Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, В. Н. Пивоварчик, Спектральный анализ задачи Редже с параметрами, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 70–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:54:16

Наконец, заметим, что к доказательству неравенств $\mu_k(T) < \nu_{k+1}(T)$ сводится строгое обоснование результатов об отсутствии рассеяния назад краевых состояний в квантовом эффекте Холла [6]; в ряде работ эти результаты получались численными методами.

В заключение авторы благодарят рецензента за замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4. Мир, М., 1982. 2. Станкевич И. В. ДАН СССР, **192**, №1, 34–37 (1970). 3. Марченко В. А., Островский И. В. Матем. сб., **97**, вып. 4, 540–606 (1975). 4. Garnett J., Trubowitz E. Comment. Math. Helv., **59**, 258–315 (1984). 5. Левитан Б. М., Сегал И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. Наука, М., 1988. 6. Квантовый эффект Холла. Сб. статей (Сост. А. Я. Шик, Ю. В. Шмарцев), Мир, М., 1986.

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Поступило в редакцию
20 февраля 1996 г.

УДК 517.5+517.43

Спектральный анализ задачи Редже с параметрами*

© 1997. Г. М. ГУБРЕЕВ, В. Н. ПИВОВАРЧИК

Заметка посвящена исследованию спектральной задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(a) + (i\alpha\lambda + \beta)y(a) = 0, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

с вещественным потенциалом $q \in L_2(0, a)$ и параметрами α, β . Введение параметров объясняется тем, что к такой задаче с помощью преобразования Лиувилля приводится задача о колебаниях гладкой струны с вязким трением на правом конце, причем ограничение $\alpha > 0$ вызвано тем, что этот параметр пропорционален коэффициенту трения. При $\alpha = 1, \beta = 0$ получаем классическую задачу Редже [1], возникающую при описании рассеяния на финитном потенциале. В [1] для случая однократного спектра доказана полнота системы собственных функций задачи в пространстве $L_2(0, 2a)$ в предположении, что $a \in \text{supp } q$. Отсюда выводится (кстати, некорректно) возможность разложения в ряды по собственным функциям задачи произвольной функции из $L_2(0, 2a)$. Опираясь на эти разложения, автор дает решение интегрального уравнения Гельфанда–Левитана, которое позволяет восстановить потенциал по заданной матрице рассеяния.

Настоящая заметка посвящена развитию этих исследований. Оставляя в стороне общий случай, объясним суть этого развития на примере задачи Редже ($\alpha = 1, \beta = 0$). Здесь впервые дано полное описание спектра такой задачи

* Эта работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, гранты UCZ000 и UCZ200.

и доказана теорема единственности (теоремы 1, 3). Это позволило, опираясь на процедуру Левитана–Гасымова–Марченко, дать решение обратной задачи для потенциалов класса $L_2(0, a)$ только по спектру (а не по матрице рассеяния). Далее, теорема Редже о полноте является частным случаем теоремы 5, в которой фактически определяется зависимость интервала полноты от расположения носителя потенциала q . Отметим также, что теорема 6 является новой и для случая классической задачи Редже.

1. Спектр и обратная задача. Спектр задачи (1)–(2) совпадает с множеством корней целой функции экспоненциального типа

$$\varphi(\lambda) = s'(\lambda, a) + (i\alpha\lambda + \beta)s(\lambda, a), \quad (3)$$

где $s(\lambda, x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $s(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) - 1 = 0$. Спектр симметричен относительно мнимой оси и все достаточно большие по модулю собственные значения простые (за исключением, быть может, случая $\alpha = 1$, $\beta = 0$). Симметричные относительно мнимой оси собственные значения имеют одинаковую кратность. В замкнутой нижней полуплоскости возможно лишь конечное число собственных значений. Они чисто мнимые и простые; их число не зависит от $\alpha > 0$ и его можно оценить. Например, при $\beta = 0$ число собственных значений в замкнутой нижней полуплоскости не превосходит величины $\int_0^a x|q(x)|dx$. Перечисленные результаты получены путем сведения задачи (1)–(2) к квадратичному операторному пучку специального вида [2].

Дадим теперь характеристику всех возможных спектров задач Редже (1)–(2) с потенциалами $q \in L_2(0, a)$. Возьмем две перемежающиеся последовательности вещественных чисел

$$-\infty < \nu_1 < \mu_1 < \nu_2 < \mu_2 < \dots$$

с асимптотиками

$$\nu_k = \frac{\pi^2}{a^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - 2p + \beta_k, \quad \mu_k = \frac{\pi^2}{a^2} k^2 - 2p + \alpha_k,$$

где $p \in \mathbb{R}$, $\{\alpha_k\}_1^\infty, \{\beta_k\}_1^\infty \in l_2$, и введем в рассмотрение целые функции

$$\theta_1(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \prod_1^\infty \left(\frac{\pi}{a} \left(k - \frac{1}{2}\right) \right)^{-2} (\nu_k - \lambda^2), \quad \theta_2(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} a \prod_1^\infty \left(\frac{\pi}{a} k \right)^{-2} (\mu_k - \lambda^2).$$

Через $\mathfrak{R}_a$ обозначим множество функций вида

$$\varphi(\lambda) = \theta_1(\lambda) + (i\alpha\lambda + \beta)\theta_2(\lambda), \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы множество Λ было спектром задачи Редже (1)–(2), необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с множеством корней некоторой функции класса $\mathfrak{R}_a$.

В случае $\alpha \neq 1$ можно дать явное описание спектра задачи Редже. Обозначим через Q_β множество потенциалов q , для которых оператор $(Ay)(x) = -y'' + q(x)y$ с областью определения $D(A) = \{y \in W_2^2(0, a), y(0) = y'(a) + \beta y(a) = 0\}$ строго положителен. Именно такой класс потенциалов соответствует равномерно положительной плотности распределения массы в аналоге задачи Редже для струны. Например, в случае $\alpha \in (0, 1)$ из теоремы 1 выводится теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty \cup \{\lambda_k\}_{-\infty}^{-1}$ была спектром задачи (1)–(2) с потенциалом $q \in Q_\beta$ при некоторых $\beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in (0, 1)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: (i) $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$, $\lambda_k \in \Lambda$; (ii) число чисто мнимых λ_k (с учетом кратностей) четно; (iii) Λ симметрична относительно мнимой оси и кратности симметрично расположенных точек совпадают; (iv) при соответствующей нумерации правая ветвь $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет асимптотическим формулам

$$\lambda_n = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{1}{2} \right) + iG + \frac{H}{n} + \frac{b_n}{n}, \quad G > 0, \quad H \in \mathbb{R}, \quad \{b_n\}_1^\infty \in l_2. \quad (4)$$

Аналогичный результат с несколько измененными формулами (4) имеет место и в случае $\alpha > 1$.

Перейдем теперь к процедуре восстановления параметров задачи по спектру. Через $S\{q, \alpha, \beta, a\}$ обозначим спектр задачи Редже на отрезке $[0, a]$ с $q \in L_2(0, a)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 3. Если $S\{q_1, \alpha_1, \beta_1, a\} = S\{q_2, \alpha_2, \beta_2, a\}$, то $q_1(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} q_2(x)$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$.

Чтобы сформулировать следующий результат, введем такие обозначения. Если $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^\infty$ является спектром задачи (1)–(2) на отрезке $[0, a]$, то полагаем

$$d = a - \pi \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_+(r)}{r}, \quad n_+(r) = \operatorname{card} \{ \lambda_k \in \Lambda : |\lambda_k| < r, \operatorname{Re} \lambda_k > 0 \}, \quad (5)$$

$$\varphi(\lambda) = C\psi(\lambda), \quad \psi(\lambda) = e^{i d \lambda} \text{ в.р. } \prod_{\lambda_k \in \Lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right), \quad (6)$$

где константа C однозначно определяется условием существования предела

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{C\psi(\lambda) - \cos \lambda a}{i \sin \lambda a},$$

причем здесь, а также в формулах следующей ниже теоремы, λ стремится к ∞ , оставаясь на какой-нибудь прямой, параллельной вещественной оси. Формулы (5)–(6) корректны, поскольку Λ является множеством корней функции класса М. Картрайт [3]. Далее, если $\Lambda = \emptyset$, то полагаем, что $\psi(\lambda) = \exp \{i a \lambda\}$. И наконец, введем обозначения

$$\varphi_{\text{н}}(\lambda) = \frac{1}{2}(\varphi(\lambda) - \varphi(-\lambda)), \quad \varphi_{\text{ч}}(\lambda) = \frac{1}{2}(\varphi(\lambda) + \varphi(-\lambda)).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть Λ — спектр задачи Редже (1)–(2) на $[0, a]$ с $q \in L_2(0, a)$. Тогда параметры задачи восстанавливаются по формулам

$$\alpha = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{C\psi(\lambda) - \cos \lambda a}{i \sin \lambda a}, \quad \beta = i\alpha \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda \varphi_{\text{ч}}(\lambda) - \lambda \cos \lambda a - \gamma \sin \lambda a}{\varphi_{\text{н}}(\lambda)},$$

где $\gamma = 2(i\alpha\pi)^{-1} \int_0^\infty (\varphi_{\text{н}}(\lambda) - i\alpha \sin \lambda a) \sin \lambda a \, d\lambda$. Далее, квадраты корней функций

$$\theta_1(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_{\text{ч}}(\lambda) - \beta(i\alpha)^{-1} \varphi_{\text{н}}(\lambda) \lambda^{-1}, \quad \theta_2(\lambda) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_{\text{н}}(\lambda) \lambda^{-1}$$

задают два спектра краевых задач для уравнения (1) с граничными условиями $y(0) = y(a) = 0$, $y(0) = y'(a) = 0$, по которым однозначно определяется $q \in L_2(0, a)$ в силу канонической процедуры [4].

СЛЕДСТВИЕ. (а) Спектр задачи Редже пуст в том и только том случае, когда $q(x) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

(б) Спектр не может быть конечным множеством.

2. Полнота и базисность. Снова рассмотрим задачу (1)–(2), предполагая на этот раз, что q задан при всех $x \geq 0$ и $q \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Спектр такой задачи снова совпадает с множеством корней функции (3), однако теперь соответствующие собственные и присоединенные функции определены при всех $x \in \mathbb{R}_+$. В этом пункте мы вычислим такое число T , что система корневых функций задачи Редже полна и минимальна в пространстве $L_2(0, T)$, а также обсудим вопрос о базисности этой системы. Такая постановка инициирована работой [5], в которой рассмотрены аналогичные задачи для случая струны. Отметим, что доказательства теорем 5, 6 полностью основаны на результатах работы [6]. Положим

$$T = h_\varphi(\pi/2) + h_\varphi(-\pi/2), \quad (7)$$

где h_φ — индикатор роста функции φ , определяемой равенством (3). Из (5), (6) следует и другое выражение для T :

$$T = 2\pi \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n_+(r).$$

ТЕОРЕМА 5. Система корневых функций задачи Редже с параметрами $\alpha > 0$, β полна в пространстве $L_2(0, b)$, если $b < T$, полна и минимальна, если $b = T$, и не полна, если $b > T$.

Из (7) вытекает, что $0 \leq T \leq 2a$, причем равенство $T = 2a$ имеет место, например, в случае $\alpha \neq 1$ (но не только в этом случае). С другой стороны, T может быть сколь угодно малым и $T = 0$, если спектр задачи пуст. Это объясняется тем, что при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ имеет место оценка $T \leq 2b$, где b — крайняя правая точка множества $\text{supp } q$ на сегменте $[0, a]$.

ТЕОРЕМА 6. (i) Если $\alpha \neq 1$, то при любом $\beta \in \mathbb{R}$ система корневых функций задачи Редже образует безусловный базис пространства $L_2(0, T)$.

(ii) Если $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$, то система корневых функций задачи Редже не образует безусловного базиса пространства $L_2(0, T)$.

(iii) Если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, а потенциал таков, что при некотором $\nu > 0$

$$q(x) \sim C(x - a)^\nu, \quad x \rightarrow a - 0, \quad C \neq 0,$$

то система корневых функций не образует безусловного базиса пространства $L_2(0, T)$.

Объясним вкратце, чем вызвана небазисность системы корневых функций в двух последних случаях. Дело в том, что в этих случаях мнимые части собственных значений λ_n растут как $\log |n|$ и, стало быть, последовательность Λ не удовлетворяет условию Карлесона. С другой стороны, доказываем, что карлесоновость спектра необходима для базисности.

Авторы выражают признательность участникам семинара Д. З. Арова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Regge T.* Nuovo Cimento, **9**, No. 3. 491–503 (1958).
2. *Баркаръ С. М., Пивоварчик В. Н.* Изв. Акад наук респ. Молдова, **1** (7), 17–28 (1992).
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. ГТИЗ, М., 1956.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
5. *Hrusev S. V., Nikolskii N. K., Pavlov B. S.* Lect. Notes in Math, Vol. 864 (1981), pp. 214–335.
6. *Губреев Г. М.* Записки научн. сем. ЛОМИ. Исслед. по теор. опер. и теор. функ., **19**, 34–80 (1991).

Южно-Украинский педагогический университет
Одесская государственная Академия
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию
30 января 1996 г.

УДК 515.171.16+515.173.2

О существовании деформаций без критических точек (задача Тесье для функций двух переменных)*

© 1997. С. М. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

Пусть $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток C^∞ -функции с алгебраически изолированной критической точкой в начале координат, f — представитель ростка f , определенный в окрестности U начала координат, f_λ — семейство функций на U , гладкое по λ из окрестности нуля в $\mathbb{R}$ и такое, что $f_0 = f$. Функция $\tilde{f} = f_\lambda$ для достаточно малых $\lambda \neq 0$ будет называться (малой) деформацией ростка f .

Для достаточно малых δ и ε , таких, что $0 < |\varepsilon| \ll \delta$, пусть $M_\varepsilon = M_\varepsilon(f) = \{z \in \mathbb{R}^n, \|z\| \leq \delta : f(z) \leq \varepsilon\}$ — множество меньших значений ростка f . Для $\varepsilon > 0$ пространство $M_{+\varepsilon}$ стягиваемо, а пространство $M_{-\varepsilon}$ гомотопически эквивалентно многообразию уровня $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(-\varepsilon) \cap B_\delta$. Существуют очевидные топологические препятствия к существованию деформаций ростка f без критических точек. Если пара $(M_{+\varepsilon}, M_{-\varepsilon})$ ($0 < \varepsilon \ll \delta$) гомотопически нетривиальна (т.е. если $M_{-\varepsilon}$ не является деформационным ретрактом множества $M_{+\varepsilon}$), то любая малая деформация ростка f имеет критическую точку в B_δ . Пара $(M_{+\varepsilon}, M_{-\varepsilon})$ гомотопически тривиальна тогда и только тогда, когда пространство $M_{-\varepsilon}$ стягиваемо. Варианты следующего вопроса известны под названием, упомянутым в заголовке.

Верно ли, что если пространство $M_{-\varepsilon}$ стягиваемо, то росток f имеет деформацию без критических точек?

Мы даем ответ на этот вопрос для функций двух переменных. Пусть $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток функции двух переменных. Если множество $\{f = 0\} \cap B_\delta$ не состоит из одной точки, то $M_{-\varepsilon}$ гомотопически эквивалентно несвязному объединению r точек, где r — количество ветвей кривой $\{f = 0\}$. Поэтому $M_{-\varepsilon}$ стягиваемо тогда и только тогда, когда кривая $\{f = 0\}$ имеет одну вещественную ветвь. Далее мы будем считать, что функция f определена

* Работа поддержана грантами 95-01-01122а РФФИ и INTAS-94-4373.