Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Любич, Ультранормальный случай проблемы Бернштейна, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 77–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:08:38

ющую деформацию $\pi(L_\lambda)$ кривой $\{f=0\} = \pi(L)$. Эта деформация может быть реализована вещественной деформацией $\tilde{f} = f_\lambda$ ростка $f = f_0$. У ростка функции f_λ в начале координат число Милнора на два меньше, чем у ростка f . При любом λ росток кривой $\{f_\lambda=0\}$ в начале координат неприводим (состоит из одной вещественной компоненты при $\lambda \in \mathbb{R}$). Можно показать, что при $\lambda > 0$ функция f_λ не имеет вещественных критических точек, отличных от начала координат. Это завершает рассмотрение случая (ii).

Случай (iii). В окрестности точки пересечения L с исключительным дивизором D существуют такие координаты (x, y) , в которых D совпадает с объединением координатных осей, а L задается уравнением $(y-x)^2 - x^3 = 0$ (это вытекает, например, из вида нормальной формы особенности $X_{1,1}$; см. [1, том I]). В этих координатах функция $f \circ \pi$, индуцированная функцией f на пространстве модификации X , имеет вид $u(x, y)x^m y^n ((y-x)^2 - x^3)$, где $u(0, 0) \neq 0$. Мы предполагаем, что $m \geq n > 0$. Пусть $L_\lambda = \{(y-x-\lambda/2)^2 - x^3 - \lambda x = 0\}$ — деформация кривой $L = \{(y-x)^2 - x^3 = 0\}$. При $\lambda \neq 0$ кривая L_λ является кривой рода 1 с одной компонентой края. Пусть f_λ — вещественная деформация ростка f , соответствующая деформации $\pi(L_\lambda)$ кривой $\{f=0\} = \pi(L)$. У ростка функции f_λ в начале координат число Милнора на четыре меньше, чем у ростка f . При любом вещественном $\lambda \neq 0$ росток кривой $\{f_\lambda=0\}$ в начале координат имеет одну вещественную компоненту и одну пару комплексносопряженных компонент (соответствующих пересечениям кривой L_λ с компонентами $\{x=0\}$ и $\{y=0\}$ исключительного дивизора D соответственно). Можно показать, что при $\lambda > 0$ функция f_λ не имеет вещественных критических точек, отличных от начала координат. Это завершает рассмотрение случая (iii) и доказательство теоремы.

Автор благодарен Ю. В. Чеканову и И. Луенго (I. Luengo) за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Наука, М., т. I, 1982; т. II, 1984. 2. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. Мир, М., 1971.

Московский государственный университет
и Независимый московский университет

Поступило в редакцию
28 февраля 1996 г.

УДК 519.6

Ультранормальный случай проблемы Бернштейна

© 1997. Ю. И. Любич

Проблема Бернштейна касается одного из фундаментальных положений популяционной генетики, которое называется *принципом стационарности*. Этот принцип реализуется в условиях закона Менделя, однако он согласуется и со многими другими законами наследственности. Принцип стационарности был введен С. Н. Бернштейном [1] в 1922 г. в качестве аксиоматической основы описа-

ния всех допустимых модификаций закона Менделя. Адекватная математическая проблема звучит так.

Пусть Δ^{n-1} — координатный симплекс в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\Delta^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : s(x) \equiv \sum x_i = 1, x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0 \right\}.$$

Рассмотрим квадратичное отображение $V: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^{n-1}$,

$$x'_j \equiv (Vx)_j = \sum_{i,k=1}^n p_{ik,j} x_i x_k \quad (1 \leq j \leq n),$$

стохастическое в том смысле, что $p_{ik,j} \geq 0$ и $\sum_j p_{ik,j} = 1$. С биологической точки зрения V — это *эволюционный оператор* некоторой бесконечной панмиксной селективно нейтральной популяции, а $p_{ik,j}$ — это *коэффициенты наследственности*, причем $p_{ki,j} = p_{ik,j}$, и это означает, что наследственность не зависит от дифференциации полов, см. [6, 8].

Отображение V называется *бернштейновским*, если $V^2 = V$. Это свойство как раз и составляет принцип стационарности, а общая проблема Бернштейна заключается в явном описании всех бернштейновских отображений.

Случай $n \leq 2$ тривиален с математической точки зрения и не представляет интереса с биологической. Бернштейн [2–4] решил сформулированную проблему в случае $n = 3$ и получил отдельные результаты для $n \geq 4$. В частности, классическое отображение Харди–Вайнберга $x'_1 = p^2$, $x'_2 = q^2$, $x'_3 = 2pq$ с $p = x_1 + \frac{1}{2}x_3$ и $q = x_2 + \frac{1}{2}x_3$ содержится в списке Бернштейна, но без промежуточных переменных p и q . Фактически это отображение — прямое следствие закона Менделя [5, 9]. С биологической точки зрения линейные формы p , q суть вероятности аллельных генов, скажем **A** и **a**, если генотипы **AA**, **aa**, **Aa** индивидуумов в популяции имеют вероятности соответственно x_1 , x_2 , x_3 . Указанные формы *инвариантны* в том смысле, что $p(Vx) = p(x)$, $q(Vx) = q(x)$, и это означает, что при переходе от родителей к потомкам гены не исчезают и не возникают. В силу этих законов сохранения указанное отображение автоматически является бернштейновским.

В наших работах 1971–77 гг. (первая из них — статья [6]; систематическое изложение и полные ссылки даны в книге [8]) проблема Бернштейна была решена для всех n в дополнительном предположении *регулярности*. Регулярность означает, что Vx зависит только от значений $f(x)$, где f пробегает совокупность всех инвариантных линейных форм. (Без этого свойства, по-видимому, невозможна интерпретация в терминах генов.) В упомянутых исследованиях очень важную роль играет алгебра A_V со структурными константами $p_{ik,j}$. Так как $Vx = x^2$, то бернштейновское свойство отображения V равносильно тождеству

$$(x^2)^2 = s^2(x)x^2. \quad (1)$$

Тождество (1) по определению означает, что A_V есть *алгебра Бернштейна* относительно алгебраического гомоморфизма $s: A_V \rightarrow \mathbb{R}$. Регулярность отображения V равносильна тождеству

$$x^2 y = s(x)xy, \quad (2)$$

которое по определению означает, что алгебра A_V *регулярна*. Легко видеть, что из тождества (2) вытекает (1), однако обратное неверно, начиная с $n = 3$.

Имеется одно существенное условие, которое влечет за собой адекватную генетическую интерпретацию, по крайней мере в пределах регулярности.

Стохастическое квадратичное отображение V и соответствующая алгебра A_V называются *нормальными*, если для всех j, l (при $j \neq l$) квадратичные формы x'_j, x'_l линейно независимы и нет таких пар i, k (при $i \neq k$), что все x'_j зависят только от $x_i + x_k, x_l$ ($l \neq i, l \neq k$). Поскольку это свойство необходимо для всех генетически оправданных ситуаций (обсуждение этого обстоятельства см. в [8]) мы должны распространить его на все V -инвариантные грани исходного симплекса. Если это выполнено, то отображение V называется *ультранормальным*. В терминах алгебры A_V ультранормальность равносильна нормальности всех координатных подалгебр.

Подчеркнем, что нормальность — это своего рода неприводимость. В самом деле, если отображение V не является нормальным, то имеется естественный способ редуцировать его к нормальному отображению $\Delta^{\nu-1} \rightarrow \Delta^{\nu-1}$, $\nu < n$, с сохранением всех существенных основных объектов (неподвижные точки, инвариантные линейные формы и т.д.), см. [8, §3.9].

Неподвижные точки отображения V — это в точности неотрицательные ненулевые идемпотенты алгебры A_V . Для каждой бернштейновской алгебры A многообразие $\text{Id}_1 A$ ненулевых идемпотентов совпадает с графиком (неоднородного) квадратичного отображения $U \rightarrow A$, где U — некоторое подпространство, $\dim U = \dim(\text{Id}_1 A) = m - 1$. (Фактически в качестве U можно взять любое подпространство, касательное к $\text{Id}_1 A$ в какой-нибудь точке.) Пара чисел (m, δ) , где $\delta = n - m$, называется *типом* алгебры A . Пространство J всех инвариантных линейных форм не более чем m -мерно, причем $\dim J = m$ тогда и только тогда, когда алгебра A регулярна. Если алгебра A *ядерна*, т.е. $A^2 = A$, то для регулярности достаточно выполнения неравенства

$$\delta - (m - 1)(m - 2)/2 > 0. \quad (3)$$

Кроме того, все ядерные бернштейновские алгебры с $m \leq 2$ или $\delta \leq 1$ (в частности, при $n \leq 4$) регулярны, см. [8, §3.4].

В 1977 г. мы высказали предположение, что *все ультранормальные стохастические бернштейновские отображения (алгебры) регулярны*. Эта гипотеза была доказана нами при условии, что $m \leq 3$ или $\delta \leq 1$ (в частности, при $n \leq 5$), см. [7] и [8, §5.7]. Доказательство было основано на одной комбинаторно-топологической конструкции, которая приводит к следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *В каноническом базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ каждой ультранормальной стохастической бернштейновской алгебры имеется не более t идемпотентов.*

Теперь мы в состоянии усовершенствовать этот подход для доказательства гипотезы в общем случае.

ТЕОРЕМА. *Каждая ультранормальная стохастическая бернштейновская алгебра A регулярна.*

Доказательство проводится индукцией по $n = \dim A$ и основано на следующих леммах.

ЛЕММА 1. *Наименьшая координатная подалгебра, содержащая все базисные идемпотенты, совпадает с A .*

Пусть $\{e_1, \dots, e_\rho\}$ — эти идемпотенты, и пусть ν_{ij} — размерность наименьшей координатной подалгебры, содержащей e_i и e_j ($1 \leq i < j \leq \rho$). Ясно, что $\nu_{ij} \geq 2$.

ЛЕММА 2. *Каждое ν_{ij} меньше или равно 4.*

ЛЕММА 3. *Если $\rho = n$, то все ν_{ij} равны 4 (за исключением тривиального случая, когда $x^2 = s(x)x$). Если $\rho < n$, то $\nu_{ij} \leq 3$.*

Первый случай является «дискретным» в том смысле, что множество таких алгебр конечно при каждом n . Второй случай, напротив, является «континуальным». На самом деле это как раз случаи *элементарной и неэлементарной генной структуры*, единственно возможные в регулярной ситуации [8, гл. 4].

Комбинируя полученный результат с явным описанием всех нормальных стохастических регулярных алгебр [8, теоремы 4.3.2 и 4.6.1], мы приходим к решению проблемы Бернштейна в ультранормальном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Наука на Украине, вып. 1, 1922, с. 14–19.
2. Bernstein S. N. C. R. Acad. Sci. Paris, **177**, 528–531 (1923).
3. Bernstein S. N. C. R. Acad. Sci. Paris, **177**, 581–584 (1923).
4. Бернштейн С. Н. Уч. зап. н.-и. каф. Украины, **1**, 83–115 (1924).
5. Hardy G. H. Science, **28**, No. 706, 49–50 (1908).
6. Любич Ю. И. УМН, **26**, вып. 5, 51–116 (1971).
7. Любич Ю. И. УМН, **34**, вып. 6, 53–58 (1979).
8. Любич Ю. И. Математические структуры в популяционной генетике. Наукова думка, Киев, 1983.
9. Weinberg W. Jahresber. Ver. Vaterl. Naturk. in Würtemb., **64**, 368–372 (1908).

Department of Mathematics
Technion, Haifa, Israel

Поступило в редакцию
15 июня 1996 г.

УДК 517.94

L^p -свойства решений квазидифференциальных уравнений и возмущение их коэффициентов на множествах положительной меры*

© 1997. К. А. МИРЗОВЕВ

Пусть вещественные функции $p_0, \dots, p_{n-1}, 1/p_n$ ($n \geq 1$) измеримы на полуоси $[0, +\infty)$ и суммируемы на каждом ее подынтервале $[\alpha, \beta]$. Как обычно, символом $L^p(0, \infty)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) обозначим пространство всех классов попарно почти всюду равных между собой измеримых функций f , для которых $|f|^p$ интегрируема на $[0, +\infty)$, если $1 \leq p < +\infty$, и f существенно ограничена на $[0, +\infty)$, если $p = +\infty$, а символом $l_n[f]$ — линейное симметрическое квази-

* Настоящее исследование поддержано грантами N3I000 и N3I300 Международного научного фонда и Российского правительства.