepsilon N - N \varepsilon' = \beta N - N \beta' = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Если k содержит $\mathbb{Q}$, то, кроме того,

$$(1 - \tau) h + h' N = h(1 - \tau) + N h' = \text{id}.\tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает формально из следующих соотношений между τ , δ_0 и ε_0 , которые вытекают непосредственно из определения:

$$\begin{aligned}\tau^l &= \text{id}, & \delta_0 \varepsilon_0 &= -\delta_0 \tau^{-1} \varepsilon_0 \tau, \\ \tau^{-i} \delta_0 \tau^i \varepsilon_0 &= -\varepsilon_0 \tau^{-i} \delta_0 \tau^i, & \tau^{1-i} \delta_0 \tau^{i-1} \delta_0 &= -\delta_0 \tau^{-i} \delta_0 \tau^i, & 1 \leq i \leq l-1, \\ \tau^{i+1} \varepsilon_0 \tau^{-i-1} \varepsilon_0 &= -\varepsilon_0 \tau^i \varepsilon_0 \tau^{-i}, & 0 \leq i \leq l.\end{aligned}\tag{5}$$

Следовательно, как (C^*, β) , так и (C^*, β') являются градуированными коцепными комплексами относительно *градуировки*, в которой $\deg[b_1, \dots, b_l] =$

$\sum_{i=1}^l (2 \deg b_i - 1) - 1$. (В действительности они являются бикомплексами относительно биградуировки $(\sum \deg b_i - 1, \sum (\deg b_i - 1))$). Заметим, что, вообще говоря, $\deg[b_1, \dots, b_l] \neq l$.) В явном виде дифференциал β задается равенством

$$\beta[b_1, \dots, b_l] = \sum_{i=1}^{l-1} (-1)^{i-1} [b_1, \dots, b_i b_{i+1}, \dots, b_l] + \sum_{i=0}^l (-1)^i [b_1, \dots, b_i, q, b_{i+1}, \dots, b_l].$$

Более того, следующая диаграмма образует бикомплекс k -модулей (обозначаемый через $QCC^{*,*}$)

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 1-\tau \uparrow & & 1-\tau \uparrow & & 1-\tau \uparrow & & \\ C^0 & \xrightarrow{\beta} & C^1 & \xrightarrow{\beta} & C^2 & \xrightarrow{\beta} & \dots \\ N \uparrow & & N \uparrow & & N \uparrow & & \\ C^0 & \xrightarrow{-\beta'} & C^1 & \xrightarrow{-\beta'} & C^2 & \xrightarrow{-\beta'} & \dots \\ 1-\tau \uparrow & & 1-\tau \uparrow & & 1-\tau \uparrow & & \\ C^0 & \xrightarrow{\beta} & C^1 & \xrightarrow{\beta} & C^2 & \xrightarrow{\beta} & \dots \end{array} \quad (6)$$

Группы когомологий тотального комплекса этого бикомплекса обозначаются через QHC^* . (Первая) спектральная последовательность этого бикомплекса $E_{*,*}^{*,*}(QCC)$, сходящаяся к QHC^* , называется *характеристической спектральной последовательностью для классификации особенностей функции минимума на окружности* (см. [3] и §3 ниже). Строка $E_1^{*,0}$ в первом члене этой последовательности является подкомплексом C_τ^* , состоящим из τ -инвариантных копеек в комплексе (C^*, β) . Комплекс (C_τ^*, β) называется *универсальным комплексом Васильева классов особенностей* для той же классификации.

Обозначим через $QC_{\{2\}}^*$ факторкомплекс бикомплекса $QCC^{*,*}$, образованный двумя нижними строками. Обозначим через QHN^* когомологии этого комплекса. Очевидная короткая точная последовательность комплексов

$$0 \rightarrow QCC^*[2] \rightarrow QCC^* \rightarrow QC_{\{2\}}^* \rightarrow 0$$

индуцирует длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow QHN^{n+1} \rightarrow QHC^n \xrightarrow{S^*} QHC^{n+2} \rightarrow QHN^{n+2} \rightarrow \dots$$

Гомоморфизм $S^*: QHC^n \rightarrow QHC^{n+2}$ называется *гомоморфизмом периодичности*.

2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Когомологии комплекса $QC_{\{2\}}^*$ имеют следующий вид: $QHN^0 = k$, $QHN^i = 0$, $i > 0$. Значит, S^* является изоморфизмом и $QHC^{2i} \cong k$, $QHC^{2i+1} = 0$.

2.3. ОБОЗНАЧЕНИЕ. Положим $e^n = \overbrace{S^* \circ \dots \circ S^*}^{n \text{ раз}}[q] \in QHC^{2n}$. В этих обозначениях предложение 2.2 утверждает, что имеется изоморфизм (k -модулей)

$$QHC^* \cong k[e].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комплекс C^* является ε' -ацикличным, поскольку имеется стягивающая гомотопия

$$s[b_1, \dots, b_l] = -[b_1 b_2 / q, b_3, \dots, b_l],$$

удовлетворяющая условию $\varepsilon' s + s \varepsilon' = \text{id}$. Используя спектральные последовательности, можно установить, что он также и β' -ацикличен.

Аналогично, комплекс $C^{>0}$ δ -ацикличен, поскольку имеется стягивающая гомотопия

$$r[b_1, \dots, b_l] = [q, b_1 / q, b_2, \dots, b_l].$$

Следовательно, он β -ацикличен (в этой формуле мы полагаем $b_1 / q = 0$, если $\deg b_1 = 1$).

Опять с помощью спектральных последовательностей можно убедиться, что $QC_{\{2\}}^{>0}$ ацикличен и $QH H^0 \cong C^0 \cong k$.

Если k содержит $\mathbb{Q}$, то из (4) вытекает, что столбцы в (6) ацикличны и характеристическая спектральная последовательность сводится к комплексу Вассильева.

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если k содержит поле $\mathbb{Q}$, то $QCH^* \cong H^*(C_\tau)$. Гомоморфизм периодичности задается формулой

$$S = -\beta h \beta' h' : C_\tau^n \rightarrow C_\tau^{n+2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b \in C_\tau^n$, рассматриваемый как элемент в $QCC^{n,0}$, представляет некоторый класс когомологий $[b] \in QHC^n$, то $S^*[b]$ представлен тем же самым элементом, рассматриваемым как элемент в $QCC^{n,2}$. Далее, этот элемент когомологичен элементу $\beta' h' b \in QCC^{n+1,1}$ ввиду соотношения $b - \beta' h' b = (N - \beta') h' b$. Аналогично, $S^*[b]$ может быть также представлен элементом $-\beta h \beta' h' b \in QCC^{n+2,0}$ в силу того, что $\beta' h' b + \beta h \beta' h' b = (1 - t + \beta)(h \beta' h' b)$. Инвариантность элемента $-\beta h \beta' h' b \in C^{n+2}$ относительно τ следует формально из леммы 2.1.

Можно показать, используя лемму 2.1, что

$$-\beta h \beta' h' \equiv N h' \beta_0 h \beta_0 h' \bmod \beta C_\tau^*.$$

Последнее выражение для S более удобно, поскольку оно использует меньше суммирований.

Если $\mathbb{Q} \not\subset k$, то характеристическая спектральная последовательность ведет себя гораздо более сложным образом. Пример нетривиального второго дифференциала для случая $k = \mathbb{Z}$ описан в [3].

2.5. Чтобы дать явные формулы, изменим обозначения. Для любой последовательности нечетных положительных чисел $2u_1 - 1, \dots, 2u_l - 1$ положим

$$(2u_1 - 1 \dots 2u_l - 1) = (-1)^{(l-1)/2} (b + \tau b + \dots) = (-1)^{(l-1)/2} N b / m \in C_\tau^*, \quad (8)$$

где $b = [q^{u_1}, \dots, q^{u_l}]$ и m — индекс стационарной подгруппы элемента b под действием группы $\mathbb{Z}_l$, порожденной τ . Например, если $2 \neq 0$ в k , то $(1\ 1) = 0$, $(3\ 1\ 3\ 1) = [q^2, q, q^2, q] - [q, q^2, q, q^2]$. Мы называем последовательность $(a_1 \dots a_l)$ *тривиальной*, если она определяет тривиальный элемент в C^* . Нетривиальные последовательности, рассматриваемые с точностью до циклической перестановки элементов, образуют систему свободных k -образующих комплекса C_τ^* . Знак $(-1)^{l(l-1)/2}$ выбран для того, чтобы обозначения были согласованными с обозначениями, введенными в [3]. Следующие выражения для образующих $e^n \in H^{2n}(C_\tau)$ получены для случая $k = \mathbb{Q}$ при помощи пакета программ “Mathematica” на основании формулы (7):

$$\begin{aligned} -2e &= (1^3) - (3), \\ 12e^2 &= (1^5) - (31^2) + 2(5), \\ -120e^3 &= (1^7) - (31^4) + (3^2 1) + 2(51^2) - 5(7), \\ 1680e^4 &= (1^9) - (31^6) + 2(51^4) + \frac{31}{15}(3^2 1^3) - \frac{1}{15}(31^2 31) \\ &\quad - \frac{21}{5}(3^3) - \frac{14}{15}(531) - \frac{14}{15}(513) - \frac{91}{15}(71^2) + 14(9). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь (m^l) обозначает $(m \dots m)$ (l раз). Приведенные выражения для e^n совпадают с выражениями, выписанными в [3] для $n \leq 3$. Выражение для e^4 когомологично приведенному в [3].

§3. Когомологии комплекса QCC и топология S^1 -расслоений

Пусть $\pi: W \rightarrow M$ — гладкое ориентированное S^1 -расслоение. Без потери общности мы можем предположить, что структурная группа расслоения π редуцирована к $S^1 = SU(1) = SO(2)$. Следовательно, W может быть реализовано как расслоение единичных векторов в некотором ориентированном векторном двумерном расслоении $\tilde{\pi}: E \rightarrow M$. Обозначим через $e(\pi) \in H^2(M)$ первый класс Чженя расслоения π , т.е. характеристический класс Эйлера расслоения $\tilde{\pi}$. Базой расслоения является гладкое многообразие M . Мы не налагаем на M никаких условий компактности или ориентированности. Под когомологиями мы подразумеваем когомологии с коэффициентами в k , где k является произвольным коммутативным кольцом, если специально не оговорены иные условия.

Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Обозначим через f_λ , $\lambda \in M$, ограничение функции f на слой $W_\lambda = \pi^{-1}(\lambda)$. Обозначим через $M_0 \subset M$ подмножество точек λ , для которых f_λ достигает глобального минимума в единственной невырожденной критической точке. Дополнение $\Sigma = \Sigma(f) = M \setminus M_0$ является множеством точек, в которых функция минимума ограничения на слои не является гладкой. Особое множество Σ стратифицировано. Его страты занумерованы последовательностями нечетных положительных чисел $(a_1 \dots a_l)$, определенными с точностью до циклического порядка. Мы обозначаем через $\Sigma_{(a_1 \dots a_l)}$ множество точек λ , для которых f_λ достигает глобального минимума в l последовательных критических точках кратностей $a_1, \dots, a_l$ (кратность критической точки локального минимума всегда нечетна).

Назовем функцию f *общей*, если для любой точки $\lambda' \in M$ росток расширенного семейства функций $f_\lambda + \lambda_0$, $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times M$, образует версальную деформацию мультиростка, соответствующего критическим точкам функции $f_{\lambda'}$ (см. [1]). Общие функции образуют открытое плотное множество в пространстве всех функций на W . Если f общая, то $\Sigma_{(a_1 \dots a_l)}$ образует гладкое подмногообразие коразмерности $\sum a_i - 1$.

Напомним, что кольцо характеристических классов S^1 -расслоений изоморфно кольцу многочленов $H^*(\mathbf{BS}^1) \cong k[e]$ с образующей $e \in H^2(\mathbf{BS}^1)$, называемой первым классом Чженя (или Эйлера).

3.1. ТЕОРЕМА (ср. [3]). Пусть f — общая функция. Если последовательность $(a_1 \dots a_l)$, рассматриваемая как элемент комплекса C_τ^* , нетривиальна, то подмногообразие $\Sigma_{(a_1 \dots a_l)}$ имеет естественную коориентацию. Если k -линейная комбинация таких элементов является коциклом в комплексе C_τ^* , то индекс пересечения с соответствующей ему линейной комбинацией стратов множества Σ задает корректно определенный класс когомологий в $H^*(M, k)$, который является характеристическим классом расслоения π . В частности, этот класс когомологий не зависит от выбора (общей) функции f .

В случае $k = \mathbb{Q}$ полученный гомоморфизм $H^*(C_\tau, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{Q})$ переводит элемент $e^n \in H^{2n}(C_\tau, \mathbb{Q})$ в n -ю степень класса Чженя–Эйлера $e(\pi) \in H^2(M)$.

Например, предположим, что M четырехмерно, компактно и ориентированно. Если функция f общая, то страты множества $\Sigma(f)$ коразмерности 4 образуют конечное множество. Обозначим через $\#\Sigma_a$ количество точек типа a , подсчитанных с учетом знаков. Тогда число $\#\Sigma_{(1^5)} - \#\Sigma_{(31^2)} + 2\#\Sigma_{(5)}$ является топологическим инвариантом расслоения π , а именно значением класса $e(\pi)^2$ на фундаментальном цикле многообразия M , умноженным на 12. Все равенства (9) могут быть проинтерпретированы подобным образом.

Теорема 3.2 ниже является обобщением теоремы 3.1.

Для данной общей функции f на тотальном пространстве расслоения обозначим через $M_i \subset M$ объединение стратов коразмерности, меньшей или равной i . Таким образом, мы получаем фильтрацию на M открытыми подмножествами

$$M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M.$$

С этой фильтрацией мы связываем спектральную последовательность $E_*^{*,*}(\pi, f)$, сходящуюся к когомологиям многообразия M . Столбец $E_1^{i,*}$ в первом члене этой последовательности изоморфен когомологиям гладкого подмногообразия $M_i \setminus M_{i-1}$ коразмерности i с коэффициентами в локально постоянной системе коэффициентов, ориентирующей нормальное расслоение этого подмногообразия.

Пусть $\varphi: L \rightarrow M$ — гладкое отображение многообразий. Это отображение индуцирует как S^1 -расслоение $\varphi^*\pi$ над L , так и функцию φ^*f на его тотальном пространстве. Если φ трансверсально стратификации на M , то φ^*f является общей функцией. Полученная фильтрация на L , индуцированная функцией φ^*f , совпадает с обратным образом фильтрации на M при отображении φ . Следовательно, мы получаем индуцированный гомоморфизм спек-

тральных последовательностей $\varphi^*: E_{*,*}^*(\pi, f) \rightarrow E_{*,*}^*(\varphi^*\pi, \varphi^*f)$. Соответствующий гомоморфизм предельных когомологий является обычным гомоморфизмом $\varphi^*: H^*(M) \rightarrow H^*(L)$.

3.2. ТЕОРЕМА. 1. Для каждого S^1 -расслоения $\pi: W \rightarrow M$ и общей функции $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ существует естественный гомоморфизм спектральных последовательностей

$$\varkappa_\pi^*: E_{*,*}^*(QCC) \rightarrow E_{*,*}^*(M, f).$$

Этот гомоморфизм является характеристическим в том смысле, что если $\varphi: L \rightarrow M$ — общее гладкое отображение, то гомоморфизм $\varkappa_{\varphi^*\pi}^*$ совпадает с $\varphi^* \circ \varkappa_\pi^*: E_{*,*}^*(QCC) \rightarrow E_{*,*}^*(\varphi^*\pi, \varphi^*f)$.

2. Имеется естественный изоморфизм

$$QHC^* \cong H^*(BS^1), \quad (10)$$

такой, что предельный гомоморфизм когомологий

$$\varkappa_\pi^*: QHC^* \rightarrow H^*(M)$$

отображает универсальный характеристический класс в соответствующий характеристический класс данного расслоения.

3. При изоморфизме (10) гомоморфизм периодичности

$$S^*: QHC^n = H^n(BS^1) \rightarrow QHC^{n+2} = H^{n+2}(BS^1)$$

задается умножением на класс Чженя–Эйлера $e \in H^2(BS^1)$.

Утверждение 3 теоремы оправдывает наше обозначение 2.3 для образующих групп QHC^* . Теорема 3.1 является частным случаем теоремы 3.2 для строк $E_1^{*,0}$ первых членов спектральных последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Конструкция гомоморфизма $\varkappa_\pi^*$ состоит в следующем. Представим пространство W расслоения π как пространство единичных векторов в двумерном векторном расслоении $\tilde{\pi}: E \rightarrow M$. Выберем произвольную последовательность гладких сечений $s_1, s_2, \dots$ расслоения $\tilde{\pi}$, находящихся в общем положении. Общность положения означает, что для любого i система уравнений $s_1 = s_2 = \dots = s_i = 0$ невырожденно задает подмногообразие в M коразмерности $2i$, трансверсальное стратификации на M , заданной функцией f .

Сопоставим каждой точке $\lambda \in M$ образующую бикомплекса $QCC^{*,*}$ следующим образом. Пусть $s_1(\lambda) = \dots = s_i(\lambda) = 0$, однако $s_{i+1}(\lambda) \neq 0$. Обозначим через $z \in W_\lambda$ радиальную проекцию точки $s_{i+1}(\lambda) \in \tilde{\pi}^{-1}(\lambda)$ на окружность W_λ . Пусть f_λ имеет l точек глобального минимума, $z \leq x_1 < x_2 < \dots < x_l < z + 2\pi$, где порядок задается ориентацией окружности W_λ . Пусть критическая точка x_j имеет кратность $2u_j - 1$. Сопоставим точке λ образующую $[q^{u_1}, \dots, q^{u_l}] \in C^*$, рассматриваемую как элемент строки с номером $2i$ в бикомплексе $QCC^{*,*}$, если $z \neq x_1$, и ту же образующую, рассматриваемую как элемент строки с номером $2i + 1$, если $z = x_1$.

Мы получили новую, более детальную, классификацию точек на M в соответствии с образующими бикомплекса $QCC^{*,*}$. Множество точек, отвечающих

данной образующей, является гладким подмногообразием в M , коразмерность которого равна суммарной степени этой образующей в бикомплексе $QCC^{*,*}$.

Мы утверждаем, что *все страты полученной детальной классификации естественно коориентированны*. Для образующих нулевой строки эта коориентация описана в [3]. Для остальных стратов доказательство аналогично.

Рассмотрим на M клеточное разбиение $C(M)$, такое, что каждая его клетка трансверсальна нашей детальной классификации. Пусть $K_*(M)$ — цепной комплекс этого клеточного разбиения и $K^*(M) = \text{hom}(K_*(M), k)$ — соответствующий коцепной комплекс. Определим k -линейное отображение комплексов

$$\varkappa_\pi: QCC^* \rightarrow K^*(M).$$

Пусть $b \in QCC^*$ — образующая суммарной степени d и $\Sigma_b \subset M$ — соответствующее этой образующей подмногообразие коразмерности d . Каждая d -мерная клетка σ разбиения $C(M)$ пересекает Σ_b в конечном числе точек. Каждая точка пересечения получает естественный *знак*, потому что σ ориентированно, а Σ_b коориентированно. Пусть $\langle \Sigma_b, \sigma \rangle$ — общее число точек пересечения, подсчитанное с учетом знаков. Продолжая по k -линейности, мы получаем k -коцепь $\varkappa_\pi(b) \in K^d(M)$. Опять продолжая по k -линейности, мы получаем k -линейное отображение $\varkappa_\pi: QCC^* \rightarrow K^*(M)$. Основное наблюдение состоит в следующем.

3.3. ЛЕММА. *Гомоморфизм $\varkappa_\pi$ является гомоморфизмом коцепных комплексов.*

Идея доказательства состоит в изучении примыканий стратов соседних коразмерностей в нашей детальной классификации точек на M . Имеются три возможности для вырождения данного страта Σ_b . Первая состоит в том, что две соседние точки глобального минимума функции f_λ кратностей $2u' - 1$ и $2u'' - 1$ сливаются в точку глобального минимума кратности $2(u' + u'') - 1$. Другая возможность состоит в том, что значение функции f_λ в точке невырожденного локального минимума достигает уровня глобального минимума. Третья возможность состоит в вырождении сечений s_j . Первые две возможности соответствуют δ - и ε -членам в горизонтальной составляющей дифференциала в бикомплексе $QCC^{*,*}$. Третья возможность соответствует вертикальной составляющей. Строгое доказательство основано на понятии *универсального комплекса Васильева* классов особенностей; подробности см. в [7, 2]. В действительности дифференциал в бикомплексе QCC^* был определен первоначально таким образом, чтобы выполнялась лемма 3.3, и лишь затем была найдена его интерпретация, описанная в §2.

Гомоморфизм комплексов $\varkappa_\pi$ индуцирует гомоморфизм групп когомологий $QHC^* \rightarrow H^*(K(M)) \cong H^*(M)$. Независимость этого гомоморфизма от клеточного разбиения на M доказана в [7].

Фильтрация $M_0 \subset M_1 \subset \dots$ на M индуцирует естественную фильтрацию в бикомплексе $K^*(M)$. Эта фильтрация задает спектральную последовательность $E_{*,*}^{*,*}(K(M))$, сходящуюся к когомологиям многообразия M . Если разбиение $C(M)$ достаточно мелкое, то из изоморфизма исчерпывания вытекает,

что эта спектральная последовательность изоморфна спектральной последовательности $E_{*,*}^{*,*}(M, f)$. Построенный выше гомоморфизм $\varkappa_\pi$ уважает фильтрации на QCC^* и $K^*(M)$. Таким образом, мы получаем индуцированный гомоморфизм спектральных последовательностей $\varkappa_\pi^*: E_{*,*}^{*,*}(QCC) \rightarrow E_{*,*}^{*,*}(K(M)) = E_{*,*}^{*,*}(M, f)$. Как и выше, можно показать, что этот гомоморфизм не зависит от выбора клеточного разбиения на $C(M)$, если оно достаточно мелкое.

Гомоморфизм первых членов последовательностей

$$\varkappa_\pi^*: E_1^{*,*}(QCC) \rightarrow E_1^{*,*}(M, f)$$

описан в [3]. Из этого описания вытекает, что он не зависит от выбора последовательности сечений $s_1, s_2, \dots$. Следовательно, гомоморфизм всех последующих членов также не зависит от этого выбора.

Утверждение о том, что гомоморфизм $\varkappa_\pi^*$ характеристический, вытекает из его конструкции. Утверждение 1 теоремы 3.2 доказано.

2. Для доказательства утверждения 2 достаточно построить S^1 -расслоение $p: E \rightarrow B$ и функцию f на его тотальном пространстве, для которых гомоморфизм $\varkappa_p^*$ спектральных последовательностей и соответствующий гомоморфизм в когомологиях являются изоморфизмами.

Комплексная единичная окружность $S^1 = SU(1)$ действует умножением на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. На пространстве $C^\infty(S^1)$ гладких функций на окружности группа S^1 также естественно действует сдвигами аргумента. Рассмотрим пространство $E' = C^\infty(S^1) \oplus \mathbb{C}^\infty = C^\infty(S^1) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \dots$ с диагональным действием группы S^1 . Это пространство стягиваемо, и все его гомотопические группы тривиальны. Пусть $E \subset E'$ — объединение регулярных орбит. Дополнение $E' \setminus E$ имеет бесконечную коразмерность, и, следовательно, все гомотопические группы пространства E также тривиальны. Отсюда вытекает, что естественная проекция $p: E \rightarrow B$ на пространство орбит может рассматриваться как классифицирующее S^1 -расслоение.

Проекция на первый сомножитель определяет функцию f на E . Проекция на i -й сомножитель в $\mathbb{C}^\infty$ определяет естественное сечение s_i в ассоциированном векторном расслоении $\tilde{p}$. Набор этих данных задает детальную классификацию точек на пространстве B . Страты этой классификации описываются следующим образом. Они изоморфны пространству всех гладких функций на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с предписанным количеством l критических точек глобального минимума $x_1, \dots, x_l$ предписанных кратностей $a_1, \dots, a_l$, которые удовлетворяют одному из двух условий: $0 < x_1 < \dots < x_l < 2\pi$, либо $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_l < 2\pi$ в зависимости от четности строки в бикомплексе $QCC^{*,*}$, на которой расположена образующая, соответствующая данному страту. В обоих случаях соответствующий страт является гладким стягиваемым подпространством конечной коразмерности в B . Следовательно, полученная детальная классификация на B образует «клеточное разбиение» и комплекс QCC^* — это просто коцепной комплекс этого клеточного разбиения. Отсюда вытекает утверждение 2 теоремы 3.2.

Чтобы сделать приведенные рассуждения корректными, нужно избежать рассмотрения бесконечномерных пространств. Это можно сделать следующим образом. Заменим пространство всех гладких функций конечномерным пространством F_N многочленов Фурье степени не выше N . Аналогично заменим $\mathbb{C}^\infty$

на $\mathbb{C}^N$. Для каждого фиксированного d найдется достаточно большое $N = N(d)$, такое, что пространство нерегулярных орбит в $E'_d = F_N \oplus \mathbb{C}^N$ под действием окружности имеет коразмерность, большую чем d . Отсюда следует, что подпространство $E_d \subset E'_d$, состоящее из регулярных орбит, имеет тривиальные гомотопические группы до порядка d . Следовательно, когомологии факторпространства $B_d = E_d/S^1$ изоморфны когомологиям классифицирующего пространства BS^1 во всех размерностях, меньших чем d . С другой стороны, рассуждения, подобные приведенным выше, показывают, что гомоморфизм $\varkappa_{\pi_d}^*$ спектральных последовательностей и групп когомологий для естественного детального разбиения на B_d также являются изоморфизмами во всех размерностях, меньших чем d . Поскольку d произвольно, утверждение 2 доказано.

3. Пусть гомоморфизм $\varkappa_\pi^*: QHC^* \rightarrow H^*(M)$ построен при помощи функции f , заданной на пространстве расслоения π , и набора сечений $s_1, s_2, \dots$ ассоциированного линейного расслоения $\tilde{\pi}$. Нам нужно показать, что для любого элемента $\eta \in QHC^*$ выполняется $\varkappa_\pi^*(S\eta) = \varkappa_\pi^*(\eta) \smile e(\pi) \in H^*(M)$.

Обозначим через $Z \subset M$ множество нулей сечения s_1 и через π_Z ограничение на Z расслоения π . Подмногообразие Z коразмерности 2 гладко и коориентированно. Гомоморфизм $\varkappa_{\pi_Z}^*$ может быть построен при помощи ограничения на Z сечений $s_2, s_3, \dots$. Элемент $\varkappa_{\pi_Z}^*(\eta) \in H^*(Z)$ задается пересечением с некоторым коориентированным циклом, лежащим в Z . По определению гомоморфизма S^* пересечение с тем же самым циклом, рассматриваемым как цикл в M , определяет класс $\varkappa_\pi^*(S^*\eta) \in H^*(M)$. Отсюда вытекает

$$\varkappa_\pi^*(S^*\eta) = i_* \varkappa_{\pi_Z}^*(\eta) \in H^*(M),$$

где $i: Z \rightarrow M$ — естественное вложение и i_* — гомоморфизм Гизина в когомологиях. Напомним, что одним из основных свойств гомоморфизма Гизина является тождество

$$i_*(i^*\alpha \smile \beta) = \alpha \smile i_*(\beta)$$

для любых $\alpha \in H^*(M)$, $\beta \in H^*(Z)$. Заметим, что по утверждению 2 класс $\varkappa_\pi^*(\eta)$ характеристический, т.е. $\varkappa_{\pi_Z}^*\eta = i^*\varkappa_\pi^*\eta$. Следовательно, применяя приведенное тождество к $\varkappa_{\pi_Z}^*(\eta) \in H^*(M)$, $1 \in H^*(Z)$, получаем

$$i_* \varkappa_{\pi_Z}^*(\eta) = \varkappa_\pi^*(\eta) \smile i_*(1).$$

Класс когомологий $i_*(1)$ задается пересечением с подмногообразием Z . Утверждение о том, что множество нулей сечения двойственно по Пуанкаре классу Эйлера расслоения, является классическим. Это завершает доказательство теоремы 3.2.

§4. Варианты комплекса QCC и циклические гомологии

4.1. Бикомплекс, аналогичный QCC , может быть определен для любой градуированной алгебры B с фиксированным однородным элементом $q \in B$. Например, пусть $B = k[p]p = k[p]/k$ и $q = p^2$. Формулы (1), (2) задают коцепные комплексы (C^*, β) , (C^*, β') , где $C^* = \prod_{l \geq 1} B^{\otimes l}$. Оба дифференциала сохраняют разложение $C^* = C_{\text{odd}}^* \oplus C_{\text{ev}}^*$, где C_{odd}^* и C_{ev}^* порождены элементами $[b_1, \dots, b_l]$,

для которых $\sum \deg b_i$ нечетно и четно соответственно. Подкомплекс в C_{ev}^* , порожденный элементами $[b_1, \dots, b_l]$, для которых все b_i имеют четную степень (по p), изоморфен комплексу C^* , введенному в §2. Положим $C_{+\text{ev}}^* = C_{\text{ev}}^*/C^*$. В той же степени, в которой комплекс $QCC^{*,*}$, введенный в §2, связан с классификацией уровня глобального минимума функций на окружности, бикомплексы $QCC_{\text{ev}}^{*,*}$ и $QCC_{+\text{ev}}^{*,*}$, ассоциированные с комплексами C_{ev}^* и $C_{+\text{ev}}^*$, связаны с классификациями множеств нулевого уровня и множеств критических точек функций на окружности соответственно. Образующая $[p^{u_1}, \dots, p^{u_l}]$ соответствует функциям с l последовательными нулями (критическими точками) кратностей $u_1, \dots, u_l$. Основное отличие состоит в том, что эти комплексы имеют бесконечное число образующих в каждой степени (функция может иметь как угодно много невырожденных нулей или критических точек), так что мы допускаем бесконечные суммы образующих.

Можно показать (см. [3]), что бикомплекс QCC_{ev} ацикличен (это связано с тем, что пространство функций на окружности стягивается на подпространство положительных функций, для которых множество нулевого уровня пусто). Следовательно, когомологии комплекса $QCC_{+\text{ev}}$ естественно изоморфны группе $QH C^* \cong H^*(BS^1)$. Мы не будем формулировать аналоги теорем 3.1 и 3.2 для классификации множеств критических точек, а только дадим геометрическое следствие этих результатов.

Дискриминантом функции на пространстве S^1 -расслоения π называется подмножество точек базы M , в которых ограничение функции на слой имеет вырожденные критические точки.

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Все степени класса Чженя–Эйлера расслоения $e(\pi)^n \in H^{2n}(M)$ могут быть выражены как классы, двойственные по Пуанкаре определенным $\mathbb{Q}$ -линейным комбинациям стратов дискриминанта.*

Соотношения $e^0 = [p, p] + [p, p, p, p] + \dots$ и $S = -\beta h \beta' h'$ дают рекуррентную формулу для нахождения частных представителей таких линейных комбинаций. Выражение для $e(\pi) \in H^2(M)$ выписано в [3], см. также [4].

Комплекс C_{odd}^* связан с классификацией нечетных функций на окружности, см. [3].

4.3. Пусть A — ассоциативная k -алгебра с единицей. Положим $B = A[q] = A \otimes k[q]$, $C^*(A) = \prod_{l \geq 0} B^{\otimes l}$. Определим дифференциалы β, β' на $C^*(A)$ и бикомплекс $QCC^{*,*}(A)$, используя те же формулы (1) и (2). Если положить $q = 0$, то $B^{\otimes l} = A^{\otimes l}$ и бикомплекс $QCC^{*,*}$ превратится в бикомплекс, вычисляющий «отрицательные» циклические гомологии алгебры A , см. [5]. При $q \neq 0$ ε -составляющая дифференциала β «перемешивает» степени в $\prod A^{\otimes l}$, так что мы изменяем градуировку в $C^*(A)$, полагая $\deg[b_1, \dots, b_l] = \sum_{i=1}^l (2 \deg b_i - 1) - 1$. Основное отличие в этом случае от ситуации, рассмотренной в §2, состоит в том, что полученный бикомплекс $QCC^{*,*}(A)$ имеет нетривиальные элементы как в положительных, так и в отрицательных степенях.

Обозначим через $C^*(A)$ и $QCC^{*,*}(A)$ подкомплексы в $C^*(A)$ и $QCC^{*,*}(A)$, порожденные элементами $[b_1, \dots, b_l]$, для которых по крайней мере одно из b_i имеет положительную степень.

4.4. ТЕОРЕМА. *Бикомплекс $QCC^{*,*}(A)$ ацикличен. Следовательно, когомологии бикомплекса $QCC^{*,*}(A)$ естественно изоморфны отрицательным циклическим гомологиям алгебры A .*

Этот результат показывает, что все конструкции теории циклических гомологий имеют q -аналоги, которые приводят к изоморфным объектам. В частности, все операции, такие, как гомоморфизм периодичности или умножение, могут быть определены в терминах этих деформированных комплексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если воспользоваться спектральными последовательностями, то достаточно показать, что комплексы $(C^*(A), \delta)$ и $(C^*(A), \varepsilon')$ ацикличны. Для первого мы имеем стягивающую гомотопию

$$\tilde{r}[b_1, \dots, b_l] = [1, b_1, \dots, b_l]$$

(то же рассуждение показывает, что и комплекс $C^*(A)$ является δ -ацикличным, и, следовательно, β -ацикличным).

Для комплекса $(C^*(A), \varepsilon')$ рассмотрим фильтрацию $F_1 C^*(A) \subset F_2 C^*(A) \subset \dots \subset C^*(A)$, у которой i -й член порожден однородными элементами $[b_1, \dots, b_l]$, для которых хотя бы один одночлен из $b_1, \dots, b_l$ имеет положительную степень. Член $F_1 C^*(A)$ фильтрации имеет стягивающую гомотопию

$$\tilde{s}[b_1, \dots, b_l] = [b_1(b_2/q), b_3, \dots, b_l]$$

(мы полагаем здесь $b_2/q = 0$, если $\deg b_2 = 0$) и, следовательно, ацикличен. Аналогично фактор $F_{i+1} C^*(A)/F_i C^*(A)$ имеет стягивающую гомотопию $\tau^i \tilde{s} \tau^{-i}$. Отсюда вытекает, что комплекс $C^*(A)$ ацикличен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 6, ВИНТИ, М., 1985.
2. Kazarian M. È. Characteristic classes of singularity theory. In: Geometry and Singularity Theory, Arnold–Gelfand Seminar, V. I. Arnold, I. M. Gelfand, M. M. Smirnov, eds., Birkhäuser, 1996 (в печати).
3. Kazarian M. È. Singularities of functions on the circle and relative Morse theory (в печати).
4. Kazarian M. È. The Chern–Euler number of circle bundle via singularity theory (в печати).
5. Loday R. Cyclic Homology. Springer-Verlag, 1991.
6. Thom R. Generalisation de la theorie de Morse aux variétés feuilletées. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **14**, 173–190 (1964).
7. Vassiliev V. A. Lagrange and Legendre Characteristic Classes. 2nd edition, Gordon and Breach, 1993.