Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ромик, Число шагов в алгоритме Робинсона–Шенстеда, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 82–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:48:16

УДК 519.2+519.116

Число шагов в алгоритме Робинсона–Шенстеда

© 2005. Д. Ромик

1. Введение. Алгоритм Робинсона–Шенстеда RS (известный также в более общей форме как алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута, или алгоритм RSK) является важным для комбинаторики алгоритмом. По перестановке $\sigma \in \mathcal{S}_n$ он вычисляет разбиение λ числа n ,

$$n = \lambda_1 + \dots + \lambda_k, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k,$$

а также две ассоциированные таблицы Юнга P , Q формы λ (таблица Юнга формы λ есть заполнение диаграммы Юнга разбиения λ числами $1, \dots, n$, в котором числа возрастают по строкам и столбцам). Соответствие между перестановками из $\mathcal{S}_n$ и парами таблиц Юнга одинаковой формы с числом клеток n есть биекция, которую называют соответствием Робинсона–Шенстеда. Разбиение λ кодирует *структуру возрастающих/убывающих подпоследовательностей* перестановки σ в следующем смысле: для любого j , $1 \leq j \leq \lambda'_1$, сумма $\lambda_1 + \dots + \lambda_j$ равна максимальной мощности объединения j возрастающих подпоследовательностей перестановки σ , и для любого j , $1 \leq j \leq \lambda_1$, сумма $\lambda'_1 + \dots + \lambda'_j$ равна максимальной мощности объединения j убывающих подпоследовательностей перестановки σ (где λ' — разбиение, сопряженное с λ , т. е. $\lambda'_j = \#\{i : \lambda_i \geq j\}$). В частности, λ_1 есть длина наибольшей возрастающей подпоследовательности перестановки σ , которая является важной статистикой перестановок. Полное описание алгоритма и его замечательных свойств имеется в [4, разд. 5.1.4] и [8, гл. 7]. На рис. 1 изображен пример входа и выхода алгоритма Робинсона–Шенстеда.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{RS}} \begin{matrix} P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 8 \\ \hline 9 & & & \\ \hline \end{array} \end{matrix}$$

Рис. 1. Перестановка и ассоциированные с ней разбиение и таблицы Юнга.

Возникает естественный вопрос: сколько шагов выполняется за время работы алгоритма? Конечно, всегда выполняется n шагов, состоящих в добавлении новой клетки к строящейся диаграмме Юнга λ . Остальные шаги делятся на два типа: сравнения и применения так называемой операции *выбывания*, которая заменяет число, стоящее в некоторой клетке, на другое число и выбывает первое в следующую строку. Для осуществления каждой операции выбывания необходимо произвести двоичный поиск в упорядоченном списке, чтобы найти то место в следующей строке, куда будет производиться очередное выбывание (или добавление новой клетки). Именно эти два типа шагов представляют интерес, поскольку их количество не фиксировано.

Заметим, что число операций выбивания может варьироваться между 0 в лучшем случае и $n(n-1)/2$ в худшем случае. Мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА. При $n \rightarrow \infty$ для почти всех (т. е. для доли $(1-o(1))$) перестановок $\sigma \in \mathcal{S}_n$ число выполняемых алгоритмом операций выбивания составляет

$$(1+o(1)) \frac{128}{27\pi^2} n^{3/2} = (1+o(1)) 0,480337 \dots n^{3/2}, \quad (1)$$

а число выполняемых алгоритмом операций сравнения составляет

$$(1+o(1)) \frac{64}{27\pi^2} n^{3/2} \log_2 n = (1+o(1)) 0,240169 \dots n^{3/2} \log_2 n. \quad (2)$$

Среднее число операций выбивания и сравнения по всем перестановкам из $\mathcal{S}_n$ также задается формулами (1) и (2) соответственно.

2. Доказательство. Число N операций выбивания есть функция от разбиения λ ; а именно, λ_1 клеток первой строки вообще не выбивались, λ_2 клеток второй строки выбивались вниз на одну строку и т. д. Следовательно, число N можно представить в виде

$$N = 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \dots + (k-1) \cdot \lambda_k = \sum_{i=1}^k (i-1) \lambda_i.$$

Если теперь перестановка $\sigma \in \mathcal{S}_n$ выбирается случайным образом, то соответствующее разбиение λ распределено по так называемой мере Планшереля $\mathbb{P}_n$, т. е.

$$\mathbb{P}_n(\lambda) = d_\lambda^2/n!,$$

где d_λ есть число стандартных таблиц Юнга формы λ ; это следует из упоминавшейся выше биекции. Таким образом, наша цель состоит в анализе статистики $N = N(\lambda)$ случайного разбиения числа n , распределенного по мере Планшереля. К счастью, планшерелевские случайные разбиения — это хорошо изученный объект, и мы можем достаточно легко достичь цели, используя известные результаты.

Для начала отметим следующую геометрическую интерпретацию числа $N(\lambda)$: если система координат выбрана таким образом, что i -я строка диаграммы Юнга разбиения λ имеет y -координату $i-1$, то $N(\lambda)/n$ есть просто y -координата центра масс разбиения λ .

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество всех разбиений числа n . Для разбиения $\lambda \in \mathcal{P}_n$ обозначим через $f_\lambda(x)$ график диаграммы Юнга разбиения λ , т. е. положим

$$f_\lambda(x) = \lambda_{[x]} \quad (x > 0).$$

Пусть $\tilde{f}_\lambda(x)$ — график нормированной диаграммы Юнга, задаваемый формулой

$$\tilde{f}_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} f_\lambda(\sqrt{n}x).$$

Обозначим через $\tilde{g}_\lambda(u)$ график нормированной диаграммы Юнга разбиения λ в повернутой системе координат $u = (x-y)/\sqrt{2}$, $v = (x+y)/\sqrt{2}$. Таким образом,

$\tilde{g}_\lambda(u)$ удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{g}_\lambda\left(\frac{x - \tilde{f}_\lambda(x)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x + \tilde{f}_\lambda(x)}{\sqrt{2}} \quad (0 < x < \tilde{f}_\lambda^{-1}(0)),$$

$$\tilde{g}_\lambda(u) = \begin{cases} -u, & u \leq -\tilde{f}_\lambda(0)/\sqrt{2}, \\ u, & u \geq \tilde{f}_\lambda^{-1}(0)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Напомним теорему о предельной форме для планшерелевских случайных разбиений.

ТЕОРЕМА (Логан–Шепп [7], Вершик–Керов [5, 6]). Определим функцию $\Omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\Omega(u) = \begin{cases} (2/\pi)(u \arcsin(u/\sqrt{2}) + \sqrt{2 - u^2}), & |u| \leq \sqrt{2}, \\ |u|, & |u| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n\left(\lambda \in \mathcal{P}_n : \sup_{u \in \mathbb{R}} |\tilde{g}_\lambda(u) - \Omega(u)| > \epsilon\right) = 0.$$

По существу, для доказательства нашей теоремы теперь достаточно рис. 2.

Рис. 2. Предельная форма $v = \Omega(u)$ и центр масс.

Теорема о предельной форме утверждает, что при больших n для $\mathbb{P}_n$ -почти всех разбиений числа n графики соответствующих нормированных диаграмм Юнга лежат в полосе ширины ϵ около кривой $\Omega(u)$. Этого почти достаточно для того, чтобы утверждать, что центр масс этих (нормированных) диаграмм Юнга близок к идеальному центру масс (μ_u, μ_v) области, заключенной между кривыми $\Omega(u)$ и $|u|$; необходимо привлечь дополнительно только один известный простой факт, а именно, что носитель функции $\tilde{g}_\lambda(u) - |u|$ содержится в интервале $[-\epsilon/\sqrt{2}, \epsilon/\sqrt{2}]$ для $\mathbb{P}_n$ -почти всех разбиений числа n при $n \rightarrow \infty$.

(См., например, [4, с. 68, упр. 29]. На самом деле число e в приведенном выше утверждении можно заменить на 2, но доказать это гораздо сложнее. Кроме того, $\mathbb{P}_n$ -мера множества разбиений, носитель которых не содержится в интервале $[-e/\sqrt{2}, e/\sqrt{2}]$, убывает к нулю экспоненциально по n . Это оправдывает утверждение о том, что *среднее* число операций выбивания по всем перестановкам совпадает с числом таких операций для *типичной* перестановки.)

Остается вычислить координаты центра масс (μ_u, μ_v) . Ясно, что $\mu_u = 0$ в силу симметрии $\Omega(u) = \Omega(-u)$. Значение μ_v вычисляется следующим образом:

$$\mu_v = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\Omega(u) - |u|) \left(\frac{\Omega(u) + |u|}{2} \right) du = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\Omega(u)^2 - u^2) du = \frac{128\sqrt{2}}{27\pi^2},$$

что легко проверить вручную или с использованием системы символьных вычислений. Таким образом, мы получаем значения, указанные на рис. 2:

$$\mu_v = \frac{128\sqrt{2}}{27\pi^2}, \quad \mu_x = \mu_y = \frac{\mu_v}{\sqrt{2}} = \frac{128}{27\pi^2}.$$

Это завершает доказательство утверждения о числе операций выбивания, поскольку число $N(\lambda)$ равно y -координате центра масс диаграммы λ , умноженной на n , или y -координате центра масс нормированной диаграммы, умноженной на $n^{3/2}$.

Теперь обратимся к числу T операций сравнения. Это число не является функцией от разбиения λ , но зависит от порядка, в котором элементы вставляются в таблицу. Однако мы можем оценить T с обеих сторон при помощи функций от λ , и эти оценки оказываются асимптотически точными.

Грубо говоря, наше утверждение состоит в том, что подавляющее большинство операций двоичного поиска, осуществляемых за время работы алгоритма Робинсона–Шенстеда, примененного к типичной перестановке, требует $\log_2(\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \log_2 n$ операций сравнения. Действительно, число сравнений не более чем на единицу отличается от двоичного логарифма длины той строки таблицы, в которой осуществляется поиск. Это немедленно дает верхнюю оценку

$$T \leq (N(\lambda) + \lambda_1)(\log_2 \lambda_1 + 1)$$

(дополнительное слагаемое λ_1 отвечает двоичным поискам в первой строке, осуществляемым до первого выбивания в каждой вставке). Поскольку, как упоминалось выше, $\lambda_1 \leq e\sqrt{n}$ почти наверное относительно меры $\mathbb{P}_n$, мы получаем, что (2) есть верхняя оценка для числа операций сравнения для $\mathbb{P}_n$ -почти всех диаграмм.

Нижняя оценка получается аналогичным образом. Зафиксируем i , $1 \leq i \leq \lambda_1$. Заметим, что среди всех перестановок, порождающих диаграмму λ , число сравнений будет минимальным, если при построении таблицы вставляемые элементы будут выбиваться вниз как можно скорее, так что первые λ'_1 элементов образуют столбец высоты λ'_1 , следующие λ'_2 элементов образуют столбец высоты λ'_2 и т. д. После $\lambda'_1 + \dots + \lambda'_i$ вставок эта минимальная таблица будет иметь столбцы высоты $\lambda'_1, \dots, \lambda'_i$, и любой двоичный поиск, осуществляемый после этого, потребует не менее $\log_2 i$ сравнений. Это дает нижнюю оценку

$$T \geq \left(N(\lambda) - \sum_{j=1}^i \frac{\lambda'_j(\lambda'_j - 1)}{2} \right) \log_2 i \geq \left(N(\lambda) - i \frac{\lambda_1^2}{2} \right) \log_2 i.$$

Этого достаточно для доказательства нашего утверждения, поскольку для типичной диаграммы, т. е. для диаграммы, для которой $N(\lambda)$ близко к ожидаемому значению (1) и λ'_1 не превосходит $\epsilon\sqrt{n}$, мы можем взять $i = \lfloor \epsilon\sqrt{n} \rfloor$ для некоторого $\epsilon > 0$ и получить оценку

$$T \geq N(\lambda) \log_2(\sqrt{n}) - \frac{\epsilon^2}{2} n^{3/2} \log_2(\sqrt{n}) - N(\lambda) \log_2(\epsilon).$$

Поскольку $\epsilon > 0$ произвольно, отсюда следует, что (2) есть нижняя оценка для T .

Заключительные замечания. В настоящей работе мы начали вероятностный анализ алгоритма Робинсона–Шенстеда, получив асимптотику среднего и типичного числа шагов, выполняемых за время работы этого алгоритма. Было бы интересно продолжить это исследование, попытавшись найти асимптотику следующего порядка, а именно дисперсию числа шагов и ее предельное распределение. По крайней мере для числа операций выбивания эта задача не кажется совершенно безнадежной, поскольку она сводится к анализу статистики $N(\lambda)$ случайного разбиения, распределенного по мере Планшереля. Существующее на данный момент положение дел в области изучения асимптотики меры Планшереля (см., например, работу [3]) не является достаточным для решения этой задачи (хотя оно позволяет предположить, что предельное распределение почти наверняка является гауссовским), но надо надеяться, что будущее развитие этой тематики сделает эту задачу более доступной.

Кроме того, мы хотели бы отметить, что не знали о большом количестве более ранних работ, посвященных вычислительным аспектам теории таблиц Юнга. Читателя, интересующегося этими вопросами, мы отсылаем к работам [1, 9, 2], из которых только в статье [1] рассматриваются вопросы вероятностной природы (мы благодарны рецензенту за то, что он указал нам на эти работы). В теории комбинаторных структур, таких, как таблицы Юнга, плоские разбиения и т. п., имеется множество удивительных и красивых алгоритмов, и анализ этих алгоритмов представляется многообещающей неисследованной областью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barvinok A., Fomin S. Adv. in Appl. Math., **18**, No. 3, 271–285 (1997).
2. Bernstein D. The computational complexity of rules for the character table of S_n , Preprint, arxiv:CO/0309225.
3. Ivanov V., Olshanski G. In: Symmetric Functions 2001: Surveys of Developments and Perspectives, Proc. NATO Advanced Study Institute (S. Fomin, ed.), Kluwer, 2002, pp. 93–152.
4. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. Мир, М., 1978.
5. Вершик А. М., Керов С. В. ДАН СССР, **233**, №6, 1024–1027 (1977).
6. Вершик А. М., Керов С. В. Функц. анализ и его прил., **19**, вып. 1, 25–38 (1985).
7. Logan B. F., Shepp L. A. Adv. Math., **26**, No. 2, 206–222 (1977).
8. Stanley R. P. Enumerative Combinatorics, Vol. 2. Cambridge University Press, 1999. [Русский перевод готовится в издательстве «Мир».]
9. Stembridge J. R. In: Interaction of Combinatorics and Representation Theory, MSJ Memoirs, Vol. 11, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001, pp. 1–38.

Department of Mathematics,
Weizmann Institute of Science
e-mail: romik@wisdom.weizmann.ac.il

Поступило в редакцию
4 июля 2003 г.