Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Юркин, О конечномерности задачи о малых колебаниях волчка с полостью, наполненной идеальной жидкостью, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:43:56

УДК 517.9

О конечномерности задачи о малых колебаниях волчка с полостью, наполненной идеальной жидкостью*

© 1997. М. Ю. Юркин

В настоящей работе исследуется задача о малых колебаниях вращающегося волчка с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью. Предполагается, что полость и оболочка — тела вращения с общей осью симметрии, а точка закрепления оболочки находится на этой оси. Движение происходит в поле силы тяжести. В невозмущенном состоянии жидкость имеет распределение скоростей твердого тела, вращающегося вместе с волчком.

Линейное уравнение малых колебаний волчка с жидкостью в абстрактной форме может быть записано следующим образом:

$$\dot{u} = Mu, \quad (*)$$

где u — вектор некоторого гильбертова пространства H , задающий отклонение системы от невозмущенного состояния, а M — ограниченный линейный оператор. В настоящей работе показано, что пространство H может быть разбито на сумму двух подпространств, $H = L \dot{+} L'$, таким образом, что оба эти подпространства инвариантны относительно оператора M , а все решения уравнения (*) также разлагаются в сумму решений из L и L' . При этом решениям из L' соответствуют движения системы, при которых оболочка волчка равномерно вращается вокруг неподвижной оси симметрии. Обратно, если решению $u(t)$ соответствует движение, при котором ось симметрии волчка неподвижна, то $u(t) \in L'$ при любом времени t . Иными словами, для того чтобы определить движение оболочки, необходимо и достаточно рассмотреть сужение уравнения (*) на подпространство L (см. п. 9 §1). Из работы С. Л. Соболева (см. [1, §6]) следует, что если полость имеет форму эллипсоида, то L конечномерно. А именно если полуоси эллипсоида различны, то $\dim L = 6$. Если же полость имеет форму шара, то $\dim L = 4$, а влияние жидкости сводится к увеличению моментов инерции и массы волчка.

Назовем задачу о малых колебаниях симметричного волчка с полостью, заполненной жидкостью, относительно состояния равномерного вращения конечномерной, если конечномерно пространство L .

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема:

Пусть полость есть ограниченная связная область, содержащая точки, лежащие на оси симметрии. Тогда L конечномерно только для полости, имеющей форму слоя между двумя концентрическими подобными эллипсоидами вращения или эллипсоида вращения (см. теорему 7).

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №96-01-00333.

Из нее вытекает, что если полость гомеоморфна шару, то эта конечномерность реализуется только для эллипсоида вращения.

Приводится также ее следствие для волчка с полостью из нескольких связанных компонент. О конечности числа зон устойчивости по частоте вращения в этом случае см. замечание 7 (п. 9 §2).

Если рассматривать задачу о малых колебаниях жидкости в неподвижном сосуда относительно состояния равномерного вращения, то $\mathbf{L}$ конечномерно тогда и только тогда, когда имеется только конечное число собственных колебаний жидкости, обладающих отличным от нуля моментом гидродинамического воздействия на оболочку (см. теорему 2' и замечание 3 в п. 9 §1). Это аналог утверждения, сформулированного во введении к [2].

При выводе уравнений возмущенного движения волчка с осесимметричной полостью С. Л. Соболев пользовался системой координат, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью невозмущенного движения волчка. Общее решение уравнений, записанных в этой системе координат, может быть представлено в виде суммы бесконечного числа слагаемых, каждое из которых в свою очередь является решением рассматриваемой задачи. Эти слагаемые различаются между собой тем, какое преобразование они испытывают при повороте волчка на угол α . Как показал Соболев, среди этих решений только два соответствуют случаю, когда вместе с жидкостью колеблется и оболочка, причем они являются комплексно-сопряженными, в силу чего достаточно изучать одно из них. Уравнение для этого решения Соболев привел к виду $\dot{R} = iBR$, где $R = (z, w, v)$, z и w — комплексные числа, а $v(x_0, x_1, x_2)$ — векторное поле в области Ω . Если положить $R^1 = BR$, где $R^1 = (z^1, w^1, v^1)$, то

$$\begin{aligned} v_2^1 &= -2\omega iv_1 + i \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2\omega^2 w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial x_1}, & v_1^1 &= 2\omega iv_2 + i \frac{\partial p}{\partial x_1} - 2\omega^2 w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial x_2}, \\ v_0^1 &= i \frac{\partial p}{\partial x_0}, & \operatorname{div} v &= \operatorname{div} v^1 = 0, & v_n|_{\partial\Omega} &= 0, & v_n^1|_{\partial\Omega} &= 0, \\ A_1 w^1 &= A_2 w + A_3 z + \int_{\Omega} \left(v_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \right) d\Omega, & z^1 &= \omega w, \end{aligned}$$

где $v = (v_0, v_1, v_2)$, A_1, A_2, A_3, ω — некоторые константы, а функция χ определяется из условий

$$\Delta \chi = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = x_0(\cos nx_2 + i \cos nx_1) - (x_2 + ix_1) \cos nx_0.$$

Оператор B самосопряжен в пространстве с индефинитной метрикой, имеющей не более одного отрицательного квадрата, что принципиально для рассматриваемой задачи.

Как и авторы работ [2, 3], в настоящей статье мы пользуемся уравнениями движения волчка в системе координат, связанной с твердой оболочкой. При этом, используя симметрию, мы разбиваем решение уравнения (*) в сумму бесконечного числа решений, причем в уравнении $\dot{R} = iBR$ для того из них, при котором вместе с жидкостью колеблется и оболочка, оператор $\tilde{B}$ отличен от B . Однако из п. 8 §1 следует, что операторы $\tilde{B}$ и B подобны.

§1. Уравнения движения волчка и их свойства; определение пространства L

1. Будем рассматривать тело, имеющее полость Ω , целиком заполненную идеальной жидкостью, которое движется вокруг неподвижной точки O . Предполагается, что Ω состоит из конечного числа связных компонент и является телом вращения. Пусть e_0 — единичный вектор вдоль оси симметрии, а e_1, e_2 таковы, что $Oe_0e_1e_2$ — ортонормированный репер, жестко связанный с телом (O — начало координат), и $Ox_0x_1x_2$ — координаты в этом репере. Пусть $Of_0f_1f_2$ — ортонормированный репер, жестко связанный с пространством. В невозмущенном состоянии $e_0 = f_0$. Состояние системы описывается тремя величинами: $w \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость оболочки, $z \in \mathbb{R}^3$ — координаты вектора f_0 и $v \in J_0(\Omega)$ — поле скоростей жидкости в системе координат репера $Oe_0e_1e_2$. В Ω справедливо разложение Вейля: $L_2(\Omega) = J_0(\Omega) \oplus G(\Omega)$, где $J_0(\Omega)$ — замыкание в $L_2(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов, а $G(\Omega)$ состоит из градиентов однозначных в Ω локально квадратично суммируемых функций с первыми производными, принадлежащими $L_2(\Omega)$ (см. [4]). Определения операторов div , rot , Δ в этих пространствах даются в [4].

2. Пусть γ_i, δ_i — моменты инерции оболочки и жидкости, рассматриваемой как твердое тело, соответственно относительно $e_i, i = 0, 1, 2$. Положим $a_i = \gamma_i + \delta_i, i = 0, 1, 2$. Так как полость и оболочка — тела вращения, то $\gamma_1 = \gamma_2, \delta_1 = \delta_2, a_1 = a_2$. Обозначим через P_0 ортогональный проектор пространства $L_2(\Omega)$ на $J_0(\Omega)$. Введем следующие операторы:

$$\begin{aligned} Bw &= P_0([w, x]), & B: \mathbb{C}^3 &\rightarrow J_0(\Omega), \\ B^*v &= \int_{\Omega} [x, v(x)] d\Omega, & B^*: J_0(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C}^3, \\ A &= \operatorname{diag}\{a_i\}_{i=0,1,2}, & A: \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3, \end{aligned}$$

где $x = (x_0, x_1, x_2)^T$, а $[x, y] = (x_1y_2 - x_2y_1, -x_0y_2 + x_2y_0, x_0y_1 - x_1y_0)^T$. Без ограничения общности полагаем плотность жидкости равной 1. Тогда эволюция системы описывается уравнениями

$$\begin{pmatrix} z \\ Aw + B^*v \\ Bw + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [z, w] \\ [Aw + B^*v, w] + K[z, e_0] \\ P_0\{[v, (2w + \operatorname{rot} v)]\} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $K = g(l_1M_1 + l_2M_2)$; здесь l_1 и l_2 — расстояния от точки O до центров тяжести, M_1, M_2 — массы оболочки и жидкости соответственно, а g — ускорение силы тяжести (см. [3]).

Поясним уравнения системы (1). Первая строка этой системы есть кинематическое соотношение, следующее из определения z . Вторая строка — это уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента системы относительно точки O . Третья строка является иной записью уравнений относительного движения жидкости

$$\dot{v} + (v \nabla) v + 2[w, v] = -\nabla p - [\dot{w}, x] - [w, [w, x]], \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Она получается проектированием первого из них на пространство соленоидальных векторных полей, удовлетворяющих условию непротекания на границе области. Подробный вывод этих уравнений имеется в [5].

Невозмущенному движению соответствует следующее стационарное решение системы (1):

$$u_0 = (z_0, w_0, v_0)^T, \quad z_0 = e_0, \quad w_0 = \omega e_0, \quad v_0 = 0.$$

Подставим в систему (1) решение в виде $u_0 + u$ и оставим только линейные по $u = (z, w, v)^T$ члены. Получим линеаризацию системы (1)

$$\begin{pmatrix} z \\ Aw + B^*v \\ Bw + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [w_0, (1/\omega)w - z] \\ [Aw_0, w] + [Aw, w_0] + [B^*v, w_0] + K[z, e_0] \\ 2P_0\{[v, w_0]\} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

3. Введем следующие операторы F, G : $Fw = [e_0, w]$, $Gv = -2iP_0\{[v, e_0]\}$. Хорошо известно, что $G = G^*$ и $\|G\| = 2$ (см. [3]). Пусть

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A & B^* \\ 0 & B & I \end{pmatrix}, \quad M = -i \begin{pmatrix} -F & (1/\omega)F & 0 \\ -(K/\omega)F & (a_0 - a_1)F & -FB^* \\ 0 & 0 & iG \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2) можно записать в виде

$$J\dot{u} = \omega iMu. \quad (3)$$

Уравнению (3) соответствует линейный пучок $L(\lambda) = \lambda J - \omega M$.

4. Положим

$$U_1^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

В пространстве $J_0(\Omega)$ естественным образом действует группа унитарных операторов U_2^s (напоминаем, что Ω — тело вращения):

$$(U_2^s v)(x) = U_1^s(v(U_1^{-s}x)).$$

Таким образом, в пространстве $H = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus J_0(\Omega)$ можно определить унитарное семейство $U^s = \text{diag}\{U_1^s, U_1^s, U_2^s\}$. Пусть $T_k = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{iks} U^s ds$. Непосредственно из определения вытекают следующие свойства: T_k — ортогональный проектор при всех $k \in \mathbb{Z}$, причем $\sum_{-\infty}^{+\infty} T_k = I$ и $U^\alpha T_k = e^{-ik\alpha} T_k$. Пусть $H_k = T_k H$; тогда $H = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H_k$, где $T_k = \text{diag}\{R_k, R_k, Q_k\}$, а $R_k = 0$ при $k \notin \{-1, 0, 1\}$,

$$R_0 = \text{diag}\{1, 0, 0\}, \quad R_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{-1} = \bar{R}_1.$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. $JT_k = T_k J$ и $MT_k = T_k M$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что $AU_1^s = U_1^s A$, $FU_1^s = U_1^s F$, $GU_2^s = U_2^s G$ и $B^*U_2^s = U_1^s B^*$. Докажем последнее равенство:

$$\begin{aligned} B^*U_2^s v &= \int_{\Omega} [r, U_1^s v(U_1^{-s} r)] d\Omega = \int_{\Omega} [U_1^s r, U_1^s v(r)] d\Omega \\ &= U_1^s \int_{\Omega} [r, v(r)] d\Omega = U_1^s B^* v. \end{aligned}$$

Остальные доказываются аналогично.

СЛЕДСТВИЕ. $JH_k \subset H_k$ и $MH_k \subset H_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Непосредственно из определения следует, что H_{-k} состоит из векторов, комплексно-сопряженных к элементам из H_k .

5. При $k \notin \{-1, 0, 1\}$ мы имеем

$$T_k J T_k = \text{diag}\{0, 0, Q_k\}, \quad T_k M T_k = \text{diag}\{0, 0, GQ_k\}$$

и $H_k = \{0\} \oplus \{0\} \oplus Q_k J_0(\Omega)$, т.е. уравнение (3) при $u \in H_k$ описывает движения системы, при которых оболочка равномерно вращается со скоростью ω вокруг своей неподвижной оси симметрии $e_0 = f_0$. Уравнение движения жидкости в полости совпадает с уравнением малых колебаний жидкости относительно равномерного вращения при неподвижной оболочке.

6. Рассмотрим случай $k = 0$. Так как $R_0 = \text{diag}\{1, 0, 0\}$, то ему соответствует пространство, к которому относятся те движения системы, при которых $e_0 = f_0$, т.е. направления оси волчка и его угловой скорости неизменны. Если $\gamma_0 = 0$, то говорить о движении оболочки в данном случае не имеет смысла. В случае $\gamma_0 \neq 0$ нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Пусть $(z, w, v)^T$ удовлетворяет уравнению (3) и $\gamma_0 \neq 0$. Тогда $(e_0, \dot{w}) = 0$ и $(e_0, B^* \dot{v}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножив обе части уравнения (3) на $(0, e_0, 0)^T$, получим $(A\dot{w} + B^* \dot{v}, e_0) = 0$. Но $B\dot{w} + \dot{v} = \omega i Gv$, откуда $(B^* B \dot{w}, e_0) + (B^* \dot{v}, e_0) = i\omega(B^* Gv, e_0) = i\omega(v, GBe_0) = 0$, поскольку $Be_0 \in \text{Ker } G$ (см. [3]). Элементарно показывается, что $B^* B = \text{diag}\{\beta_i\}_{i=0,1,2}$ (напоминаем, что Ω — тело вращения). При этом $\beta_i \geq 0$ ($i = 0, 1, 2$). Следовательно, $0 = ((A - B^* B)\dot{w}, e_0) = (a_0 - \beta_0)(\dot{w}, e_0)$. Непосредственно из определения вытекает, что $\beta_0 = \delta_0$. Таким образом, так как $\gamma_0 \neq 0$, то $(e_0, \dot{w}) = 0$ и $(e_0, B^* \dot{v}) = 0$.

Используя лемму 2 и заметив, что $R_0 F = 0$, получаем

$$T_0 J T_0 = \text{diag}\{R_0, a_0 R_0, Q_0\}, \quad T_0 M T_0 = \text{diag}\{0, 0, GQ_0\}.$$

Таким образом, система уравнений (3) на подпространстве H_0 описывает движения системы, при которых оболочка вращается вокруг неподвижной оси симметрии $e_0 = f_0$ с постоянной угловой скоростью (возможно, не равной ω в отличие от предыдущего случая). Уравнение движения жидкости в полости совпадает с уравнением малых колебаний жидкости относительно равномерного вращения при неподвижной оболочке.

7. Рассмотрим случай $k = 1$ (случай $k = -1$ разбирается аналогично). В одномерном пространстве $R_1 \mathbb{C}^3$ возьмем в качестве базисного элемента $e = (1/\sqrt{2})(0, 1, i)^T$. Тогда $A(\lambda e) = (a_1 \lambda) e$, $F(\lambda e) = \lambda[e_0, e] = -i\lambda e$ и $B(\lambda e) =$

$\lambda((1/\sqrt{2})Be_1 + (i/\sqrt{2})Be_2) = \lambda Be$. Пусть $v \in Q_1J_0(\Omega)$. В этом случае $(B^*v, e_0) = (v, Be_0) = 0$, так как $Be_0 \in Q_0J_0(\Omega)$,

$$(B^*v, e_2) = (B^*v, U_1^{\pi/2}e_1) = (U_1^{-\pi/2}B^*v, e_1) = (B^*U_2^{-\pi/2}v, e_1) = i(B^*v, e_1).$$

Таким образом, $B^*v = (1/\sqrt{2})(v, Be_1 + iBe_2)e = (v, Be)e$. Определим изоморфизм $\Pi: R_1\mathbb{C}^3 \oplus R_1\mathbb{C}^3 \oplus Q_1J_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus Q_1J_0(\Omega)$ формулой

$$\Pi(\mu e, \lambda e, v)^T = (\mu, \lambda, v)^T,$$

т.е. операторам J, M системы (3) будут соответствовать

$$J_1 = \Pi J \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b^* \\ 0 & b & I \end{pmatrix}, \quad M_1 = \Pi M \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\omega & 0 \\ K/\omega & -(a_0 - a_1) & b^* \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix},$$

где оператор $b: \mathbb{C} \rightarrow Q_1J_0(\Omega)$ отождествляется с вектором $b = Be$ (при этом $b^*v = (v, b)$). Мы получаем в $\tilde{H}_1 = \Pi H_1$ задачу

$$J_1 \dot{\tilde{u}} = \omega i M_1 \tilde{u}, \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0, \quad (4)$$

где $\tilde{u}(t) = (\tilde{z}(t), \tilde{w}(t), \tilde{v}(t))^T$. Соответствующий пучок $L_1(\lambda)$ — это $\lambda J_1 - \omega M_1$. Заметим, что в случае $K = 0$ (например, в отсутствие силы тяжести) система (4) распадается на систему

$$J_2 \dot{\hat{u}} = \omega i M_2 \hat{u}, \quad (4')$$

$\hat{u}(t) = (\tilde{w}(t), \tilde{v}(t))^T$ (которой соответствует пучок $L_2(\lambda) = \lambda J_2 - \omega M_2$), в пространстве $\mathbb{C} \oplus Q_1J_0(\Omega)$, где

$$J_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b^* \\ b & I \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -(a_0 - a_1) & b^* \\ 0 & G \end{pmatrix},$$

и уравнение $\dot{\tilde{z}} = \tilde{z} - (1/\omega)\tilde{w}$.

8. От систем (4) и (4') перейти к самосопряженным можно различными способами.

Первый способ — это переход к другой системе координат. Пусть

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1/(\omega^2 N) & a_1/(\omega N) & (1/(\omega N))b^* \\ 1/(\omega N) & (a_1 + N)/N & (1/N)b^* \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} a_0/(a_0 - a_1) & b^*/(a_0 - a_1) \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

где $N = (a_0 - a_1) - K/\omega^2$. Тогда $M_i S_i$ и $J_i S_i$ ($i = 1, 2$) — самосопряженные операторы, причем $J_i S_i$ положительны при $N > 0$ и имеют одно отрицательное собственное значение при $N < 0$.

Второй способ — замена координат и переход к эквивалентной системе урав-

нений. Положим $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega & 1 & 0 \\ 0 & -b & I \end{pmatrix}$. Тогда $S^{-1}J_1^{-1}L_1(\lambda)S = \lambda I - \omega\tilde{M}$, где

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\omega & 0 \\ -\omega N/(a_1 - (b, b)) & -c & -b^*(G - I)/(a_1 - (b, b)) \\ 0 & -(G - I)b & G \end{pmatrix},$$

$c = 1 - (a_0 - a_1 + (b, (I - G)b))/(a_1 - (b, b))$. Оператор $\tilde{M}$ является $\tilde{J}$ -самосопряженным, где $\tilde{J} = \text{diag}\{\omega^2 N, a_1 - (b, b), I\}$. С точностью до элементарных преобразований оператор $\tilde{M}$ совпадает с оператором, который исследовал Соболев в [1].

Далее положим $\tilde{M}_1 = J_1^{-1}M_1$, $\tilde{J}_1 = S^{-1*}\tilde{J}S^{-1} = \tilde{J}_1^*$. Легко видеть, что оператор $\tilde{M}_1$ является $\tilde{J}_1$ -самосопряженным.

9. Будем говорить, что оболочка не участвует в движении системы, соответствующем $u(t)$, если она вращается вокруг неподвижной оси симметрии. Это означает, что $u(t) = (z(t), \alpha(t)e_0, v(t))^T$. В противном случае будем говорить, что оболочка участвует в движении системы.

Пусть $u(t) \in H_1$ и оболочка не участвует в движении системы, соответствующем $u(t)$. Тогда $Pu(t) = (\tilde{z}(t), 0, \tilde{v}(t))^T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через L замыкание линейной оболочки системы векторов $\{G^k b\}_0^{+\infty}$ в $Q_1 J_0(\Omega)$, и пусть

$$\tilde{L}' = \tilde{H}_1 \ominus (\text{Lin}\{(0, 1, 0)^T\} \oplus \text{Lin}\{(-K/\omega, 0, (G - I)G^k b)^T\}_0^{+\infty}),$$

$$\tilde{L} = \tilde{H}_1 \ominus (\tilde{J}_1 \tilde{L}').$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\tilde{u}(t) = (\tilde{z}(t), \tilde{w}(t), \tilde{v}(t))^T$ — решение задачи (4). Тогда $w(t) \equiv 0$ в том и только том случае, когда $\tilde{u}(0) \subset \tilde{L}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим $\tilde{w}(t) \equiv 0$ в (4). Получим $\tilde{z}(t) = e^{i\omega t}\tilde{z}(0)$, $\dot{\tilde{v}} = i\omega G\tilde{v}$, $(\dot{\tilde{v}}, b) = iK\tilde{z}(t) + i\omega(\tilde{v}, b)$. Исключая из последнего равенства $\dot{\tilde{v}}$, получаем $i\omega(\tilde{v}, (G - I)b) - iK\tilde{z}(t) = 0$. Дифференцируя последнее равенство k раз и исключая $\dot{\tilde{v}}$, приходим к равенству $i\omega(\tilde{v}, (G - I)G^k b) - iK\tilde{z}(t) = 0$. Полагая $t = 0$, получаем необходимость условия теоремы. Обратно, пусть $\tilde{u}(0) \subset \tilde{L}'$. Решение задачи (4) можно записать в виде $\tilde{u}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (t^k/k!) (i\omega)^k \tilde{M}_1^k \tilde{u}(0)$. Но элементарная проверка показывает, что $\tilde{M}_1 \tilde{L}' \subset \tilde{L}'$, т.е. $\tilde{u}(t) \subset \tilde{L}'$. Это завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Имеет место разложение $\tilde{H}_1 = \tilde{L} \dot{+} \tilde{L}'$. При этом $\tilde{L}$, $\tilde{L}'$ являются $\tilde{M}_1$ -инвариантными и $\tilde{J}_1$ -ортогональными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вторая часть теоремы доказывается непосредственной проверкой (частично она доказана выше). Получим разложение $\tilde{H}_1 = \tilde{L} \dot{+} \tilde{L}'$. Рассмотрим пространство $\tilde{L} \cap \tilde{L}'$. Так как $\tilde{L}$ и $\tilde{L}'$ $\tilde{J}_1$ -ортогональны, а эрмитова форма $(\tilde{J}_1 x, x)$ имеет один отрицательный квадрат при $N < 0$ и положительна при $N > 0$, то $\dim \tilde{L} \cap \tilde{L}' \leq 1$ (см. [6]). Пусть $x \in \tilde{L} \cap \tilde{L}'$. Так как $\tilde{L}$, $\tilde{L}'$

$\tilde{M}_1$ -инвариантны, то $\tilde{M}_1 x = \lambda x$. Поскольку $x \in \tilde{L}'$, мы имеем $x = (\alpha, 0, v)^T$. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Учитывая, что $\tilde{M}_1|_{\tilde{L}'} = \text{diag}\{1, 0, G\}$, получаем $\lambda = 1$ и $(G - I)v = 0$. Вспоминая определение $\tilde{L}' \ni x$, получаем $\alpha = 0$, т.е. α не может быть отличным от 0. Но из определения x следует, что $(\tilde{J}_1 x, x) = 0$. При этом $(\tilde{J}_1 x, x) = (v, v)$, т.е. $v = 0$ и $x = 0$. Аналогично доказывается, что $(\tilde{L} + \tilde{L}')^\perp = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. $\dim \tilde{L} < \infty$ тогда и только тогда, когда $\dim L < \infty$. Действительно, пусть L конечномерно; тогда $\tilde{H}_1 \ominus \tilde{L}'$ тоже конечномерно. Но $\tilde{L} = \tilde{J}_1^{-1}(\tilde{H}_1 \ominus \tilde{L}')$, поскольку $\tilde{J}_1 = \tilde{J}_1^*$, т.е. $\tilde{L}$ конечномерно. Обратно, пусть $\tilde{L}$ конечномерно. Обращая приведенное выше рассуждение, получаем, что $\tilde{H}_1 \ominus \tilde{L}'$ конечномерно. Тогда из определения $\tilde{L}'$ следует, что существует такое n , что $(G - I)G^{n+1}b = \sum_{k=0}^n c_k(G - I)G^k b$, или $G^{n+2}b = \sum_{k=0}^{n+1} c'_k G^k b$, а это означает конечномерность L .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\dot{v} = iGv$ и $v(t) \in Q_1 J_0(\Omega)$. Это уравнение описывает малые колебания поля скоростей жидкости в Ω относительно состояния равномерного вращения (см. [3]). Нетрудно показать, что в этом случае величина $(v, (G - I)b)e$ является моментом сил давления жидкости на оболочку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $L = \overline{\Pi^{-1}\tilde{L}} \oplus \Pi^{-1}\tilde{L}$, $M = i\omega J^{-1}M$,

$$L' = \left(\bigoplus_{k=-2}^{-\infty} H_k \right) \oplus \overline{\Pi^{-1}\tilde{L}'} \oplus H_0 \oplus \Pi^{-1}\tilde{L}' \oplus \left(\bigoplus_{k=2}^{+\infty} H_k \right).$$

Суммируя результаты этого пункта, мы можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2'. *Пространство H может быть разбито на сумму этих двух подпространств, $H = L \dot{+} L'$. Оба эти подпространства инвариантны относительно оператора M , а все решения уравнения (*) разлагаются в сумму решений из L и L' . При этом решениям из L' соответствуют движения системы, при которых оболочка волчка равномерно вращается вокруг неподвижной оси симметрии. Обратно, если решению $u(t)$ соответствует движение, при котором ось симметрии волчка неподвижна, то $u(t) \in L'$ при любом времени t . Иными словами, для того чтобы определить движение оболочки, необходимо и достаточно рассмотреть сужение уравнения (*) на подпространство L . Подпространство L конечномерно тогда и только тогда, когда конечномерно пространство L .*

В §2 мы займемся изучением случаев, когда L конечномерно.

§2. Теорема о конечномерности пространства L и некоторые ее следствия

1. Всюду далее (кроме тех мест, где оговорено противное) полагаем, что Ω — связная ограниченная область. Далее, h, r, θ — цилиндрические координаты, т.е. $x_0 = h$, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$. Как и в §1, $e = (1/\sqrt{2})(0, 1, i)^T \in \mathbb{C}^3$. Напомним, что $b = Be \in Q_1 J_0(\Omega)$ и $\text{rot } b = 2e$. Далее нам понадобится следующая

ЛЕММА 3. $G^k b \in C^\infty(\Omega)$ при всех неотрицательных k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $b = 2iP_0\{x_0 e\}$, т.е. $b = 2ix_0 e + \text{grad } p$ и $0 = \text{div } b = \Delta p$ в Ω . Таким образом, согласно лемме Вейля (см. [7]), $p \in C^\infty(\Omega)$ и $b \in C^\infty(\Omega)$. Далее, $Gb = -2i[b, e_0] + \text{grad } p'$ и $0 = \text{div } Gb = -2i \text{div}([b, e_0]) + \Delta p'$. Отсюда следует, что так как $b \in C^\infty(\Omega)$, то $p' \in C^\infty(\Omega)$ (лемма Вейля) и $Gb \in C^\infty(\Omega)$. При остальных k доказательство аналогично.

2. Займемся изучением случая, когда L конечномерно. Пусть $\dim L = n + 1$, т.е. $G^{n+1}b \in \text{Lin}\{b, Gb, \dots, G^n b\}$ и $\{b, Gb, \dots, G^n b\}$ — линейно независимая система. Но G самосопряжен, т.е. существуют такие линейно независимые $d_0, d_1, \dots, d_n \in L$, что $\frac{1}{2}Gd_k = \lambda_k d_k$, $k = 0, \dots, n$ (множитель $1/2$ введен для удобства дальнейших вычислений), причем $\lambda_k \neq \lambda_l$ ($k \neq l$). Итак, пусть $d \in L$ и

$$\frac{1}{2}Gd = \lambda d. \quad (5)$$

Но

$$\text{rot } Gv = -2i \frac{\partial}{\partial x_0} v \quad (6)$$

при $v \in J_0(\Omega)$ (это доказывается элементарной проверкой). Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_0} d = i\lambda \text{rot } d. \quad (7)$$

ЛЕММА 4. Пусть $\dim L = n + 1$, $n > 0$. Тогда

$$\text{rot}^{n+1} L = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x_0^{n+1}} L = 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n > 0$, $k = 0, \dots, n$, используя (6), получаем

$$\frac{1}{(-2i)^k} \text{rot}^{n+1} G^k b = \text{rot}^{n+1-k} \frac{\partial^k}{\partial x_0^k} b = \frac{\partial^k}{\partial x_0^k} \text{rot}^{n+1-k} b = 0.$$

Следовательно, равенство (8) доказано. Используя это равенство, получаем

$$\partial^{n+1} L / \partial x_0^{n+1} = (-2i)^{n+1} \text{rot}^{n+1} G^{n+1} L = (-2i)^{n+1} \text{rot}^{n+1} L = 0,$$

т.е. и (9) доказано.

3. В этом пункте мы докажем три леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. W_k — это пространства, состоящие из элементов $\varphi(x_1, x_2)$, таких, что $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(r) e^{ik\theta}$ и $(0, \partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2)^T \in \mathbf{L}_2(\Omega)$.

В дальнейшем $U_1^s = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 5. Пусть $\psi \in W_1$ и $\Delta\psi = 0$ в круге $\{r < R\}$. Тогда $\psi = cre^{i\theta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предыдущему определению, $\psi(x_1, x_2) = \psi(r) e^{i\theta}$, т.е.

$$0 = \Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \psi(r) \right) e^{i\theta}.$$

Таким образом, $\psi(r) = c_1 r + c_2/r$, но в нуле ψ ограничена (лемма Вейля), т.е. $c_2 = 0$.

ЛЕММА 6. Пусть $(0, \partial\psi/\partial x_1, \partial\psi/\partial x_2)^T \in Q_1 \mathbf{L}_2(\Omega)$. Тогда существует константа c , такая, что $\psi + c \in W_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\nabla\psi = U_1^\theta(\partial\psi(r)/\partial r, (1/r)(\partial\psi/\partial\theta))^T$, то из свойств, указанных в п. 4 §1, получаем

$$\begin{aligned} U_1^s \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial x_1 \\ \partial\psi/\partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{-s} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= e^{-is} \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial x_1 \\ \partial\psi/\partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= U_1^\theta e^{-is} \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial r \\ r^{-1}\partial\psi/\partial\theta \end{pmatrix} (r, \theta). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} U_1^s \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial x_1 \\ \partial\psi/\partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{-s} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} &= U_1^s U_1^{\theta-s} \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial r \\ r^{-1}\partial\psi/\partial\theta \end{pmatrix} (r, \theta - s) \\ &= U_1^\theta \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial r \\ r^{-1}\partial\psi/\partial\theta \end{pmatrix} (r, \theta - s). \end{aligned}$$

Таким образом, полагая $\theta = 0$, $\alpha = -s$, получаем равенство $e^{i\alpha}(\partial\psi/\partial\theta)(r, 0) = (\partial\psi/\partial\theta)(r, \alpha)$ при всех α , т.е. $\psi(r, \alpha) = -ie^{i\alpha}(\partial\psi/\partial\theta)(r, 0) + c(r)$. Но $e^{i\alpha}(\partial\psi/\partial r)(r, 0) - (\partial\psi/\partial r)(r, \alpha) = 0$. Подставляя сюда предыдущее равенство, убеждаемся, что $0 = (e^{i\alpha} - 1)c'(r)$. Таким образом, $c(r) = c$. Полагая $\phi = \psi - c$, имеем $\phi(r, \alpha) = -ie^{i\alpha}(\partial\phi/\partial\theta)(r, 0)$, т.е. $\phi(r, \alpha) = e^{i\alpha}\phi(r, 0)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $(0, b, c)^T \in Q_1 \mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\partial c/\partial x_1 - \partial b/\partial x_2 = 0$ при $r' < r < r''$. Тогда существует такая однозначная функция $\psi \in W_1$, что $(b, c)^T = \nabla\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование неоднозначной функции ψ — известная теорема анализа. Пусть $u = (0, b, c)^T$ и $S = \{x : r = r_0, x_0 = h_0\}$. Однозначность ψ следует из того, что

$$\int_S (u, U_1^\theta e_2) d\theta = \int_S (e^{i\theta} U_1^\theta u(h_0, r_0, 0), U_1^\theta e_2) d\theta = \int_S e^{i\theta} d\theta (u(h_0, r_0, 0), e_2) = 0,$$

т.е. циркуляция поля $(0, b, c)^T$ вдоль любой окружности $r = r_0$ есть нуль. При этом $\psi \in W_1$ по лемме 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $u_j(r, \theta) = (\prod_{k=1}^j ((2k+1)^2 - 1)^{-1}) r^{2j+1} e^{i\theta}$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. $\Delta u_j = u_{j-1}$, $\Delta u_0 = 0$.

4. Пусть выполняется (5) и $|\lambda| \neq 1$. Хорошо известно (см. [8, с. 51]), что тогда существует такая функция $P(x_0; x_1, x_2)$, что всюду в Ω

$$d = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \begin{pmatrix} \lambda & -i \\ i & \lambda \end{pmatrix} \nabla P \right), \quad (10)$$

$$\Delta P = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} P, \quad (11)$$

где Δ , ∇ — двумерные (по переменным x_1, x_2) оператор Лапласа и градиент соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $d \in J_0(\Omega)$ такая функция P из W_1 единственна, так как 0 — единственная константа в W_1 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d \in L$ удовлетворяет (5), $|\lambda| \neq 1$ и Ω содержит точки, лежащие на оси вращения. Тогда существует такой полином $R(x_0) = \sum_{i=0}^n M_{n-i} x_0^i$, что всюду в Ω

$$P(x_0; x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \right)^i u_i(x_1, x_2) \frac{\partial^{2i} R(x_0)}{\partial x_0^{2i}}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения. Пусть $x \in \Omega$ и

$$D(x) = \{(h, r \cos \theta, r \sin \theta)^T : h_1 < h < h_2, r_1 < r < r_2, \theta_1 < \theta < \theta_2\} \ni x$$

— окрестность точки x в Ω . Так как Ω — тело вращения, то в Ω содержится и кольцо $\tilde{D}(x) = \{(h, r \cos \theta, r \sin \theta)^T : h_1 < h < h_2, r_1 < r < r_2\}$. Если x лежит на оси вращения, то под $D(x)$ и $\tilde{D}(x)$ подразумевается цилиндрическая окрестность вида $\{(h, r \cos \theta, r \sin \theta)^T : h_1 < h < h_2, 0 \leq r < r_2\}$. Так как $d \in L$, то по лемме 3 имеем $d \in C^\infty(\Omega)$ и $P \in C^\infty(\Omega)$. По лемме 4 получаем $\partial^{n+1} d / \partial x_0^{n+1} = 0$ и, следовательно, $\partial^{n+1} P / \partial x_0^{n+1} = c = 0$ (см. замечание 5). Таким образом, в $D(x)$ имеет место представление

$$P = \sum_{i=0}^n a_i(x_1, x_2) x_0^{n-i}. \quad (13)$$

Используя (11), приходим к равенствам

$$\Delta a_{j+2} = (n-j)(n-j-1)(1-\lambda^2)\lambda^{-2}a_j, \quad \Delta a_0 = \Delta a_1 = 0 \quad (14)$$

при $r_1 < r < r_2$, причем $a_j \in W_1$, $j = 0, \dots, n$. Пусть $y \in \Omega$, $\tilde{D}(y) \in \Omega$ и в $\tilde{D}(y)$ имеет место представление $P = \sum_{i=0}^n b_i(x_1, x_2) x_0^{n-i}$. Если $\tilde{D} = \tilde{D}(x) \cap \tilde{D}(y) = \{h' < h < h'', r' < r < r''\}$, то $b_i = a_i$ при $r' < r < r''$. Используя лемму 5, нетрудно показать, что $b_i = a_i$ при всех $r \neq 0$. Итак, принимая во внимание линейную связность области Ω , получаем, что представление (13), (14) имеет место во всей области. Наличие точек области на оси вращения и лемма 3 приводят к тому, что a_j ограничены в нуле. Значит, используя лемму 5 и свойства функций u_j , мы можем решить систему уравнений (14). После подстановки в (13) получается в точности представление (12).

5. ЛЕММА 8. Пусть d принадлежит L и удовлетворяет (5). Тогда $|\lambda| \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|\lambda| = 1$. Из леммы 4 следует, что в любом кольце $\tilde{D}(x) \in \Omega$ имеет место представление $d = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} a_i(x_1, x_2) \\ b_i(x_1, x_2) \\ c_i(x_1, x_2) \end{pmatrix} x_0^{n-i}$, причем $a_i = 0$ (см. [3, с. 212]). Подставим это выражение в (7). Тогда мы получим, что $\partial c_i / \partial x_1 - \partial b_i / \partial x_2 = 0$. Из $\operatorname{div} d = 0$ следует, что $\partial b_i / \partial x_1 + \partial c_i / \partial x_2 = 0$. В силу леммы 7 имеем $(b_k, c_k)^T = \nabla \psi$, $\Delta \psi = 0$. Применяя леммы 5 и 6, получаем $(b_k, c_k)^T = M_k(1, i)^T$, т.е. $d = R(x_0)(0, 1, i)^T$. Так же как и в теореме 2,

показывается, что это представление имеет место во всей области Ω . Очевидно, что это противоречит ограниченности Ω .

ЛЕММА 9. Пусть d принадлежит L и удовлетворяет (5). Тогда $\lambda \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_0 = 0$, $Gd_0 = 0$ и $d_0 = (d^0, d^1, d^2)^T$. Тогда $(0, -d^2, d^1)^T = [d_0, e_0] = (\partial\psi/\partial x_0, \partial\psi/\partial x_1, \partial\psi/\partial x_2)^T$. Следовательно, при $x \in \Omega$ в $\tilde{D}(x)$ имеем $\psi = \psi(x_1, x_2)$, $d^1 = \partial\psi/\partial x_2$, $d^2 = -\partial\psi/\partial x_1$. Кроме того, $\operatorname{div} d_0 = 0$, т.е. $d^0 = f(x_1, x_2)$. При этом $\psi, f \in W_1$. Пусть $b = \sum_{k=0}^n \alpha_k d_k$, т.е.

$$2e = \operatorname{rot} b = \alpha_0 \operatorname{rot} d_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \operatorname{rot} d_k = \alpha_0 \operatorname{rot} d_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{i\lambda_k} \frac{\partial}{\partial x_0} d_k.$$

Но $\operatorname{rot} d_0 = (-\Delta\psi, \partial f/\partial x_2, -\partial f/\partial x_1)^T$, т.е. $\Delta\psi = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(x_0) u_i(x_1, x_2)$ (сумма, очевидно, имеет конечное число ненулевых членов); таким образом, $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(x_0) u_i(x_1, x_2)$. При $\theta = 0$ получаем $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} L_i r^{2i+1}$ и $d_0 = (f, \partial\psi/\partial x_2, -\partial\psi/\partial x_1)^T|_{\theta=0} = (f, (i/r)\psi(r), -\partial\psi(r)/\partial r)^T$. Значит, если $\tilde{D} = \tilde{D}(x) \cap \tilde{D}(y) \neq \emptyset$, то в $\tilde{D}$ имеем $(i/r)\psi_x(r) = (i/r)\psi_y(r)$ и $L_{x,i} = L_{y,i}$, т.е. $\psi_x(r) = \psi_y(r)$ при всех r . Мы показали, что во всей области

$$\psi(x_0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i u_i$$

(сумма конечна). Аналогично убеждаемся, что $f(x_0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ — полином по r при $\theta = 0$. Итак, при $\theta = 0$ функции $(i/r)\psi(r)$ и $f(r)$ будут полиномами по r и, следовательно, либо являются тождественными нулями, либо имеют конечное число нулей. В случае когда $\psi(r) \equiv 0$, а $f(r) \not\equiv 0$, вектор $(1, 0, 0)^T$ касается $\partial\Omega \cap \{x : x_2 = 0\}$ во всех точках, что противоречит ограниченности области Ω . Если же $\psi(r)$ не является тождественным нулем, то $\partial\Omega \cap \{x : x_2 = 0\}$ должна содержать отрезок вертикальной прямой, скажем прямой $x_1 = r_0$. Проверим, выполняется ли это условие для d_1 . Если бы оно выполнялось, то $d_1^1(r_0) = 0$ и, таким образом, $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(r_0) \partial^{2i} R_1(x_0) / \partial x_0^{2i} \equiv 0$ и $c_i \neq 0$. Следовательно, $R_1(x_0) \equiv 0$, $d_1 = 0$, и мы пришли к противоречию.

6. Далее нам понадобится следующая

ЛЕММА 10. Существуют такие числа α_k , $k = 1, \dots, n$, что если $d = \sum_{k=0}^n \alpha_k d_k$, то $dd/\partial x_0 = \sqrt{2}e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b = \sum_{k=0}^n \beta_k d_k$. Тогда непосредственно из определения L следует, что $\beta_k \neq 0$. Достаточно положить $\alpha_k = \beta_k/(\sqrt{2}i\lambda_k)$, что можно сделать в силу леммы 9. Тогда утверждение леммы следует из (7).

7. ЛЕММА 11. Пусть Ω имеет точки на оси вращения и $Gb = \lambda b$, т.е. $\dim L = 1$. Тогда

$$b = \sqrt{2} \begin{pmatrix} i(\lambda - 1)(x_1 + ix_2) \\ i\lambda(x_0 + c_0) \\ -\lambda(x_0 + c_0) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (7) и условию, $\partial b/\partial x_0 = 2i\lambda e$. Пусть

x лежит на оси вращения; тогда в $D(x)$ имеем $b = \begin{pmatrix} f_0(x_1, x_2) \\ \sqrt{2}i\lambda x_0 + f_1(x_1, x_2) \\ -\sqrt{2}\lambda x_0 + f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$.

Условие $\operatorname{div} b = 0$ дает нам $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = 0$. Условие $\operatorname{rot} b = 2e$ дает $\partial f_2/\partial x_1 - \partial f_1/\partial x_2 = 0$, $\partial f_0/\partial x_1 = \sqrt{2}i(\lambda - 1)$, $\partial f_0/\partial x_2 = \sqrt{2}(1 - \lambda)$. Таким образом, согласно лемме 7, $(f_1, f_2)^T = \nabla\psi$, $\Delta\psi = 0$, $f_0 = \sqrt{2}i(\lambda - 1)(x_1 + ix_2) + c_1$, и в силу лемм 5 и 6, а также замечания 5 в п. 4 имеем $\psi = cre^{i\theta} = c(x_1 + ix_2)$, $(f_1, f_2)^T = c(1, i)^T$, $c_1 = 0$. Как и в теореме 3, показываем, что это представление имеет место во всей области. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Ω имеет точки на оси вращения. Тогда $\dim L = 1$ в том и только том случае, когда Ω — слой между двумя концентрическими подобными эллипсоидами вращения или эллипсоид вращения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из предыдущей леммы, так как осесимметричные поверхности тока для b , определенного формулой (15), — это подобные эллипсоиды вращения с полуосями a , c , c , отношением квадратов полуосей $a^2/c^2 = (1 - \lambda)/\lambda$ и общим центром в точке $(-c_0, 0, 0)^T$. Достаточность следует из того, что указанная в теореме область односвязна. Таким образом, выполнение равенства (7) для вектора b , который, очевидно, совпадает с (15) при соответствующем выборе λ и c , влечет за собой (5) с $d = b$.

8. ТЕОРЕМА 5. Пусть Ω имеет точки на оси вращения и $\dim L = n + 1$. Тогда $n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d_i , $i = 0, \dots, n$, — векторы, определенные в п. 2, и $n > 0$. Мы знаем, что $\lambda_i \neq 0$, $|\lambda_i| \neq 1$ (см. леммы п. 5). Пусть $P_i(x_0; x_1, x_2)$, $R_i(x_0)$, $i = 0, \dots, n$, — введенные в п. 4 функции, соответствующие этим значениям. Так как $d_i \in J_0(\Omega)$ и Ω — тело вращения, то очевидно, что $\partial\Omega \cap \{x : x_2 = 0\}$ будет интегральной линией для полей

$$g_i(x_0, x_1) = \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial x_0}(x_0; x_1, x_2)}{\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 - 1} \left(\lambda_i \frac{\partial P(x_0; x_1, x_2)}{\partial x_1} - i \frac{\partial P(x_0; x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)} \right) \Bigg|_{(x_0, x_1, 0)}$$

— сужений полей d_i на плоскость $\{x : x_2 = 0\}$. Так как $P \in W_1$, то $\partial P/\partial x_2 = (\partial P/\partial r) \sin \theta + i(P/r) \cos \theta$ и на $\{x : x_2 = 0\}$ имеем $\partial P/\partial x_2 = (i/x_1)P(x_0; x_1, 0)$. Значит,

$$g_i(x_0, x_1) = \left(\frac{\frac{\partial P_i}{\partial x_0}(x_0; x_1, 0)}{\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 - 1} \left(\lambda_i \frac{\partial P_i(x_0; x_1, 0)}{\partial x_1} + \frac{P_i(x_0; x_1, 0)}{x_1} \right)} \right). \quad (16)$$

Заметим также, что $u_j(r, \theta) = c(2j)x_1^{2j+1}$, $j = 0, 1, \dots$, при $x_2 = 0$, где $c(2j) = \prod_{k=1}^j ((2k+1)^2 - 1)^{-1}$. Пусть далее

$$m_{2i}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \left(\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \right)^i ((2i+1)\lambda + 1), \quad m_{2i+1}(\lambda) = \left(\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \right)^i.$$

Таким образом, (16) можно записать в виде

$$g_k(x_0, x_1) = \begin{pmatrix} x_1 A_1^k(x_0) + x_1^3 A_3^k(x_0) + x_1^5 A_5^k(x_0) + \dots \\ A_0^k(x_0) + x_1^2 A_2^k(x_0) + x_1^4 A_4^k(x_0) + \dots \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} A_{2i}^k(x_0) &= c(2i) m_{2i}(\lambda_k) \partial^{2i} R_k(x_0) / \partial x_0^{2i}, \\ A_{2i+1}^k(x_0) &= c(2i+1) m_{2i+1}(\lambda_k) \partial^{2i+1} R_k(x_0) / \partial x_0^{2i+1} \end{aligned}$$

при $i = 0, 1, \dots$, причем $c(2i+1) = c(2i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\Delta(x_0) = (A_j^i(x_0))_{i,j=0,\dots,n}$.

ЛЕММА 12. $\det \Delta(x_0) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем точку x_0 так, что $\det \Delta(x_0) \neq 0$ (так как $\det \Delta(x_0)$ — полином, то он может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек). Следовательно, векторы $(A_0^i, A_1^i, \dots, A_n^i)^T|_{x_0}$, $i = 0, \dots, n$, образуют базис в $\mathbb{C}^{n+1}$, т.е. при некоторых α_k , $k = 0, \dots, n$, имеем $(1, 0, \dots, 0) = \alpha_0 A^0 + \dots + \alpha_n A^n$. Но это означает, что при этом x_0 и любом x_1 имеем $\alpha_0 g^0(x_0, x_1) + \dots + \alpha_n g^n(x_0, x_1) = (0, 1)^T$. Таким образом, такую линейную комбинацию можно построить для всех x_0 , кроме конечного числа значений, и $\partial \Omega \cap \{x : x_2 = 0\}$ — интегральная линия для любой линейной комбинации g_i . Значит, вектор $(0, 1)^T$ является касательным к границе во всех точках, что противоречит ограниченности области Ω .

Далее полагаем $R_i(x_0) = \sum_{k=0}^n M_k^i x_0^{n-k}$ и обозначим через $W(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \det(\lambda_j^i)_{i,j=0,\dots,n}$ определитель Вандермонда. Хорошо известно, что если $W(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = 0$, то существует $i \neq j$, такой, что $\lambda_i = \lambda_j$.

ЛЕММА 13. $\det(m_i(\lambda_j))_{i,j=0,\dots,n} = c W(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \prod_{k=0}^n \lambda_k^{-n} (1 - \lambda_k^{-1})^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta = 1/\lambda$; тогда $m_{2i}(\lambda) = -(\delta^2 - 1)^{i-1}((2i+1) + \delta)$ и $m_{2i+1}(\lambda) = (\delta^2 - 1)^i$. Таким образом, $(1 - \delta)m_l(\lambda)$ — полином со старшим членом δ^l при $l = 0, \dots, n$, т.е.

$$\det(m_i(\lambda_j))_{i,j=0,\dots,n} = W(\delta_0, \dots, \delta_n) \prod_{k=0}^n (1 - \delta_k)^{-1}.$$

Утверждение леммы получается при замене в этом равенстве δ_k на λ_k^{-1} .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $|\lambda_k| \neq 1$, $\lambda_k \neq \lambda_l$ (при $k \neq l$) и $\lambda_k \neq 0$, $k = 0, \dots, n$. Тогда $\det(m_i(\lambda_j))_{i,j=0,\dots,n} \neq 0$.

ЛЕММА 14. $\prod_{i=0}^n M_0^i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 12 имеем $\det \Delta(x_0) \equiv 0$. В частности, равен нулю коэффициент при старшем члене $x_0^{n(n+1)/2}$:

$$\det \left(c(i) \frac{n!}{(n-i)!} m_i(\lambda_j) M_0^j \right)_{i,j=0,\dots,n} = c \det(m_i(\lambda_j))_{i,j=0,\dots,n} \prod_{i=0}^n M_0^i.$$

Доказательство завершается применением следствия леммы 13.

Итак, согласно лемме 14, без ограничения общности можно положить $M_0^0 = 0$. Обратимся к лемме 10. Полагая α_i теми же, что и в ее условии (напомним, что

$$(x_0 + c, c_1, \dots, c_n)^T = \alpha_0 A^0(x_0) + \dots + \alpha_n A^n(x_0). \quad (18)$$
[illegible]

Итак, объединяя теоремы 5 и 4, получаем такой результат:

ТЕОРЕМА 7. Пусть полость есть ограниченная связная область, содержащая точки, лежащие на оси симметрии. Тогда $\mathbf{L}$ конечномерно только для полости, имеющей форму слоя между двумя концентрическими подобными эллипсоидами вращения или эллипсоида вращения.

Доказательство теоремы 7 вытекает из теорем 6 и 2'. Указанное следствие элементарно, так как односвязность влечет за собой наличие точек области на оси вращения.

3 Функциональный анализ и его приложения, т. 31, вып. 1

9. Однако если отказаться от требования связности области Ω , то можно реализовать случай $\dim L = m$ при любом $m > 1$. Об этом говорит следующая

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\Omega = \bigcup_{i=0}^n \Omega_i$, где Ω_i — непересекающиеся связные области, каждая из которых есть слой между двумя концентрическими подобными эллипсоидами вращения, причем если a_i, c_i, c_i обозначают полуоси внешнего эллипсоида для Ω_i , то a_i^2/c_i^2 различны. Тогда $\dim L = n+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Ω состоит из нескольких связных компонент, то пространство $J_0(\Omega)$ естественным образом разбивается в прямую сумму: $J_0(\Omega) = \bigoplus_{i=0}^n J_0(\Omega_i)$. При этом оператор G и проекторы Q_k , очевидно, коммутируют с ортогональными проекторами S_i на подпространства $J_0(\Omega_i)$. Доказательство теоремы завершает тот факт, что $d_i = S_i b$ являются собственными векторами оператора G с собственными значениями $\lambda_i = c_i^2/(a_i^2 + c_i^2)$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Рассмотрим Ω из условия теоремы 8. Под устойчивостью задачи (3) будем понимать вещественность спектра пучка $L(\lambda)$. Так как спектр оператора G вещественный (см. [3]), $\tilde{M}_1|_{L'} = \text{diag}\{1, 0, G\}$ и L конечномерно, то устойчивость имеет место, если $\det L_1(\lambda)|_{\tilde{L}}$ обращается в 0 только при вещественных λ . Рассуждения, аналогичные приведенным в [1], показывают, что при изменении параметра ω имеется конечное число промежутков вещественной оси, где теряется устойчивость.

Автор искренне благодарен А. Г. Костюченко за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, №3, 20–55 (1960).
2. Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью. ПМТФ, №3, 65–75 (1960).
3. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные спектральные задачи. Наука, М., 1989.
4. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Наука, М., 1970.
5. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Наука, М., 1965.
6. Понтрягин Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Изв. АН СССР, сер. матем., 8, №6, 243–280 (1944).
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 2. Мир, М., 1977.
8. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Гидрометеиздат, Л., 1975.
9. Рвалов Р. В., Роговой В. М. О вращательных движениях тела с полостью, содержащей жидкость. Механика твердого тела, №3, 15–20 (1972).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
31 октября 1995 г.