Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Гусейн-Заде, О существовании деформаций без критических точек (задача Тесье для функций двух переменных), *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 74–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 10:45:05

ЛИТЕРАТУРА

1. *Regge T.* Nuovo Cimento, **9**, No. 3. 491–503 (1958).
2. *Баркаръ С. М., Пивоварчик В. Н.* Изв. Акад наук респ. Молдова, **1** (7), 17–28 (1992).
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. ГТИЗ, М., 1956.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
5. *Hrusev S. V., Nikolskii N. K., Pavlov B. S.* Lect. Notes in Math, Vol. 864 (1981), pp. 214–335.
6. *Губреев Г. М.* Записки научн. сем. ЛОМИ. Исслед. по теор. опер. и теор. функ., **19**, 34–80 (1991).

Южно-Украинский педагогический университет
Одесская государственная Академия
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию
30 января 1996 г.

УДК 515.171.16+515.173.2

О существовании деформаций без критических точек (задача Тесье для функций двух переменных)*

© 1997. С. М. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

Пусть $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток C^∞ -функции с алгебраически изолированной критической точкой в начале координат, f — представитель ростка f , определенный в окрестности U начала координат, f_λ — семейство функций на U , гладкое по λ из окрестности нуля в $\mathbb{R}$ и такое, что $f_0 = f$. Функция $\tilde{f} = f_\lambda$ для достаточно малых $\lambda \neq 0$ будет называться (малой) деформацией ростка f .

Для достаточно малых δ и ε , таких, что $0 < |\varepsilon| \ll \delta$, пусть $M_\varepsilon = M_\varepsilon(f) = \{z \in \mathbb{R}^n, \|z\| \leq \delta : f(z) \leq \varepsilon\}$ — множество меньших значений ростка f . Для $\varepsilon > 0$ пространство $M_{+\varepsilon}$ стягиваемо, а пространство $M_{-\varepsilon}$ гомотопически эквивалентно многообразию уровня $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(-\varepsilon) \cap B_\delta$. Существуют очевидные топологические препятствия к существованию деформаций ростка f без критических точек. Если пара $(M_{+\varepsilon}, M_{-\varepsilon})$ ($0 < \varepsilon \ll \delta$) гомотопически нетривиальна (т.е. если $M_{-\varepsilon}$ не является деформационным ретрактом множества $M_{+\varepsilon}$), то любая малая деформация ростка f имеет критическую точку в B_δ . Пара $(M_{+\varepsilon}, M_{-\varepsilon})$ гомотопически тривиальна тогда и только тогда, когда пространство $M_{-\varepsilon}$ стягиваемо. Варианты следующего вопроса известны под названием, упомянутым в заголовке.

Верно ли, что если пространство $M_{-\varepsilon}$ стягиваемо, то росток f имеет деформацию без критических точек?

Мы даем ответ на этот вопрос для функций двух переменных. Пусть $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток функции двух переменных. Если множество $\{f = 0\} \cap B_\delta$ не состоит из одной точки, то $M_{-\varepsilon}$ гомотопически эквивалентно несвязному объединению r точек, где r — количество ветвей кривой $\{f = 0\}$. Поэтому $M_{-\varepsilon}$ стягиваемо тогда и только тогда, когда кривая $\{f = 0\}$ имеет одну вещественную ветвь. Далее мы будем считать, что функция f определена

* Работа поддержана грантами 95-01-01122а РФФИ и INTAS-94-4373.

в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^2$ (можно предполагать, что f является аналитическим ростком или даже многочленом). Кривая $\{f = 0\} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ состоит из нескольких неприводимых компонент. Если функция f вещественна, то кривая $\{f = 0\}$ имеет несколько вещественных компонент и несколько пар комплексно-сопряженных компонент.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — вещественно-аналитический росток с изолированной критической точкой в начале координат и что кривая нулевого уровня $\{f = 0\} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ имеет одну вещественную компоненту. Тогда существует вещественная деформация $\tilde{f}$ ростка f , не имеющая критических точек.*

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Следующее утверждение позволяет рассматривать только неприводимые (т.е. имеющие неприводимую комплексную кривую нулевого уровня) ростки f .

ЛЕММА. *Предположим, что утверждение теоремы имеет место для всех неприводимых вещественных ростков f с числом Милнора $\leq \mu$. Тогда оно имеет место и для всех ростков с числом Милнора $\leq \mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть росток $\{f = 0\}$ комплексной кривой нулевого уровня вещественного ростка f имеет одну вещественную компоненту и несколько пар комплексно-сопряженных компонент. Тогда f может быть представлен в виде произведения $f = g \cdot h$ таких вещественных ростков g и h , что $g(z) > 0$ при $z \neq 0$, а росток h неприводим. Пусть $f_\lambda = (g + \lambda) \cdot h$. Лемма следует из того, что при $\lambda \neq 0$ росток функции f_λ в начале координат неприводим, $\mu(f_\lambda) \leq \mu(f)$, а для достаточно малых $\lambda > 0$ функция f_λ не имеет вещественных критических точек, отличных от начала координат (в некоторой его окрестности).

Далее мы предполагаем, что комплексная кривая $\{f = 0\}$ неприводима. Доказательство теоремы основано на следующем. Мы используем индукцию по числу Милнора $\mu(f)$ ростка f в начале координат: предполагаем, что для любого вещественного ростка $f^*: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с $\mu(f^*) < \mu(f)$, кривая $\{f^* = 0\}$ нулевого уровня которого имеет одну вещественную компоненту, утверждение теоремы имеет место. Мы построим вещественную деформацию $\tilde{f}$ ростка f , не имеющую вещественных критических точек вне начала координат, число Милнора $\mu(\tilde{f})$ критической точки которой в начале координат меньше, чем число Милнора ростка f : $\mu(\tilde{f}) < \mu(f)$, и такую, что росток кривой $\{\tilde{f} = 0\}$ в начале координат имеет одну вещественную компоненту (и, возможно, несколько пар комплексно-сопряженных компонент). Это докажет утверждение теоремы. Для построения деформации ростка f мы будем строить деформации кривой $\{f = 0\}$. Любой деформации кривой $\{f = 0\}$ соответствует деформация ростка f (не единственная). Если деформация кривой $\{f = 0\}$ вещественна (инвариантна относительно комплексного сопряжения), то соответствующая деформация ростка f может быть выбрана вещественной. В свою очередь мы будем строить деформации кривой $\{f = 0\}$, деформируя ее собственный прообраз при подходящей модификации. Особенность ростка f может быть разрешена при помощи последовательности σ -процессов (см., например, [1, том II]). Мы рассматриваем только минимальные разрешения (т.е. в уже разрешенных точках σ -процессы не делаются). Если кривая $\{f = 0\}$ состоит из единственной вещественной компоненты, то все σ -процессы делаются в вещественных точках. Пусть X — пространство соответствующей модификации пространства $\mathbb{C}^2$,

$\pi: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ — проекция и $D = \pi^{-1}(0)$ — исключительный дивизор. Полный прообраз $\pi^{-1}(\{f=0\})$ кривой $\{f=0\}$ состоит из ее собственного прообраза L и исключительного дивизора D . Те же обозначения X, D, L, π будут использоваться и для соответствующих объектов после стягивания нескольких компонент исключительного дивизора.

Будем стягивать компоненты исключительного дивизора D в порядке, противоположном тому, в котором они появляются в процессе разрешения. После стягивания одной компоненты собственный прообраз L кривой $\{f=0\}$ остается неособым и трансверсально пересекает две компоненты исключительного дивизора (в двойной точке последнего). После стягивания следующей компоненты собственный прообраз L является неособым и имеет простое касание с компонентой исключительного дивизора D либо в неособой, либо в двойной точке этого дивизора.

Рассмотрим сначала второй случай. В окрестности точки пересечения собственного прообраза L с исключительным дивизором D существуют такие локальные координаты (x, y) , в которых исключительный дивизор совпадает с объединением координатных осей, а собственный прообраз L задается уравнением $y = x^2$. Пусть L_λ — деформация кривой $L = \{y = x^2\}$, определяемая уравнением $y = x^2 + \lambda$. Стягивая все компоненты исключительного дивизора D , получаем соответствующую деформацию $\pi(L_\lambda)$ кривой $\{f=0\} = \pi(L)$. Эта деформация может быть реализована вещественной деформацией $\tilde{f} = f_\lambda$ ростка $f = f_0$ ($\{f_\lambda=0\} = \pi(L_\lambda)$). Число Милнора $\mu(f_\lambda)$ ростка функции f_λ в начале координат на два меньше, чем число Милнора ростка f . При $\lambda > 0$ росток кривой $\{f_\lambda=0\}$ в начале координат имеет одну вещественную компоненту и одну пару комплексно-сопряженных компонент (соответствующих вещественной и двум мнимым точкам пересечения кривой L_λ с исключительным дивизором D). Можно показать, что при $\lambda > 0$ функция f_λ не имеет вещественных критических точек, отличных от начала координат. Это завершает нашу программу в рассматриваемом случае.

Рассмотрим другой случай: собственный прообраз L кривой $\{f=0\}$ касается компоненты исключительного дивизора D в неособой точке последнего. После стягивания соответствующей компоненты дивизора D собственный прообраз L превращается в полукубическую параболу. Может встретиться одна из следующих трех возможностей:

(i) Других компонент у исключительного дивизора нет. Это означает, что сама кривая $\{f=0\}$ является полукубической параболой и росток f имеет критическую точку типа A_2 . Деформация ростка f без вещественных критических точек может быть построена без труда.

(ii) L трансверсально пересекает одну компоненту исключительного дивизора в его неособой точке.

(iii) L пересекает две компоненты исключительного дивизора в его двойной точке (каждую из них — трансверсально).

Случай (ii). В окрестности точки пересечения L с исключительным дивизором D существуют такие координаты (x, y) , в которых D совпадает с координатной осью $\{y=0\}$, а L задается уравнением $x^2 - y^3 = 0$. Пусть $L_\lambda = \{x^2 - y^3 - \lambda y = 0\}$ — деформация кривой $L = \{x^2 - y^3 = 0\}$. При $\lambda \neq 0$ кривая L_λ является кривой рода 1 с одной компонентой края (т.е. ∂L_λ — окружность). Стягивая все компоненты исключительного дивизора D , получаем соответству-

ющую деформацию $\pi(L_\lambda)$ кривой $\{f=0\} = \pi(L)$. Эта деформация может быть реализована вещественной деформацией $\tilde{f} = f_\lambda$ ростка $f = f_0$. У ростка функции f_λ в начале координат число Милнора на два меньше, чем у ростка f . При любом λ росток кривой $\{f_\lambda=0\}$ в начале координат неприводим (состоит из одной вещественной компоненты при $\lambda \in \mathbb{R}$). Можно показать, что при $\lambda > 0$ функция f_λ не имеет вещественных критических точек, отличных от начала координат. Это завершает рассмотрение случая (ii).

Случай (iii). В окрестности точки пересечения L с исключительным дивизором D существуют такие координаты (x, y) , в которых D совпадает с объединением координатных осей, а L задается уравнением $(y-x)^2 - x^3 = 0$ (это вытекает, например, из вида нормальной формы особенности $X_{1,1}$; см. [1, том I]). В этих координатах функция $f \circ \pi$, индуцированная функцией f на пространстве модификации X , имеет вид $u(x, y)x^m y^n ((y-x)^2 - x^3)$, где $u(0, 0) \neq 0$. Мы предполагаем, что $m \geq n > 0$. Пусть $L_\lambda = \{(y-x-\lambda/2)^2 - x^3 - \lambda x = 0\}$ — деформация кривой $L = \{(y-x)^2 - x^3 = 0\}$. При $\lambda \neq 0$ кривая L_λ является кривой рода 1 с одной компонентой края. Пусть f_λ — вещественная деформация ростка f , соответствующая деформации $\pi(L_\lambda)$ кривой $\{f=0\} = \pi(L)$. У ростка функции f_λ в начале координат число Милнора на четыре меньше, чем у ростка f . При любом вещественном $\lambda \neq 0$ росток кривой $\{f_\lambda=0\}$ в начале координат имеет одну вещественную компоненту и одну пару комплексносопряженных компонент (соответствующих пересечениям кривой L_λ с компонентами $\{x=0\}$ и $\{y=0\}$ исключительного дивизора D соответственно). Можно показать, что при $\lambda > 0$ функция f_λ не имеет вещественных критических точек, отличных от начала координат. Это завершает рассмотрение случая (iii) и доказательство теоремы.

Автор благодарен Ю. В. Чеканову и И. Луенго (I. Luengo) за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Наука, М., т. I, 1982; т. II, 1984. 2. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. Мир, М., 1971.

Московский государственный университет
и Независимый московский университет

Поступило в редакцию
28 февраля 1996 г.

УДК 519.6

Ультранормальный случай проблемы Бернштейна

© 1997. Ю. И. Любич

Проблема Бернштейна касается одного из фундаментальных положений популяционной генетики, которое называется *принципом стационарности*. Этот принцип реализуется в условиях закона Менделя, однако он согласуется и со многими другими законами наследственности. Принцип стационарности был введен С. Н. Бернштейном [1] в 1922 г. в качестве аксиоматической основы описа-