Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Мирзоев, L^p -свойства решений квазидифференциальных уравнений и возмущение их коэффициентов на множествах положительной меры, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 80–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 11:34:31

ЛЕММА 1. *Наименьшая координатная подалгебра, содержащая все базисные идемпотенты, совпадает с A .*

Пусть $\{e_1, \dots, e_\rho\}$ — эти идемпотенты, и пусть ν_{ij} — размерность наименьшей координатной подалгебры, содержащей e_i и e_j ($1 \leq i < j \leq \rho$). Ясно, что $\nu_{ij} \geq 2$.

ЛЕММА 2. *Каждое ν_{ij} меньше или равно 4.*

ЛЕММА 3. *Если $\rho = n$, то все ν_{ij} равны 4 (за исключением тривиального случая, когда $x^2 = s(x)x$). Если $\rho < n$, то $\nu_{ij} \leq 3$.*

Первый случай является «дискретным» в том смысле, что множество таких алгебр конечно при каждом n . Второй случай, напротив, является «континуальным». На самом деле это как раз случаи *элементарной и неэлементарной генной структуры*, единственно возможные в регулярной ситуации [8, гл. 4].

Комбинируя полученный результат с явным описанием всех нормальных стохастических регулярных алгебр [8, теоремы 4.3.2 и 4.6.1], мы приходим к решению проблемы Бернштейна в ультранормальном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Наука на Украине, вып. 1, 1922, с. 14–19.
2. Bernstein S. N. C. R. Acad. Sci. Paris, **177**, 528–531 (1923).
3. Bernstein S. N. C. R. Acad. Sci. Paris, **177**, 581–584 (1923).
4. Бернштейн С. Н. Уч. зап. н.-и. каф. Украины, **1**, 83–115 (1924).
5. Hardy G. H. Science, **28**, No. 706, 49–50 (1908).
6. Любич Ю. И. УМН, **26**, вып. 5, 51–116 (1971).
7. Любич Ю. И. УМН, **34**, вып. 6, 53–58 (1979).
8. Любич Ю. И. Математические структуры в популяционной генетике. Наукова думка, Киев, 1983.
9. Weinberg W. Jahresber. Ver. Vaterl. Naturk. in Würtemb., **64**, 368–372 (1908).

Department of Mathematics
Technion, Haifa, Israel

Поступило в редакцию
15 июня 1996 г.

УДК 517.94

L^p -свойства решений квазидифференциальных уравнений и возмущение их коэффициентов на множествах положительной меры*

© 1997. К. А. МИРЗОВЕВ

Пусть вещественные функции $p_0, \dots, p_{n-1}, 1/p_n$ ($n \geq 1$) измеримы на полуоси $[0, +\infty)$ и суммируемы на каждом ее подынтервале $[\alpha, \beta]$. Как обычно, символом $L^p(0, \infty)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) обозначим пространство всех классов попарно почти всюду равных между собой измеримых функций f , для которых $|f|^p$ интегрируема на $[0, +\infty)$, если $1 \leq p < +\infty$, и f существенно ограничена на $[0, +\infty)$, если $p = +\infty$, а символом $l_n[f]$ — линейное симметрическое квази-

* Настоящее исследование поддержано грантами N3I000 и N3I300 Международного научного фонда и Российского правительства.

дифференциальное выражение

$$(\cdots((p_n f^{(n)})' - p_{n-1} f^{(n-1)})' - \cdots - p_1 f')' - p_0 f$$

(см. [1, с. 182]).

В данной работе предполагается, что все решения уравнения

$$l_n[f] = 0 \quad (1)$$

принадлежат пространству $L^p(0, +\infty)$ ($1 \leq p \leq +\infty$), и обсуждается вопрос о том, при каких условиях на множество $I \subset [0, +\infty)$ коэффициенты уравнения (1) можно изменить на I так, чтобы это уравнение имело решение, не принадлежащее пространству $L^p(0, +\infty)$. В разд. 1 настоящей работы сформулированы две теоремы (теорема 1 и 2), полученные другими авторами в связи с этой проблемой для дифференциальных уравнений второго порядка и случая $p = 2$. Основные результаты работы сформулированы в теоремах 3 и 4 разд. 2.

1. Хорошо известно, что для выражения $l[f] = -f'' + qf$, где $q \in L^1_{\text{loc}}[0, +\infty)$, случай предельного круга (в бесконечности) имеет место тогда и только тогда, когда все решения уравнения $l[f] = 0$ принадлежат пространству $L^2(0, +\infty)$; в противном случае для выражения l имеет место случай предельной точки (в бесконечности). Кроме того, минимальный оператор, порожденный выражением l и однородным граничным условием в нуле, является самосопряженным в пространстве $L^2(0, +\infty)$ в случае предельной точки, а в случае предельного круга таковым еще не является и нужно задавать граничное условие в бесконечности.

Отметим также, что если все решения уравнения (1) принадлежат пространству $L^2(0, +\infty)$, то минимальный оператор, порожденный выражением l_n в этом пространстве, имеет индексы дефекта $(2n, 2n)$. Справедливо и обратное утверждение.

Очевидно, что при любом изменении коэффициентов на множестве нулевой меры поведение решений уравнения (1) на бесконечности не изменится. В частности, сохранится свойство принадлежности всех решений этого уравнения пространству $L^p(0, +\infty)$ ($1 \leq p \leq +\infty$). В дальнейшем мы всюду предполагаем, что $I = \bigcup_{m=1}^{+\infty} (a_m, b_m)$, где интервалы (a_m, b_m) ($m = 1, 2, \dots$) не пересекаются и $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$.

Для выражений второго порядка вида $l[f]$ справедливы следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(a_m, b_m) \subset [0, +\infty)$ — последовательность непересекающихся интервалов, а k_m — последовательность положительных чисел ($m = 1, 2, \dots$), таких, что

$$q \geq k_m \text{ на } (a_m, b_m) \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{k_m} (b_m - a_m)^3 = +\infty.$$

Тогда для выражения l имеет место случай предельной точки (см. [2]).

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют бесконечно дифференцируемые функции q_1 и q_2 на $[0, +\infty)$, обладающие следующими свойствами: q_1 — невозрастающая функция, для выражения l с коэффициентом q_1 имеет место случай предельной точки, а для выражения l с коэффициентом

q_2 — случай предельного круга и $q_1(x) = q_2(x)$ всюду, кроме последовательности непересекающихся интервалов, сумма длин которых не превосходит числа ε (см. [3]).

2. Одним из аналогов теоремы 1 для уравнения (1) и произвольного $1 \leq p \leq +\infty$ является следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(a_m, b_m) \subset [0, +\infty)$ — последовательность непересекающихся интервалов, таких, что $p_n(x) \geq 0$ почти всюду при $x \in (a_m, b_m)$. Предположим, что при некотором $k \in \{0, \dots, n-1\}$ выполняется условие

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\nu_m}{M_m^p} \left\{ \frac{1}{\nu_m} \int_{a_m}^{b_m} (p_k^+)^{1/\mu} \right\}^{(2n-k-1/2)p+1} = +\infty \quad (2)$$

$$\left(\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\nu_m}{[(b_m - a_m) M_m]^2} \left\{ \frac{1}{\nu_m} \int_{a_m}^{b_m} (p_k^+)^{1/\mu} \right\}^{2(2n-k)+1} = +\infty \right),$$

где $\mu = 4n - 2k - 1 + 2/p$ ($\mu = 4n - 2k + 1$), $M_m = \max \{p_n(x) : x \in [a_m, b_m]\}$,

$$\nu_m = \left\{ \int_{a_m}^{b_m} \frac{1}{p_n} \sum_{s=0}^{n-1} \int_{a_m}^{b_m} [(x - a_m)(b_m - x)]^{n-1-s} p_s^-(x) dx \right\}^{1/2} + 1,$$

$p_s^-(x) = -\min \{p_s(x), 0\}$ и $p_s^+(x) = p_s(x) + p_s^-(x)$ ($s = 0, \dots, n-1$).

Тогда уравнение (1) имеет решение, не принадлежащее пространству $L^p(0, +\infty)$ ($L^\infty(0, +\infty)$).

Этот факт следует из теоремы 5.2 и по существу является видоизменением следствия 6.5 из работы автора [4].

Справедлива также

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, 1/p_n \in L_{\text{loc}}^1(0, +\infty)$ и $p_n(x) \geq 0$ почти всюду при $x \in [0, +\infty)$, и пусть (a_m, b_m) ($m = 1, 2, \dots$) — последовательность непересекающихся интервалов, таких, что $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$. Тогда для любого $k \in \{0, \dots, n-1\}$ существует квазидифференциальное выражение l'_n с коэффициентами $p'_0, p'_1, \dots, p'_{n-1}, 1/p_n \in L_{\text{loc}}^1(0, +\infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $p'_s(x) = p_s(x)$ при $x \in [0, +\infty)$, если $s \neq k$, и $p'_k(x) = p_k(x)$ при $x \notin \bigcup_{m=1}^{+\infty} (a_m, b_m)$ ($s = 1, \dots, n-1$).

2. Уравнение $l'_n[f] = 0$ имеет решение, не принадлежащее пространству $L^p(0, +\infty)$ ($1 \leq p \leq +\infty$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$p'_k(x) = \begin{cases} t_m & \text{при } x \in [a_m, b_m], m = 1, 2, \dots, \\ p_k(x) & \text{при } x \notin \bigcup_{m=1}^{+\infty} (a_m, b_m), \end{cases}$$

где t_m — произвольная последовательность положительных чисел. Функция $p'_k(x)$ не участвует в образовании чисел ν_m по последовательности интервалов (a_m, b_m) . Следовательно, подходящим подбором чисел t_m можно добиться выполнения условия (2). Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть все решения уравнения (1) принадлежат пространству $L^p(0, +\infty)$, и пусть (a_m, b_m) , $m = 1, 2, \dots$, — произвольная последователь-

ность непересекающихся интервалов и $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Смысл теоремы 4, очевидно, состоит в том, что изменением лишь коэффициента p_k только на интервалах (a_m, b_m) можно добиться того, что уравнение (1) будет иметь решение, не принадлежащее пространству $L^p(0, +\infty)$. При этом сумму длин интервалов (a_m, b_m) , как и в теореме 2, можно взять сколь угодно малым положительным числом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функции $p_0, \dots, p_{n-1}$ удовлетворяют каким-либо условиям гладкости, то функции $p'_0, \dots, p'_{n-1}$ можно взять также из этого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М., 1969.
2. Исмагилов Р. С. УМН, **28**, вып. 5 (113), 161–165 (1963).
3. Eastham M. S. P., Thompson M. L. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **24**, 531–535 (1973).
4. Мурзоев К. А. Матем. заметки, **57**, вып. 3, 394–414 (1995).

Московский государственный авиационный
технологический университет

Поступило в редакцию
30 марта 1996 г.

УДК 512.54

Метрика Хаусдорфа, конструкция отделимого факторпространства и границы симметрических пространств*

© 1997. Ю. А. НЕРЕТИН

Как известно, во многих интересных случаях факторпространство метрического пространства (топологического пространства, алгебраического многообразия) оказывается неотделимым пространством. В алгебраической геометрии известен ряд способов изготовлять отделимое факторпространство из неотделимого (замыкание в схеме Чжоу, раздутие особенностей, спектр алгебры инвариантных функций, см. [11]). Цель заметки — предложить очень простую (по существу общетопологическую) конструкцию отделимого факторпространства и обсудить некоторые ее приложения.

1. Неотделимое факторпространство. Пусть M — компактное метрическое пространство, и пусть $M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ — его разбиение на попарно непересекающиеся множества. Топология факторпространства A определяется условием: $B \subset A$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\bigcup_{\alpha \in B} M_\alpha$ замкнуто в M . Соответственно последовательность $\alpha_j \in A$ сходится к $\alpha \in A$, если существуют $m_j \in M_{\alpha_j}$, $m \in M_\alpha$, такие, что m_j сходится к m в топологии пространства M . Хорошо известно, что эта топология может оказаться неотделимой.

2. Допустимые множества. Пусть S — множество всех подмножеств в M , составленных из элементов разбиения M_α . Пусть разбиение $\bigcup M_\alpha$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: если множество Q содержится в S , то его замыкание $\text{Clos}(Q)$ тоже содержится в S .

* Поддержано грантом РФФИ №95-01-00814.