Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Гейлер, М. М. Сенаторов, Периодические потенциалы, для которых все лакуны ненулевые, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 67–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:39:48

Периодические потенциалы, для которых все лакуны ненулевые*

© 1997. В. А. Гейлер, М. М. СЕНАТОРОВ

Для $2T$ -периодической функции $U(x)$, суммируемой с квадратом на отрезке $[-T, T]$, периодический оператор Шрёдингера (оператор Хилла) H определяется как замыкание в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ симметричного оператора, заданного в $C_0^\infty(\mathbb{R})$ дифференциальным выражением $l[y] = -y'' + U(x)y$. Пусть $\tilde{\lambda}_0, \lambda_2, \tilde{\lambda}_2, \dots$ — собственные значения периодической $(y(-T) - y(T) = y'(-T) - y'(T) = 0)$, а $\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \lambda_3, \tilde{\lambda}_3, \dots$ — собственные значения антипериодической $(y(-T) + y(T) = y'(-T) + y'(T) = 0)$ краевых задач, порождаемых на отрезке $[-T, T]$ операций l . Оператор H самосопряжен, его спектр непрерывен и состоит из последовательности сегментов $[\tilde{\lambda}_0, \lambda_1], [\tilde{\lambda}_1, \lambda_2], \dots, [\tilde{\lambda}_{k-1}, \lambda_k], \dots$, разделенных лакунами $(-\infty, \tilde{\lambda}_0), (\lambda_1, \tilde{\lambda}_1), \dots, (\lambda_k, \tilde{\lambda}_k), \dots$. Некоторые лакуны (или даже все, кроме первой) могут оказаться вырожденными [1]. В ряде работ изучалась задача восстановления потенциала U по спектру оператора H (см. [2–4] и др.). В частности, из результатов работы [3] вытекает, что для потенциала U «общего положения» (множество второй категории в $L^2(-T, T)$) все лакуны невырожденные. Тем не менее конкретных примеров потенциалов такого вида известно довольно мало. Наиболее известны из них $U(x) = \cos x$, приводящий к оператору Матье, а также (разрывный) потенциал Кронига–Пенни, предельный случай которого (гребенка Дирака) используется во многих работах по физике твердого тела [1]. Цель заметки — дать простую конструкцию, позволяющую получить широкий класс непрерывных периодических потенциалов, для которых все лакуны ненулевые.

Обозначим через $\mu_k(T)$ (соответственно $\nu_k(T)$), где $k = 0, 1, \dots$, упорядоченную последовательность собственных чисел задачи Дирихле (Неймана) для оператора Штурма–Лиувилля, заданного дифференциальным выражением l на отрезке $[-T, T]$. Хорошо известно, что при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $\nu_k(T) < \mu_k(T) < \nu_{k+2}(T)$, причем μ_k и ν_{k+1} лежат в $[\lambda_{k+1}, \tilde{\lambda}_{k+1}]$ [5]. Основными результатами заметки являются следующая теорема и ее следствие.

ТЕОРЕМА. Пусть $2T$ -периодическая непостоянная функция U допускает продолжение с отрезка $[-T, T]$ до вещественно-аналитической четной выпуклой функции V на всей числовой прямой. Тогда $\mu_k(T) < \nu_{k+1}(T)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий теоремы в спектре оператора H все лакуны невырожденные.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть V — непостоянная выпуклая четная функция класса $C^{(2)}(-1, 1)$, и пусть (μ_k) (соответственно (ν_k)), $k = 0, 1, \dots$, — упорядо-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №96-01-00439.

ченная последовательность собственных чисел задачи Дирихле (Неймана) для оператора Штурма–Лиувилля, заданного дифференциальным выражением $L = -d^2/dx^2 + V$ на отрезке $[-1, 1]$. Если $V(1) < \nu_{k+1}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то $\mu_k < \nu_{k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $E = \nu_{k+1}$ и рассмотрим произвольное ненулевое решение φ уравнения $L\varphi = E\varphi$. Тогда функция $u(x) = \varphi'(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u''(x) + \frac{V'(x)}{E - V(x)} u'(x) + (E - V(x))u(x) = 0. \quad (1)$$

Стандартной заменой $\eta = \Psi u$, $\Psi(x) = \exp \{2^{-1} \int V'(x)[E - V(x)]^{-1} dx\}$, приведем (1) к виду

$$\eta'' + \left[(E - V) - \frac{2V''(E - V) + 3V'^2}{(E - V)^2} \right] \eta = 0. \quad (2)$$

Сравним (2) с уравнением

$$\varphi'' + (E - V)\varphi = 0. \quad (3)$$

Пусть $\varphi(x)$ — собственная функция задачи Неймана, соответствующая числу ν_{k+1} ; тогда φ имеет ровно $k + 1$ нулей в интервале $(-1, 1)$. Таким образом, в интервале $(-1, 1)$ функция φ' имеет не менее k нулей, а на отрезке $[-1, 1]$ — не менее $k + 2$ нулей. Следовательно, и функция $\eta = \Psi\varphi'$, будучи решением уравнения (2), имеет на этом отрезке хотя бы $k + 2$ нулей. Пусть $\psi(x) = \psi(x; E)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям $\psi(-1) = 0$, $\psi'(-1) = 1$. По теореме Штурма $\psi(x)$ имеет не менее $k + 1$ нулей на интервале $(-1, 1)$ и, значит, не менее $k + 2$ нулей на промежутке $[-1, 1)$. Уменьшая E в уравнении (3), мы заставим нули функции ψ двигаться вправо. Когда $(k + 2)$ -й нуль этой функции (считаем -1 первым нулем) достигнет точки 1, мы получим решение задачи Дирихле с собственным числом μ_k . Значит, $\mu_k < \nu_{k+1}$. $\square$

Дадим набросок доказательства теоремы, пользуясь введенными выше обозначениями. Не умаляя общности, будем считать далее, что $U(0) = 0$. Выберем систему функций $\Phi_1(x; E)$, $\Phi_2(x; E)$, являющуюся при каждом $E \in \mathbb{R}$ фундаментальной системой решений уравнения $-u'' + V(x)u = Eu$; можно считать, что эти функции аналитически зависят от x и E . Пусть

$$D(T; E) = \begin{vmatrix} \Phi_1(-T; E) & \Phi_2(-T; E) \\ \Phi_1(T; E) & \Phi_2(T; E) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Заменяя в (4) функции Φ_j их производными по x , определяем функцию $N(T; E)$; аргумент T в обеих функциях лежит на полуоси $T > 0$, а E — любое вещественное число. Как известно, числа $\mu_k(T)$ (соответственно $\nu_k(T)$) являются простыми корнями уравнения $D(T; E) = 0$ ($N(T; E) = 0$) относительно E . Легко видеть, что при наших предположениях $\mu_k(T)$, $\nu_{k+1}(T) \geq (k + 1)^2 \pi^2 / 4T^2$; поэтому при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu_k(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \nu_{k+1}(T) = +\infty. \quad (5)$$

Введем двумерные векторы

$$u_j = (\Phi_1(T_j; E), \Phi_2(T_j; E)), \quad u'_j = (\Phi'_1(T_j; E), \Phi'_2(T_j; E)),$$

где $j = 1, 2$, $T_1 = -T$, $T_2 = T$. Нетрудно доказать такое утверждение:

(I) Если $E = \mu_k(T)$ или $E = \nu_k(T)$, то $u_1 \wedge u'_1 = u_2 \wedge u'_2 \neq 0$.

Из этого утверждения в свою очередь вытекают следующие:

(II) $\mu'_k(T) < 0$ при всех $T > 0$ и $k \in \mathbb{N}$.

(III) Пусть $k \geq 1$. Тогда существует единственная точка $T_k^0 > 0$, являющаяся решением уравнения

$$V(T) = \nu_k(T); \quad (6)$$

при этом $\nu'_k(T) < 0$, если $T < T_k^0$, и $\nu'_k(T) > 0$, если $T > T_k^0$.

Для доказательства утверждения (II) заметим, что из (I) вытекает соотношение $\partial D(T; E)/\partial T \neq 0$ при $E = \mu_k(T)$. Отсюда $\mu'_k(T) \neq 0$ при всех T , и осталось сослаться на (5).

Для доказательства (III) воспользуемся равенством

$$\partial N(T; E)/\partial T = (V(T) - E)(u_1 \wedge u'_2 - u'_1 \wedge u_2),$$

с учетом которого из (I) получаем, что уравнение (6) равносильно уравнению $\nu'_k(T) = 0$. Если бы уравнение (6) не имело корней, то из (5) получилось бы неравенство $\nu'_k(T) < 0$ для любого $T > 0$. С другой стороны, $V(T)$ неограниченно возрастает при $T > 0$; поэтому из (5) получаем, что графики функций V и ν_k пересекаются; противоречие. В силу аналитичности рассматриваемых функций на полуоси $T > 0$ существует наименьший корень уравнения (6); обозначим его через T_k^0 . Допустим, что это уравнение имеет еще хотя бы один корень, и пусть T' — наименьший из них. Несложные рассуждения показывают, что тогда $V'(T') \leq 0$, а это противоречит свойствам функции V . Учитывая (5), для завершения доказательства утверждения (III) достаточно показать, что $\nu''_k(T_k^0) \neq 0$. Это будет доказано, если мы покажем, что $\partial^2 N/\partial T^2 \neq 0$ при $T = T_k^0$, $E = \nu_k(T_k^0)$. Если это не так, то при тех же значениях T и E прямым подсчетом приходим к равенству $V'(T)(u_1 \wedge u'_2 - u'_1 \wedge u_2) = 0$, которое противоречит утверждению (I).

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Пусть сначала $0 < T < T_{k+1}^0$. Тогда в силу (III) $V(T) < V(T_{k+1}^0) = \nu_{k+1}(T_{k+1}^0) < \nu_{k+1}(T)$; поэтому из леммы вытекает, что $\mu_k(T) < \nu_{k+1}(T)$. В пределе имеем $\mu_k(T_{k+1}^0) \leq \nu_{k+1}(T_{k+1}^0)$. Пусть теперь $T > T_{k+1}^0$. Тогда в силу (II) и (III) $\nu_{k+1}(T) > \nu_{k+1}(T_{k+1}^0) \geq \mu_k(T_{k+1}^0) > \mu_k(T)$. Осталось убедиться, что $\mu_k(T_{k+1}^0) \neq \nu_{k+1}(T_{k+1}^0)$. Но в противном случае из равенств $\mu_k(T_{k+1}^0) = \nu_{k+1}(T_{k+1}^0)$ и $\nu'_{k+1}(T_{k+1}^0) = 0$ и уже доказанных неравенств легко получить, что $\mu'_k(T_{k+1}^0) = 0$, а это противоречит (II). Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу четности потенциала U мы имеем на самом деле $\mu_k = \lambda_{k+1}$, $\nu_{k+1} = \tilde{\lambda}_{k+1}$. В [4] доказано, что в подпространстве $E_0 \subset L^2(-T, T)$ четных $2T$ -периодических потенциалов U с нулевым средним на отрезке $[-T, T]$ соответствие $U \mapsto (\nu_{k+1} - \mu_k)_{k \geq 1}$ есть вещественно-аналитический изоморфизм пространства E_0 на пространство l^2 . Результаты заметки дают примеры потенциалов, образы которых при этом изоморфизме лежат в конусе положительных элементов l^2_+ . Отметим также, что в отличие от [3, 4] результаты нашей заметки не позволяют получить потенциал по заранее заданному набору спектральных данных.

Наконец, заметим, что к доказательству неравенств $\mu_k(T) < \nu_{k+1}(T)$ сводится строгое обоснование результатов об отсутствии рассеяния назад краевых состояний в квантовом эффекте Холла [6]; в ряде работ эти результаты получались численными методами.

В заключение авторы благодарят рецензента за замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4. Мир, М., 1982. 2. Станкевич И. В. ДАН СССР, **192**, №1, 34–37 (1970). 3. Марченко В. А., Островский И. В. Матем. сб., **97**, вып. 4, 540–606 (1975). 4. Garnett J., Trubowitz E. Comment. Math. Helv., **59**, 258–315 (1984). 5. Левитан Б. М., Сегал И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. Наука, М., 1988. 6. Квантовый эффект Холла. Сб. статей (Сост. А. Я. Шик, Ю. В. Шмарцев), Мир, М., 1986.

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Поступило в редакцию
20 февраля 1996 г.

УДК 517.5+517.43

Спектральный анализ задачи Редже с параметрами*

© 1997. Г. М. ГУБРЕЕВ, В. Н. ПИВОВАРЧИК

Заметка посвящена исследованию спектральной задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(a) + (i\alpha\lambda + \beta)y(a) = 0, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

с вещественным потенциалом $q \in L_2(0, a)$ и параметрами α, β . Введение параметров объясняется тем, что к такой задаче с помощью преобразования Лиувилля приводится задача о колебаниях гладкой струны с вязким трением на правом конце, причем ограничение $\alpha > 0$ вызвано тем, что этот параметр пропорционален коэффициенту трения. При $\alpha = 1, \beta = 0$ получаем классическую задачу Редже [1], возникающую при описании рассеяния на финитном потенциале. В [1] для случая однократного спектра доказана полнота системы собственных функций задачи в пространстве $L_2(0, 2a)$ в предположении, что $a \in \text{supp } q$. Отсюда выводится (кстати, некорректно) возможность разложения в ряды по собственным функциям задачи произвольной функции из $L_2(0, 2a)$. Опираясь на эти разложения, автор дает решение интегрального уравнения Гельфанда–Левитана, которое позволяет восстановить потенциал по заданной матрице рассеяния.

Настоящая заметка посвящена развитию этих исследований. Оставляя в стороне общий случай, объясним суть этого развития на примере задачи Редже ($\alpha = 1, \beta = 0$). Здесь впервые дано полное описание спектра такой задачи

* Эта работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, гранты UCZ000 и UCZ200.