Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Кричевер, Алгебро-геометрические п-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 32–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 11:11:53

УДК 517.9

Алгебро-геометрические n -ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности

© 1997. И. М. КРИЧЕВЕР

§1. Введение

Более века, начиная со знаменитой работы Дюпена и Бинэ, опубликованной в 1810 г., проблема построения n -ортогональных криволинейных систем координат или *плоских* диагональных метрик

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n H_i^2(u) (du^i)^2, \quad u = (u^1, \dots, u^n), \quad (1.1)$$

относилась к числу важнейших проблем дифференциальной геометрии. Как задача классификации она была в основном решена в начале этого века. Решающий вклад в богатую историю этой проблемы внес Дарбу в своей монографии [1].

Современный интерес к этой классической проблеме возник в начале 80-х годов, когда обнаружили ее глубокие связи с теорией интегрируемых квазилинейных $(1+1)$ -мерных систем гидродинамического типа [2–4]. Теория таких систем была построена в работах Дубровина и Новикова как гамильтонова теория усредненных уравнений (уравнений Уизема) для периодических решений интегрируемых одномерных эволюционных уравнений теории солитонов. Позже в работе [5] было отмечено, что проблема классификации так называемых егоровских метрик, т.е. плоских диагональных метрик, таких, что

$$\partial_j H_i^2 = \partial_i H_j^2, \quad \partial_i = \partial / \partial u^i, \quad (1.2)$$

эквивалентна проблеме классификации массивных топологических моделей теории поля. Заметим, что условие (1.2) означает, что существует функция $\Phi(u)$, называемая потенциалом соответствующей метрики, такая, что $H_i^2(u) = \partial_i \Phi(u)$. Следует подчеркнуть, что «классические» результаты в теории n -ортогональных криволинейных систем координат носили в основном классификационный характер. Было показано, что локально общее решение уравнений Ламе

$$\partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \quad (1.3)$$

$$\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} = 0, \quad i \neq j, \quad (1.4)$$

для так называемых коэффициентов вращения

$$\beta_{ij} = \partial_i H_j / H_i, \quad i \neq j, \quad (1.5)$$

зависит от $n(n-1)/2$ произвольных функций двух переменных. Уравнения (1.3), (1.4) эквивалентны условиям зануления всех, априори ненулевых, коэффициентов тензора кривизны. (Уравнения (1.3) эквивалентны равенствам $R_{ij,ik} = 0$, а уравнения (1.4) означают, что равны нулю остальные коэффициенты $R_{ij,ij} = 0$.)

Если решение уравнений (1.3), (1.4) найдено, то соответствующие коэффициенты Ламе H_i могут быть получены как решения системы линейных уравнений (1.5), совместность которых эквивалентна (1.3). Они зависят от n произвольных функций одной переменной, которые являются данными Коши для системы (1.5),

$$f_i(u^i) = H_i(0, \dots, 0, u^i, 0, \dots, 0). \quad (1.6)$$

После этого плоские координаты $x^k(u)$ можно найти из системы линейных уравнений

$$\partial_{ij}^2 x^k = \Gamma_{ij}^i \partial_i x^k + \Gamma_{ji}^j \partial_j x^k, \quad (1.7)$$

$$\partial_{ii}^2 x^k = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ii}^j \partial_j x^k, \quad (1.8)$$

где Γ_{ij}^k — коэффициенты Кристоффеля метрики (1.1):

$$\Gamma_{ik}^i = \partial_k H_i / H_i, \quad \Gamma_{ii}^j = -H_i \partial_i H_i / H_i^2, \quad i \neq j. \quad (1.9)$$

Изложенная схема недостаточно эффективна для явного построения n -ортогональных криволинейных систем координат. Как следствие список явных примеров таких координат сравнительно невелик. Недавно он значительно пополнился за счет примеров, полученных в рамках теории Уизема. Например, в работе автора [6] было показано, что пространства модулей алгебраических кривых с фиксированными ростками локальных координат в отмеченных точках порождают плоские диагональные метрики.

В самое последнее время в работе Захарова [7] было обнаружено, что широкий класс решений уравнений (1.3) и (1.4) может быть получен в рамках процедуры «одевания», широко известной в теории интегрируемых солитонных уравнений. Уравнения (1.3) эквивалентны условиям совместности для системы вспомогательных линейных уравнений $\partial_i \Psi_j = \beta_{ij} \Psi_i$, $i \neq k$. Следовательно, любая известная в рамках метода обратной задачи схема может быть сравнительно легко применена для построения точных решений уравнений (1.3). Это может быть процедура одевания или, например, алгебро-геометрические конструкции теории конечнозонных решений нелинейных уравнений. При таком подходе решающим является выделение среди построенных решений тех, которые удовлетворяют соотношениям (1.4). Как было замечено в [8], метод *дифференциальной редукции*, предложенный в [7] для решения последней задачи в рамках метода одевания, допускает естественную интерпретацию в терминах так называемой $\bar{\partial}$ -проблемы.

Основной целью настоящей работы является не столько построение конечно-зонных или алгебро-геометрических решений уравнений Ламе, как разработка схемы, в рамках которой можно одновременно решить всю систему уравнений (1.3)–(1.9), т.е. получить вместе с коэффициентами Ламе и плоские координаты $x^i(u)$.

На первый взгляд предлагаемый подход к построению плоских диагональных метрик никак не связан с идеями конструкций из [7] и [8]. Мы рассматриваем базисные *многоточечные* функции Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q)$, однозначно определяемые их аналитическими свойствами на вспомогательных римановых поверхностях Γ , $Q \in \Gamma$, и непосредственно доказываем (без какого бы то ни было использования дифференциальных уравнений!), что при определенных ограничениях на исходные алгебро-геометрические данные значения $x^k(u) = \psi(u, Q_k)$ функции ψ в наборе отмеченных точек на Γ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k,l} \eta_{kl} \partial_i x^k(u) \partial_j x^l(u) = H_i^2(u) \delta_{ij}, \quad (1.10)$$

где η_{kl} — постоянная матрица. Эти уравнения означают, что $x^k(u)$ являются плоскими координатами для диагональной метрики (1.1) с коэффициентами $H_i^2(u)$. При этом оказывается, что с точностью до постоянного множителя коэффициенты Ламе $H_i(u)$ равны главным членам разложения той же самой функции ψ в точках P_i на Γ , где ψ имеет существенные особенности экспоненциального типа. Следует отметить, что ограничения на алгебро-геометрические данные, приводящие к (1.10), являются обобщениями ограничений, предложенных в работе [15] для описания потенциальных интегрируемых двумерных операторов Шрёдингера (см. также [16]).

В третьем параграфе работы мы связываем нашу конструкцию с подходом работ [7, 8] и доказываем, что функция Бейкера–Ахиезера ψ является *производящей* функцией,

$$\partial_i \psi(u, Q) = h_i(u) \Psi_i^0(u, Q), \quad H_i = \varepsilon_i h_i(u), \quad \varepsilon_i = \text{const},$$

для решений системы линейных уравнений

$$\partial_i \Psi_j^0 = \beta_{ji} \Psi_i^0, \quad \partial_i \Psi_j^1 = \beta_{ij} \Psi_i^1, \quad \partial_j \Psi_j^0 = \Psi_j^1 - \sum_{m \neq j} \beta_{mj} \Psi_m^0. \quad (1.11)$$

Подчеркнем, что условия совместности этой расширенной системы уравнений полностью эквивалентны уравнениям (1.3) и (1.4).

В четвертом параграфе мы выделяем алгебро-геометрические данные, соответствующие егоровским метрикам, и получаем точную этета-функциональную формулу для потенциалов $\Phi(u)$ построенных метрик.

Как уже отмечалось выше, в работе [5] была установлена связь задачи классификации егоровских метрик с задачей классификации моделей топологической теории поля. Последняя задача для модели, содержащей n примарных полей $\phi_1, \dots, \phi_n$, может быть сформулирована в терминах так называемых уравнений *ассоциативности* для статсуммы деформированной теории [9, 10]. Соответствующие уравнения эквивалентны условиям того, что коммутативная алгебра

с генераторами ϕ_k и структурными константами $c_{kl}^m(x)$, определяемыми третьими производными функции F :

$$c_{klm}(x) = \frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^k \partial x^l \partial x^m}, \quad (1.12)$$

$$\phi_k \phi_l = c_{kl}^m(x) \phi_m, \quad c_{kl}^m = c_{kli} \eta^{im}, \quad \eta_{ki} \eta^{im} = \delta_k^m, \quad (1.13)$$

является ассоциативной алгеброй, т. е.

$$c_{ij}^k(x) c_{km}^l(x) = c_{jm}^k(x) c_{ik}^l(x). \quad (1.14)$$

Дополнительно требуется, чтобы существовали константы r^m , такие, что элементы постоянной матрицы η в (1.13) равны

$$\eta_{kl} = r^m c_{klm}(x). \quad (1.15)$$

Равенства (1.14) являются переопределенной системой нелинейных уравнений на неизвестную функцию F . Оказывается, что для любого решения системы (1.14), (1.15), такого, что соответствующая алгебра (1.13) полупроста, существует егоровская метрика, такая, что третьи производные статсуммы равны

$$c_{klm} = \sum_{i=1}^n H_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} \frac{\partial u^i}{\partial x^m}. \quad (1.16)$$

Верно и обратное утверждение. А именно, для любого набора симметрических коэффициентов вращения $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, удовлетворяющих (1.3) и (1.4), существует n -параметрическое семейство егоровских метрик, таких, что функции, определяемые равенствами (1.16), являются третьими производными некоторой функции F . (Напомним, что каждому набору коэффициентов вращения отвечает бесконечно много плоских диагональных метрик.)

В последнем параграфе мы явно определяем для любой алгебро-геометрической егоровской метрики функцию F , такую, что ее третьи производные имеют вид (1.16) и удовлетворяют уравнениям (1.14). Эти уравнения являются усеченной системой уравнений ассоциативности. На следующем шаге мы выделяем те метрики, для которых выполнено и соотношение (1.15).

§2. Билинейные соотношения для функций Бейкера–Ахиезера и плоские диагональные метрики

В начале этого параграфа мы приведем необходимые сведения из теории алгебро-геометрического интегрирования нелинейных уравнений. Общая схема алгебро-геометрического интегрирования была предложена автором [11, 12]. В ее основе лежит понятие функций Бейкера–Ахиезера, которые определяются своими аналитическими свойствами на вспомогательных римановых поверхностях.

Рассмотрим гладкую алгебраическую кривую Γ рода g с фиксированными локальными координатами $w_i(Q)$ в окрестностях n отмеченных точек P_i , $i = 1, \dots, n$, на Γ , $w_i(P_i) = 0$. Для любого набора R из l точек R_α , $\alpha = 1, \dots, l$,

и для любого набора D из $g + l - 1$ точек $\gamma_1, \dots, \gamma_{g+l-1}$ в общем положении существует единственная функция $\psi(u, Q|D, R)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $Q \in \Gamma$, такая, что:

(1⁰) $\psi(u, Q|D, R)$ как функция переменной $Q \in \Gamma$ является мероморфной вне отмеченных точек P_j и имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s (если все они различны);

(2⁰) в окрестности точки P_j функция ψ имеет вид

$$\psi = e^{u^j w_j^{-1}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s^j(u) w_j^s \right), \quad w_j = w_j(Q); \quad (2.1)$$

(3⁰) ψ удовлетворяет условиям нормировки

$$\psi(u, R_\alpha) = 1. \quad (2.2)$$

В дальнейшем мы будем часто обозначать функцию Бейкера–Ахиезера через $\psi(u, Q)$, опуская для краткости явное указание на ее зависимость от дивизоров $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l-1}$ и $R = R_1 + \dots + R_l$.

Явные выражения функций Бейкера–Ахиезера через тэта-функции Римана были получены в [12] как обобщения формул, предложенных в работе [13] для блоховских решений конечнозонных операторов Шрёдингера.

Тэта-функцией Римана, соответствующей алгебраической кривой Γ рода g , называется целая функция g комплексных переменных $z = (z_1, \dots, z_g)$, задаваемая своим рядом Фурье

$$\theta(z_1, \dots, z_g) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(m, z) + \pi i(Bm, m)},$$

где $B = (B_{ij})$ — матрица b -периодов нормированных голоморфных дифференциалов $\omega_j(P)$ на Γ :

$$B_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j, \quad \oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}.$$

Здесь a_i, b_i — базис циклов на Γ с канонической матрицей пересечений $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0$, $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$.

Вектор $A(P)$ с координатами $A_k(Q) = \int_{q_0}^Q \omega_k$ определяет так называемое отображение Абеля.

Как следует из теоремы Римана–Роха, для дивизоров D и R в общем положении существует и единственная мероморфная функция $r_\alpha(Q)$, такая, что ее дивизор полюсов совпадает с дивизором D и $r_\alpha(R_\beta) = \delta_{\alpha, \beta}$. Эта функция может быть представлена в следующем виде (см. подробнее в [14]):

$$r_\alpha(Q) = \frac{f_\alpha(Q)}{f_\alpha(R_\alpha)}, \quad f_\alpha(Q) = \theta(A(Q) + Z_\alpha) \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} \theta(A(Q) + F_\beta)}{\prod_{m=1}^l \theta(A(Q) + S_m)}, \quad (2.3)$$

где

$$F_\beta = -\mathcal{K} - A(R_\beta) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s), \quad S_m = -\mathcal{K} - A(\gamma_{g-1+m}) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s),$$

$$Z_\alpha = Z_0 - A(R_\alpha), \quad Z_0 = -\mathcal{K} - \sum_{s=1}^{g+l-1} A(\gamma_s) + \sum_{\alpha=1}^l A(R_\alpha)$$

и $\mathcal{K}$ — вектор римановых констант.

Рассмотрим единственный нормированный мероморфный дифференциал $d\Omega_j$ на Γ , голоморфный вне точки P_j и имеющий в окрестности этой точки вид $d\Omega_j = d(w_j^{-1} + O(w_j))$. Он задает вектор $V^{(j)}$ с координатами $V_k^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} d\Omega_j$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q|D, R)$ имеет вид*

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^l r_{\alpha}(Q) \frac{\theta(A(Q) + \sum_{i=1}^n (u^i V^{(i)}) + Z_{\alpha}) \theta(Z_0)}{\theta(A(Q) + Z_{\alpha}) \theta(\sum_{i=1}^n (u^i V^{(i)}) + Z_0)} \exp \left(\sum_{i=1}^n u^i \int_{R_{\alpha}}^Q d\Omega_i \right).$$

Допустимые кривые. Как будет показано ниже, алгебро-геометрические плоские диагональные метрики строятся с помощью функций Бейкера–Ахиезера, отвечающих специальным алгебро-геометрическим данным, которые в дальнейшем мы будем называть допустимыми.

Допустимая алгебраическая кривая Γ должна обладать голоморфной инволюцией $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, имеющей $2m \geq n$ неподвижных точек $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_{2m-n}$, $m \leq n$. Локальные координаты $w_j(Q)$ в окрестностях точек $P_1, \dots, P_n$ должны быть нечетными относительно инволюции:

$$w_j(Q) = -w_j(\sigma(Q)).$$

Факторкривая $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ является гладкой алгебраической кривой. Проекция $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ представляет Γ как двулистное накрытие над Γ_0 с $2m$ точками ветвления P_j, Q_s . В этой реализации инволюция σ является просто перестановкой листов. Для $Q \in \Gamma$ точка $\sigma(Q)$ будет обозначаться через Q^{σ} .

Из теоремы Римана–Гурвица следует соотношение $g = 2g_0 - 1 + m$, где g_0 — род кривой Γ_0 .

Допустимые дивизоры. Зафиксируем на Γ_0 дополнительно набор из $n - m$ точек $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_{n-m}$. Пара дивизоров D и R на Γ будет называться допустимой, если на Γ_0 существует мероморфный дифференциал $d\Omega_0$, такой, что

(а) $d\Omega_0(P)$, $P \in \Gamma_0$, имеет $m+l$ простых полюсов в точках $Q_1, \dots, Q_{2m-n}, \hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_{n-m}$ и точках $\hat{R}_{\alpha} = \pi(R_{\alpha})$;

(б) дифференциал $d\Omega_0$ обращается в нуль в проекциях $\hat{\gamma}_s$ точек дивизора D ,

$$d\Omega_0(\hat{\gamma}_s) = 0, \quad \hat{\gamma}_s = \pi(\gamma_s).$$

Дифференциал $d\Omega_0$ можно рассматривать как четный мероморфный дифференциал на накрывающей Γ , где он имеет $n + 2l$ простых полюсов в точках ветвления $Q_1, \dots, Q_{2m-n}$ и в прообразах остальных полюсов этого дифференциала на Γ_0 . Обозначим прообразы точек $\hat{Q}_k$ через $Q_{2m-n+1}, \dots, Q_{2m}$:

$$\pi(Q_{2m-n+i}) = \pi(Q_{n-i+1}) = \hat{Q}_i, \quad i = 1, \dots, n - m.$$

Инволюция σ индуцирует инволюцию $\sigma(k)$ индексов, нумерующих точки Q_k , $\sigma(Q_k) = Q_{\sigma(k)}$:

$$\sigma(k) = k, \quad k = 1, \dots, 2m - n, \quad \sigma(k) = 2m - k + 1, \quad k = 2m - n + 1, \dots, n.$$

Из определения допустимых пар дивизоров следует, что их классы линейной эквивалентности удовлетворяют соотношению

$$D + D^\sigma - R - R^\sigma = K + \sum_{j=1}^n (Q_j - P_j).$$

ПРИМЕР. *Гиперэллиптические кривые.* Простейшими примерами допустимых кривых являются гиперэллиптические кривые. Рассмотрим гиперэллиптическую кривую Γ , заданную уравнением

$$\lambda^2 = \frac{\prod_{j=1}^{2m-n} (E - Q_j) \prod_{k=1}^{n-m} (E - \hat{Q}_k)^2}{\prod_{i=1}^n (E - P_i)}, \quad m \leq n. \quad (2.4)$$

Здесь $P_i, Q_j, \hat{Q}_k$ — комплексные числа. Род кривой Γ равен $g = m - 1$. Любой набор из $m + l - 2$ точек $\gamma_s, \gamma_s \neq \gamma_{s'}$, и любой набор из l точек являются допустимой парой дивизоров. Соответствующий дифференциал равен

$$d\Omega_0 = \frac{\prod_{s=1}^{m+l-2} (E - \gamma_s)}{\prod_{j=1}^{2m-n} (E - Q_j) \prod_{k=1}^{n-m} (E - \hat{Q}_k) \prod_{\alpha=1}^l (E - R_\alpha)} dE.$$

Как будет показано в дальнейшем, плоские диагональные метрики, соответствующие гиперэллиптическим кривым, являются егоровскими метриками. Более того, в заключительном параграфе будет показано, что гиперэллиптическим кривым отвечают и простейшие решения уравнений ассоциативности.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшей основной части работы мы для простоты формул будем предполагать, если не оговорено противное, что дивизор R и дивизор точек Q_j находятся в общем положении и не пересекаются друг с другом. В последнем параграфе мы специально рассмотрим случай, когда эти дивизоры совпадают.

ТЕОРЕМА 2.2. *Рассмотрим функцию Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q | D, R)$, отвечающую допустимой кривой и допустимой паре дивизоров D и R . Тогда функции $x^j(u) = \psi(u, Q_j)$, $j = 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{k,l} \eta_{kl} \partial_i x^k \partial_j x^l = \varepsilon_i^2 h_i^2 \delta_{ij}, \quad (2.5)$$

где $h_i = \xi_0^i(u)$ равны первым коэффициентам разложений (2.1), константы ε_i^2 определяются разложением дифференциала $d\Omega_0$ в точках P_i :

$$d\Omega_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_i^2 + O(w_i^0)) dw_i^0 = w_i(\varepsilon_i^2 + O(w_i^2)) dw_i, \quad (2.6)$$

и, наконец,

$$\eta_{kl} = \eta_k \delta_{k, \sigma(l)}, \quad \eta_k = \operatorname{res}_{Q_k} d\Omega_0. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим дифференциал

$$d\Omega_{ij}^{(1)}(u, Q) = \partial_i \psi(u, Q) \partial_j \psi(u, \sigma(Q)) d\Omega_0(\pi(Q)).$$

Из определения допустимых данных следует, что для $i \neq j$ он является мероморфным дифференциалом с полюсами в точках $Q_1, \dots, Q_n$. Действительно, полюсы первых двух сомножителей $\partial_i \psi_i(u, Q)$ и $\partial_j \psi(u, \sigma(Q))$ в точках γ_s и $\sigma(\gamma_s)$ сокращаются с нулями дифференциала $d\Omega_0$. Существенные особенности этих же сомножителей в точках P_k сокращаются друг с другом. Кроме того, простые полюсы произведения первых двух сомножителей в точках P_i и P_j сокращаются с нулями $d\Omega_0$, рассматриваемого как дифференциал на Γ ; см. (2.6). Наконец, $d\Omega^{(1)}$ не имеет полюсов в точках R_α и R_α^σ в силу нормировочных условий (2.2). Сумма всех вычетов мероморфного дифференциала на компактной римановой поверхности должна равняться нулю. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{Q_k} d\Omega_{ij}^{(1)} = 0, \quad i \neq j.$$

Левая часть этого равенства совпадает с левой частью равенства (2.5).

В случае $i = j$ дифференциал $d\Omega_{ii}^{(1)}$ имеет дополнительно простой полюс в точке P_i с вычетом $\operatorname{res}_{P_i} d\Omega_{ii}^{(1)} = -\varepsilon_i^2 h_i^2$. Последнее равенство доказывает (2.5) для $i = j$ и завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Для любого набора допустимых данных $\{\Gamma, P_i, Q_j, D, R\}$ формула*

$$H_i(u) = \varepsilon_i \sum_{\alpha=1}^l r_\alpha(P_i) \frac{\theta(A(P_i) + \sum_{i=1}^n (u^i V^{(i)}) + Z_\alpha) \theta(Z_0)}{\theta(A(P_i) + Z_\alpha) \theta(\sum_{i=1}^n (u^i V^{(i)}) + Z_0)} \exp \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij}^\alpha u^j \right), \quad (2.8)$$

где функция $r_\alpha(Q)$ определена равенством (2.3),

$$\omega_{ij}^\alpha = \int_{R_\alpha}^{P_i} d\Omega_j, \quad i \neq j, \quad \omega_{ii}^\alpha = \lim_{Q \rightarrow P_i} \left(\int_{R_\alpha}^Q d\Omega_i - w_i^{-1}(Q) \right),$$

определяет коэффициенты плоской диагональной метрики. Соответствующие плоские координаты даются формулами

$$x^k(u) = \sum_{\alpha=1}^l r_\alpha(Q_k) x_\alpha^k(u),$$

$$x_\alpha^k(u) = \frac{\theta(A(Q_k) + \sum_{i=1}^n (u^i V^{(i)}) + Z_\alpha) \theta(Z_0)}{\theta(A(Q_k) + Z_\alpha) \theta(\sum_{i=1}^n (u^i V^{(i)}) + Z_0)} \exp \left(\sum_{i=1}^n u^i \int_{R_\alpha}^{Q_k} d\Omega_i \right).$$

Условия вещественности. В общем случае коэффициенты $H_i(u)$ построенных алгебро-геометрических плоских диагональных метрик и соответствующие им плоские координаты являются мероморфными функциями переменных u^i . Приведем условия на алгебро-геометрические данные, достаточные для того, чтобы соответствующие коэффициенты метрик были вещественными функциями вещественных переменных u^i .

Пусть Γ_0 — вещественная алгебраическая кривая, т.е. кривая с антиголоморфной инволюцией $\tau_0: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$, и пусть точки $\{P_1, \dots, P_n\}$ и $\{Q_1, \dots, Q_{2m-n}\}$ являются неподвижными точками инволюции τ_0 . В этом случае τ_0 индуцирует антиголоморфную инволюцию τ кривой Γ . Мы предполагаем, что

локальные координаты w_j в точках P_j удовлетворяют условию $w_j(\tau(Q)) = \overline{w_j(Q)}$. Предположим также, что наборы точек Q_k и дивизоры D , R инвариантны относительно τ :

$$\tau(Q_j) = Q_{\kappa(j)}, \quad \tau(R_\alpha) = R_{\kappa_1(\alpha)}, \quad \tau(\gamma_s) = \gamma_{\kappa_2(s)}.$$

Здесь $\kappa_i(\cdot)$ — соответствующие перестановки индексов.

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что набор алгебро-геометрических данных является вещественным. Тогда соответствующая функция Бейкера–Ахиезера удовлетворяет равенству*

$$\psi(u, Q|D, R) = \overline{\psi(u, \tau(Q)|D, R)}$$

и формула (2.8) определяет вещественную плоскую диагональную метрику.

Сигнатура соответствующей метрики зависит от инволюций $\kappa(j)$ и $\kappa_1(\alpha)$. Варьируя выбор начальных данных, можно получить плоские диагональные метрики в любых псевдоевклидовых пространствах $R^{p,q}$. В общем случае метрики являются сингулярными при некоторых значениях переменных u^i . Для получения гладких метрик следует еще ограничить начальные данные. Техника получения подобных ограничений относительно стандартна в теории конечнозонного интегрирования. Мы планируем рассмотреть этот вопрос подробнее в дальнейшем.

§3. Дифференциальные уравнения для функции Бейкера–Ахиезера

В этом параграфе мы поясним значение наших ограничений на алгебро-геометрические данные с точки зрения дифференциальных уравнений для функции Бейкера–Ахиезера.

Следующее утверждение — простое обобщение результатов работы [17], в которой для случая $n = 2$ было доказано, что соответствующие функции Бейкера–Ахиезера являются решениями двумерного оператора Шрёдингера.

ЛЕММА 3.1. *Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q|D, R)$ удовлетворяет уравнениям*

$$\partial_i \partial_j \psi = c_{ij}^i \partial_i \psi + c_{ij}^j \partial_j \psi, \quad i \neq j, \quad (3.1)$$

где

$$c_{ij}^i(u) = \partial_j h_i / h_i, \quad c_{ij}^j(u) = \partial_i h_j / h_j$$

и $h_i(u) = \xi_0^i(u)$ являются первыми коэффициентами разложения (2.1).

Уравнения (3.1) имеют вид уравнений (1.7), представляющих собой часть уравнений для плоских координат метрики с коэффициентами $H_i(u) = \varepsilon_i h_i(u)$, где ε_i — константы. Приведем теперь дополнительные уравнения, которым удовлетворяют функции Бейкера–Ахиезера и которые в случае допустимых алгебро-геометрических данных превращаются в уравнения (1.8).

Рассмотрим алгебро-геометрические данные $\{\Gamma, P_j, w_j, \gamma_s, R_\alpha\}$, задающие функцию Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q|D, R)$. Зафиксируем дополнительно набор

из n точек $Q_1, \dots, Q_n$. Тогда в случае общего положения существует единственная функция $\psi^1 = \psi^1(u, Q|D, R)$, такая, что

(1¹) $\psi^1(u, Q)$ как функция переменной $Q \in \Gamma$ мероморфна вне отмеченных точек P_j , имеет не более чем простые полюсы в точках γ_s и равна нулю в точках $Q_1, \dots, Q_n$:

$$\psi^1(u, Q_k) = 0;$$

(2¹) в окрестности точки P_j функция ψ^1 имеет вид

$$\psi^1 = w_j^{-1} e^{u^j w_j^{-1}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{1,s}^j(u) w_j^s \right), \quad w_j = w_j(Q); \quad (3.2)$$

(3¹) ψ^1 удовлетворяет условиям нормировки $\psi^1(u, R_\alpha|D, R) = 1$.

ЛЕММА 3.2. *Функции $\psi(u, Q|D, R)$ и $\psi^1(u, Q|D, R)$ удовлетворяют уравнениям*

$$\partial_i^2 \psi - c_i^1 \partial_i \psi^1 + \sum_{j=1}^n v_{ij} \partial_j \psi = 0, \quad (3.3)$$

где

$$c_i^1 = \frac{h_i}{h_i^1}, \quad v_{ii} = \frac{\partial_i h_i^1}{h_i^1} - 2 \frac{\partial_i h_i}{h_i} + \frac{g_i^1}{h_i^1} - \frac{g_i}{h_i}, \quad (3.4)$$

$$v_{ij} = \frac{h_i}{h_j} \frac{\partial_i h_j^1}{h_i^1}, \quad i \neq j, \quad (3.5)$$

и функции $h_i = \xi_0^i$, $h_i^1 = \xi_{1,0}^i$, $g_i = \xi_1^i$, $g_i^1 = \xi_{1,1}^i$ равны первым коэффициентам разложений (2.1) и (3.2).

Для доказательства рассмотрим функцию, определенную левой частью равенства (3.3). Из формул (3.4) и (3.5) следует, что она удовлетворяет первым двум условиям, определяющим функцию ψ , и равна нулю во всех точках R_α . Следовательно, она тождественно равна нулю.

Рассмотрим теперь случай допустимых алгебро-геометрических данных. (В этом случае набор точек Q_i в определении функции ψ^1 является тем же набором, который фигурирует в определении допустимых пар дивизоров, т.е. $Q_1, \dots, Q_{2m-n}$ — точки ветвления, а $Q_{2m-n+1}, \dots, Q_{2n}$ — прообразы точек $\hat{Q}_k$.)

ТЕОРЕМА 3.1. *Функции Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q|D, R)$ и $\psi^1(u, Q|D, R)$, отвечающие допустимым алгебро-геометрическим данным, удовлетворяют уравнениям (3.1) и уравнениям*

$$\partial_i^2 \psi = c_i^1 \partial_i \psi^1 + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ii}^j \partial_j \psi. \quad (3.6)$$

Здесь Γ_{ii}^j — символы Кристоффеля (1.9) метрики $H_i(u) = \varepsilon_i h_i(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференциал

$$d\Omega_{ij}^{(2)} = \partial_i \psi^1(u, Q) \partial_j \psi(u, Q^\sigma) d\Omega_0(\pi(Q))$$

голоморфен вне точек P_i и P_j . Его вычеты в этих точках равны

$$\operatorname{res}_{P_i} d\Omega_{ij}^{(2)} = \varepsilon_i^2 h_i^1 \partial_j h_i, \quad \operatorname{res}_{P_j} d\Omega_{ij}^{(2)} = -\varepsilon_j^2 h_j \partial_i h_j^1.$$

Следовательно, $\varepsilon_i^2 h_i^1 \partial_j h_i = \varepsilon_j^2 h_j \partial_i h_j^1$. Из последней формулы вытекает, что коэффициенты v_{ij} в (3.5) для $i \neq j$ равны Γ_{ii}^j .

Дифференциал $d\Omega_{ii}^1$ имеет единственный полюс в точке P_i . Следовательно, его вычет в этой точке равен нулю:

$$\operatorname{res}_{P_i} d\Omega_{ii}^1 = h_i^1(g_i + \partial_i h_i) - h_i(g_i^1 + \partial_i h_i^1) = 0. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что коэффициент v_{ii} , заданный формулой (3.4), равен Γ_{ii}^i .

Отметим еще раз, что в точках Q_j равенство (3.6) совпадает с (1.8).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Функции*

$$\Psi_i^0(u, Q) = \frac{1}{h_i(u)} \partial_i \psi(u, Q), \quad \Psi_i^1(u, Q) = \frac{1}{h_i^1(u)} \partial_i \psi^1(u, Q) \quad (3.8)$$

удовлетворяют уравнениям (1.11), где $\beta_{ij}(u)$ являются коэффициентами вращения (1.5) метрики $H_i(u)$.

Доказательство следствия вытекает из простой подстановки (3.8) в (3.1) и (3.6).

Из определения функции Бейкера–Ахиезера следует, что функции $\Psi_i^0(u, Q)$ и $\Psi_i^1(u, Q)$ имеют следующие аналитические свойства на кривой Γ :

(1²) $\Psi_i^N(u, Q)$, $N = 0, 1$ мероморфны вне точек P_j и имеют не более чем простые полюсы в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_{g+l-1}$;

(2²) в окрестности точки P_j функция Ψ_i^N имеет вид

$$\Psi_i^N = w_j^{-N-1} e^{u_j w_j^{-1}} \left(\delta_{ij} + \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_{s,N}^{ij}(u) w_j^s \right), \quad w_j = w_j(Q); \quad (3.9)$$

(3²) функции Ψ_i^N равны нулю в точках R_α , а функции Ψ_i^1 , кроме того, равны нулю в точках Q_j :

$$\Psi_i^N(u, R_\alpha) = 0, \quad \Psi_i^1(u, Q_j) = 0.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть Γ является гладкой алгебраической кривой рода g с фиксированными $2n$ точками P_j , Q_j и фиксированными локальными координатами $w_j(Q)$ в окрестностях точек P_j . Тогда для любого набора $g+l-1$ точек γ_s в общем положении существуют единственные функции $\Psi_i^0(u, Q)$ и $\Psi_i^1(u, Q)$, удовлетворяющие сформулированным выше условиям (1²)–(3²).

При заданной допустимой кривой Γ с отмеченными точками P_i , Q_i и фиксированными локальными координатами w_i функции Бейкера–Ахиезера и соответствующие коэффициенты $H_i(u|D, R)$ плоской диагональной метрики зависят от допустимой пары дивизоров D и R . Две пары дивизоров D , R и D' , R' будем называть эквивалентными, если линейно эквивалентны их разности $D - R$

и $D' - R'$, т.е. если существует мероморфная функция $f(Q)$ на Γ , такая, что дивизор ее полюсов и дивизор ее нулей равны

$$(f)_{\infty} = D + R', \quad (f)_0 = D' + R \quad (3.10)$$

соответственно. Из утверждения леммы 3.3 следует справедливость такого утверждения:

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u|D, R)$ и $\beta_{ij}(u|D', R')$, соответствующие эквивалентным парам дивизоров, удовлетворяют соотношениям*

$$f(P_i) \beta_{ij}(u|D, R) = f(P_j) \beta_{ij}(u|D', R'),$$

где $f(Q)$ — функция, такая, что выполнено (3.10).

Выразим коэффициенты вращения в терминах лишь функции $\Psi_i^1(u, Q|D, R)$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u)$ алгебро-геометрической метрики с коэффициентами $H_i(u|D, R)$ равны*

$$\beta_{ij}(u|D, R) = \zeta_{1,1}^{ji}(u|D, R), \quad (3.11)$$

где $\zeta_{1,1}^{ji}$ является первым коэффициентом разложения (3.9) функции $\Psi_i^1(u, Q|D, R)$. Коэффициенты Ламе $H_i(u|D, R, r')$ равны

$$H_i(u|D, R) = - \sum_{\alpha} d_{\alpha} \Psi_i^1(u, R_{\alpha}^{\sigma}|D, R), \quad (3.12)$$

где

$$d_{\alpha} = \operatorname{res}_{R_{\alpha}} d\Omega_0. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (1.11) следует, что Ψ_i^1 удовлетворяют уравнению

$$\partial_i \Psi_j^1 = \beta_{ij} \Psi_i^1, \quad i \neq j. \quad (3.14)$$

Формула (3.11) непосредственно следует из (3.9) и (3.14). Для доказательства (3.12) рассмотрим дифференциал

$$d\Omega_i^{(3)}(u, Q) = \Psi_i^1(u, Q) \psi(u, Q^{\sigma}) d\Omega_0.$$

Этот мероморфный дифференциал имеет полюсы в точках P_i и R_{α}^{σ} и

$$\operatorname{res}_{P_i} d\Omega_i^{(3)} = H_i(u).$$

Вычеты этого дифференциала в точках R_{α}^{σ} равны соответствующим членам суммы в правой части равенства (3.12). Поскольку сумма всех вычетов равна нулю, то теорема доказана.

§4. Егоровские метрики

В этом параграфе мы опишем алгебро-геометрические данные, соответствующие егоровским метрикам, т.е. метрикам с симметричными коэффициентами вращения $\beta_{ij} = \beta_{ji}$.

Пусть $E(P)$ является мероморфной функцией на гладкой алгебраической кривой Γ_0 рода g_0 , имеющей n простых полюсов в точках P_i , $2m-n$ простых нулей в точках $Q_1, \dots, Q_{2m-n}$ и $n-m$ двойных нулей в точках $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_{n-m}$. Риманова поверхность Γ функции $\lambda = \sqrt{E(P)}$ является допустимой кривой в смысле определений предыдущего параграфа. Функция $\lambda = \lambda(Q)$ является нечетной на кривой Γ , где она имеет простые полюсы в точках P_i и простые нули в точках Q_j , $j = 1, \dots, n$. Она определяет локальные координаты $w_j(Q) = \lambda^{-1}(Q)$ в окрестностях точек P_i .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть D, R — допустимая пара дивизоров на римановой поверхности Γ функции $\lambda(Q)$. Тогда

$$\beta_{ij}(u|D, R) = \beta_{ji}(u|D, R). \quad (4.1)$$

Потенциал егоровской метрики $H_i(u|D, R)$ задается формулой

$$\Phi(u|D, R) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda(R_\alpha) d_\alpha \psi(u, R_\alpha^\sigma), \quad (4.2)$$

где d_α равны вычетам дифференциала $d\Omega_0$ в R_α ; см. (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения (4.1) достаточно рассмотреть дифференциал $\lambda(Q) \Psi_i^0(u, Q) \Psi_j^0(u, \sigma(Q)) d\Omega_0$, имеющий полюсы лишь в точках P_i и P_j . Его вычеты в этих точках равны β_{ji} и $-\beta_{ij}$. Для доказательства (4.2) рассмотрим дифференциал

$$d\Omega_i^{(4)} = \lambda(Q) \psi(u, Q) \partial_i \psi(u, \sigma(Q)) d\Omega_0.$$

Он имеет полюсы в точках P_i и R_α с вычетами

$$\operatorname{res}_{P_i} d\Omega_i^{(4)} = -H_i^2, \quad \operatorname{res}_{R_\alpha} d\Omega_i^{(3)} = d_\alpha \lambda(R_\alpha) \partial_i \psi(u, R_\alpha^\sigma).$$

Сумма этих вычетов равна нулю, что доказывает (4.2).

§5. Решения уравнений ассоциативности

Доказанная в [5] эквивалентность проблемы классификации топологических массивных моделей квантовой теории поля и проблемы построения коэффициентов вращения егоровских метрик не дает явного способа построения решений уравнений ассоциативности. В настоящем параграфе мы приведем выражения для статсумм таких моделей, отвечающих построенным выше симметричным коэффициентам вращения.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\psi(u, Q|D, R)$ является функцией Бейкера–Ахиезера, соответствующей римановой поверхности Γ функции $\lambda(Q)$ и допустимой паре дивизоров D, R . Тогда функция $F(x) = F(u(x))$, определенная формулой

$$F(u) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^n \eta_{kl} x^k(u) y^l(u) - \sum_{\alpha} \frac{d_\alpha}{\lambda(R_\alpha)} \psi(u, R_\alpha^\sigma) \right),$$

где (η_{kl}) — постоянная матрица, определенная в (2.7), константы d_α определены равенствами (3.13), а

$$x^k(u) = \psi(u, Q_k), \quad y^k = d\psi(u, Q_k)/d\lambda,$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^k \partial x^l \partial x^m} = c_{klm} = \sum_{i=1}^n H_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} \frac{\partial u^i}{\partial x^m}. \quad (5.1)$$

При этом функции

$$c_{kl}^m = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial u^i} \quad (5.2)$$

удовлетворяют уравнениям ассоциативности (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности точки P_i функции

$$\phi_k = \frac{\partial \psi}{\partial x^k}, \quad \phi_{kl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^k \partial x^l}$$

имеют вид

$$\phi_k = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \lambda e^{\lambda u^i} (h_i + O(\lambda^{-1})), \quad \phi_{kl} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} \lambda^2 e^{\lambda u^i} (h_i + O(\lambda^{-1})).$$

Следовательно,

$$c_{klm} = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{P_i} d\Omega_{k;l m}, \quad d\Omega_{k;l m} = \phi_k(u, Q) \phi_{lm}(u, Q^\sigma) \frac{d\Omega_0}{\lambda(Q)}.$$

Из определения x^k вытекает, что $\phi_k(u, Q_m) = \delta_{km}$, $\phi_{kl}(u, Q_m) = 0$. Значит, дифференциал $d\Omega_{k;l m}$ вне точек P_i имеет единственный полюс в точке Q_k . Отсюда

$$\begin{aligned} c_{klm} &= -\operatorname{res}_{Q_k} d\Omega_{k;l m} = -\operatorname{res}_{Q_k} \phi_{lm}(u, \sigma(Q_k)) \frac{d\Omega_0}{\lambda(Q)} \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} \left(\operatorname{res}_{Q_k} \psi(u, \sigma(Q_k)) \right) \frac{d\Omega_0}{\lambda(Q)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В точке Q_k имеем

$$\psi(u, \sigma(Q)) = x^{\sigma(k)} - y^{\sigma(k)} \lambda + O(\lambda^2).$$

Кроме того,

$$d\Omega_0 = \frac{d\lambda}{\lambda} (\eta_k + \eta_k^1 \lambda + O(\lambda^2)).$$

Значит,

$$\operatorname{res}_{Q_k} \psi(u, \sigma(Q_k)) \frac{d\Omega_0}{\lambda} = \eta_k^1 x^{\sigma(k)} - \eta_k y^{\sigma(k)}. \quad (5.4)$$

Из определения F следует, что

$$2 \frac{\partial}{\partial x^k} F = \eta_k y^{\sigma(k)} + \sum_l^n \eta_l x^l \frac{\partial y^{\sigma(l)}}{\partial x^k} - \frac{d_\alpha}{\lambda(R_\alpha)} \frac{\partial \psi(u, R_\alpha)}{\partial x^k}.$$

Рассмотрим дифференциал

$$d\Omega_k^{(5)} = \frac{\partial\psi(u, Q)}{\partial x^k} \psi(u, Q^\sigma) \frac{d\Omega_0}{\lambda(Q)}.$$

Его вычеты в точках Q_l и R_α^σ равны

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{Q_l} d\Omega_k^{(5)} &= \eta_l x^{\sigma(l)} \frac{\partial y^l}{\partial x^k} + \delta_{l, \sigma(k)} (\eta_k^1 x^{\sigma(k)} - \eta_k y^{\sigma(k)}), \\ \operatorname{res}_{R_\alpha^\sigma} d\Omega_k^{(5)} &= -\frac{d_\alpha}{\lambda(R_\alpha)} \frac{\partial\psi(u, R_\alpha^\sigma)}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{l=1}^n \eta_l x^l \frac{\partial y^{\sigma(l)}}{\partial x^k} - \sum_{\alpha} \frac{d_\alpha}{\lambda(R_\alpha)} \frac{\partial\psi(u, R_\alpha)}{\partial x^k} = \eta_k y^{\sigma(k)} - \eta_k^1 x^{\sigma(k)}.$$

Окончательно,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F = \eta_k y^{\sigma(k)} - \frac{1}{2} \eta_k^1 x^{\sigma(k)}.$$

Это равенство совместно с (5.3), (5.4) доказывает (5.1).

ЛЕММА 5.1. *Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q|D, R)$, соответствующая римановой поверхности функции $\lambda(Q)$ и допустимой паре дивизоров D, R , удовлетворяет уравнениям*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \psi - \lambda \sum_{m=1}^n c_{kl}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \psi_m = 0. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\tilde{\psi}$, определенная левой частью равенства (5.5), вне точек P_j имеет полюсы лишь в точках дивизора D и равна нулю в точках Q_j . Из определения c_{kl}^m следует, что мероморфный сомножитель разложения функции $\tilde{\psi}$ в точках P_i имеет вид $O(\lambda^{-1})$. Следовательно, из единственности функции Бейкера–Ахиезера вытекает равенство $\tilde{\psi} = 0$.

Уравнения (1.14) являются следствиями условий совместности системы (5.5). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (5.5) могут быть записаны в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \tilde{\Psi}_l = \lambda \sum_{m=1}^n c_{kl}^m \tilde{\Psi}_m, \quad \tilde{\Psi}_k = \frac{\partial\psi}{\partial x^k}. \quad (5.6)$$

Система (5.6) с симметричными коэффициентами $c_{kl}^m = c_{lk}^m$ как вспомогательная линейная система для уравнений (1.14) была введена в [5].

Теперь мы рассмотрим специальный случай нашей конструкции, когда дивизор R совпадает с дивизором $\mathcal{Q}$ точек Q_j . Как было отмечено в замечании перед теоремой 2.2, использованное ранее предположение, что R не пересекается с $\mathcal{Q}$, было принято лишь для простоты формул.

В случае $R = \mathcal{Q}$ допустимые дивизоры D определяются следующим образом. Дивизор $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+n-1}$ называется допустимым, если существует мероморфный дифференциал $d\Omega_0$ на Γ_0 с полюсами порядка 2 в точках $Q_1, \dots, Q_{2m-n}$ и полюсами порядка 3 в точках $\hat{Q}_k$, являющихся двукратными нулями функции $E(P)$, такой, что $d\Omega_0(\pi(\gamma_s)) = 0$. Дифференциал $d\Omega_0$, рассматриваемый как четный дифференциал на Γ , в точках Q_k , $k = 1, \dots, n$ (в которых $\lambda(Q_k) = 0$), имеет вид

$$d\Omega_0 = \frac{d\lambda}{\lambda^3(P)} (\eta_k + O(\lambda)).$$

В рассматриваемом специальном случае плоские координаты даются не значениями функции ψ в точках Q_k (которые теперь равны 1), а следующими коэффициентами разложения.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\psi(x, Q|D, \mathcal{Q})$ является функцией Бейкера–Ахиезера, соответствующей допустимому дивизору D на римановой поверхности функции $\lambda(Q)$. Тогда функция $F(x) = \tilde{F}(u(x))$, где

$$\tilde{F}(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \eta_k x^k(u) y^{\sigma(k)}(u),$$

$\eta_k = \text{res}_{Q_k} \lambda^2 d\Omega_0$, а $x^k(u)$ and $y^k(u)$ определяются из разложения

$$\psi = 1 + x^k(u) \lambda + y^k(u) \lambda^2 + O(\lambda^3),$$

является решением уравнений ассоциативности (1.12)–(1.15), т. е. удовлетворяет уравнениям (5.1); функции c_{kl}^m , определенные формулой (5.2), удовлетворяют (1.14) и дополнительному соотношению

$$\sum_{m=1}^n c_{klm}(u) = \eta_{kl}. \quad (5.7)$$

Доказательство того, что x^k являются плоскими координатами метрики с коэффициентами Ламе $H_i = \varepsilon_i h_i(u)$, где $h_i(u)$ равны главным членам разложений соответствующей функции Бейкера–Ахиезера в точках P_i , полностью аналогично общему случаю. Аналогичны и доказательства всех, кроме последнего, утверждений теоремы. Равенство (5.7) вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 5.2. Функция Бейкера–Ахиезера ψ , соответствующая данным теоремы 4.3, удовлетворяет равенству

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial u^s} \psi = \lambda \psi. \quad (5.8)$$

Левая и правая части равенства (5.8) регулярны вне точек P_k и имеют одинаковые главные члены разложений в этих точках. Из единственности функции Бейкера–Ахиезера следует, что они равны между собой. Равенство (5.8) в точках Q_m дает

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial x^m}{\partial u^s} = 1.$$

Значит,

$$\sum_{m=1}^n c_{klm}(u) = \sum_{i=1}^n H_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} = \eta_{kl}.$$

Теорема доказана.

Точные тэта-функциональные формулы для F получаются в результате подстановок соответствующих выражений для функции Бейкера–Ахиезера.

ПРИМЕР. Эллиптические решения. Рассмотрим простейшие эллиптические криволинейные координаты и решения уравнений ассоциативности, соответствующие $n = l = 3$, $m = 2$ в примере из § 2.

Рассмотрим эллиптическую кривую Γ с периодами 2ω , $2\omega'$, $\text{Im } \omega'/\omega > 0$. В таком представлении мы отождествляем P_i с полупериодами ω_i ,

$$P_1 = \omega_1 = \omega, \quad P_2 = \omega_2 = \omega', \quad P_3 = \omega_3 = -\omega - \omega'.$$

Точкам Q_j отвечают в фундаментальном параллелограмме Γ точки с координатами $Q_1 = 0$, $Q_2 = z_0$, $Q_3 = -z_0$. Для $g = 1$ любые дивизоры D и R являются допустимыми. Соответствующий дифференциал имеет вид

$$d\Omega_0 = \eta_0 \frac{\sigma(z - \omega)\sigma(z - \omega')\sigma(z + \omega + \omega')}{\sigma(z)\sigma(z + z_0)\sigma(z - z_0)} \prod_{s=1}^l \frac{\sigma(z - \gamma_s)\sigma(z + \gamma_s)}{\sigma(z - R_s)\sigma(z + R_s)} dz,$$

где $\sigma(z) = \sigma(z|\omega, \omega')$ — классическая σ -функция Вейерштрасса. Вычеты этого дифференциала

$$\text{res}_{z=0} d\Omega_0 = \eta_1, \quad \text{res}_{z=\pm z_0} d\Omega_0 = \eta_2$$

являются коэффициентами плоской метрики $ds^2 = \eta_1(dx^1)^2 + \eta_2(dx^2)(dx^3)$. Функция Бейкера–Ахиезера имеет вид

$$\psi(u, z) = \prod_{s=1}^l \frac{\sigma(z - R_s)}{\sigma(z - \gamma_s)} \left[\sum_{\alpha=1}^l r_\alpha \frac{\sigma(z + U - R_\alpha)}{\sigma(z - R_\alpha)\sigma(U)} \exp(\Omega(u, z) - \Omega(u, R_\alpha)) \right], \quad (5.9)$$

где

$$U = u^1 + u^2 + u^3,$$

$$\Omega(u, z) = u^1(\zeta(z - \omega) + \eta) + u^2(\zeta(z - \omega') + \eta') + u^3(\zeta(z + \omega + \omega') - \eta - \eta'),$$

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}, \quad \eta = \zeta(\omega), \quad \eta' = \zeta(\omega'), \quad r_\alpha = \frac{\prod_{s=1}^l \sigma(R_\alpha - \gamma_s)}{\prod_{s \neq \alpha} \sigma(R_\alpha - R_s)}.$$

В общем случае, когда $R_\alpha \neq Q_j$, плоские координаты даются значениями функции ψ в точках Q_j , т. е.

$$x^1 = \psi(u, 0), \quad x^2 = \psi(u, z_0), \quad x^3 = \psi(u, -z_0).$$

Коэффициенты Ламе равны

$$\begin{aligned} H_1(u) &= \varepsilon_1 \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha \frac{\sigma(U - R_\alpha)}{\sigma(\omega - R_\alpha) \sigma(U)} e^{U\eta}, \\ H_2(u) &= \varepsilon_2 \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha \frac{\sigma(\omega' + U - R_\alpha)}{\sigma(\omega' - R_\alpha) \sigma(U)} e^{U\eta'}, \\ H_3(u) &= \varepsilon_3 \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha \frac{\sigma(\omega + \omega' + U - R_\alpha)}{\sigma(\omega + \omega' - R_\alpha) \sigma(U)} e^{(-U\eta - U\eta')}. \end{aligned}$$

Эллиптические решения уравнений ассоциативности соответствуют функции Бейкера–Ахиезера, определенной формулой (5.9) с $l = 3$ и $R_1 = 0$, $R_2 = z_0$, $R_3 = -z_0$. Приведем соответствующие формулы для простейшей функции Бейкера–Ахиезера

$$\psi(u, z) = \frac{\sigma(z + s)}{\sigma(z) \sigma(s)} e^{\Omega(u, z)}.$$

Коэффициенты разложений

$$\psi = 1/z + x^1(u) + y^1(u)z + O(z^2),$$

$$\psi = x^2 + y^2(u)(z - z_0) + O((z - z_0)^2), \quad \psi = x^3 + y^3(u)(z + z_0) + O((z + z_0)^2)$$

определяют решение

$$F = x^1 y^1 - \frac{1}{2}(x^2 y^3 + x^3 y^2) \quad (5.10)$$

уравнений ассоциативности. Имеем

$$\begin{aligned} x^1 &= \zeta(U) - \wp(\omega)u^1 - \wp(\omega')u^2 - \wp(\omega + \omega')u^3, \\ x^2 &= \frac{\sigma(z_0 + U)}{\sigma(z_0)\sigma(U)} \exp \Omega(u, z_0), \quad x^3 = \frac{\sigma(U - z_0)}{\sigma(-z_0)\sigma(U)} \exp \Omega(u, -z_0) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{\sigma''(U)}{2\sigma(U)} - \zeta(U) \sum_{i=1}^3 (\wp(\omega_i)u^i) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \wp(\omega_i)u^i \right)^2, \\ y^2 &= x^2(u) \left(\zeta(z_0 + U) - \zeta(z_0) - \sum_{i=1}^3 \wp(z_0 - \omega_i)u^i \right), \\ y^3 &= x^3(u) \left(\zeta(-z_0 + U) + \zeta(z_0) - \sum_{i=1}^3 \wp(z_0 - \omega_i)u^i \right). \end{aligned}$$

Функция $\hat{F} = F - \frac{1}{2}(x^1)^2$ имеет те же третьи производные, что и функция F . Следовательно, после подстановки выражений для x^i и y^i в (5.10) мы получим формулу для простейшего эллиптического решения уравнений ассоциативности

$$\hat{F} = -\frac{1}{2} \wp(U) - \frac{1}{2} (\wp(U) - \wp(z_0)) \left(\zeta(z_0 - U) - \zeta(z_0 + U) - \sum_{i=1}^3 \wp(z_0 - \omega_i)u^i \right).$$

В заключение автор выражает признательность В. Е. Захарову и С. В. Манакову за плодотворные обсуждения их замечательных работ, послуживших отправной точкой настоящего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Darboux G.* Lecons sur le systems ortogonaux et les coordones curvilignes. Paris, 1910.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. ДАН СССР, **27**, 665–654 (1983).
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток: Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория. УМН, **44**, 35–124 (1989).
4. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа. Изв. АН СССР, сер. матем., **54**, №5, 1048–1068 (1990).
5. *Dubrovin B.* Integrable systems in topological field theory. Nuclear Phys. B, **379**, 627–689 (1992).
6. *Krichever I.* Tau-function of the universal Whitham hierarchy and topological field theories. Comm. Pure Appl. Math., **47**, 1–40 (1994).
7. *Zakharov V.* Description of the n -ortogonal curvilinear coordinate systems and hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. Part 1. Integration of the Lamé equations. Preprint (to appear in Duke Math. J.).
8. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* Частное сообщение.
9. *Witten E.* The structure of the topological phase of two-dimensional gravity. Nuclear Phys. B, **340**, 281–310 (1990).
10. *Verlinder E., Verlinder H.* A solution of two-dimensional topological quantim gravity. Preprint IASSNS-HEP 90/40, PUPT-1176, 1990.
11. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрическая конструкция уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений. ДАН СССР, **227**, №2, 291–294 (1976).
12. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 1, 15–31 (1977).
13. *Итс А. Р., Матвеев В. Б.* Об одном классе решений уравнения КдФ. В сб. «Проблемы математической физики», **8**, ЛГУ, 1976.
14. *Krichever I., Babelon O., Billey E., Talon M.* Spin generalization of the Calogero–Moser system and the matrix KP equation. Am. Math. Soc. Transl. (2), **170**, 83–119 (1995).
15. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные периодические операторы Шрёдингера: явные формулы и эволюционные уравнения. ДАН СССР, **279**, №1, 20–24 (1984).
16. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрические двумерные операторы с самосогласованными потенциалами. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 1, 26–40 (1994).
17. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шрёдингера в магнитном поле и римановы поверхности. ДАН СССР, **229**, №1, 15–18 (1976).

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
и факультет математики Columbia University

Поступило в редакцию
23 декабря 1996 г.