Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Метрика Хаусдорфа, конструкция отделимого факторпространства и границы симметрических пространств, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 83–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 06:04:12

ность непересекающихся интервалов и $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Смысл теоремы 4, очевидно, состоит в том, что изменением лишь коэффициента p_k только на интервалах (a_m, b_m) можно добиться того, что уравнение (1) будет иметь решение, не принадлежащее пространству $L^p(0, +\infty)$. При этом сумму длин интервалов (a_m, b_m) , как и в теореме 2, можно взять сколь угодно малым положительным числом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функции $p_0, \dots, p_{n-1}$ удовлетворяют каким-либо условиям гладкости, то функции $p'_0, \dots, p'_{n-1}$ можно взять также из этого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М., 1969.
2. Исмаилов Р. С. УМН, **28**, вып. 5 (113), 161–165 (1963).
3. Eastham M. S. P., Thompson M. L. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **24**, 531–535 (1973).
4. Мурзоев К. А. Матем. заметки, **57**, вып. 3, 394–414 (1995).

Московский государственный авиационный
технологический университет

Поступило в редакцию
30 марта 1996 г.

УДК 512.54

Метрика Хаусдорфа, конструкция отделимого факторпространства и границы симметрических пространств*

© 1997. Ю. А. НЕРЕТИН

Как известно, во многих интересных случаях факторпространство метрического пространства (топологического пространства, алгебраического многообразия) оказывается неотделимым пространством. В алгебраической геометрии известен ряд способов изготавливать отделимое факторпространство из неотделимого (замыкание в схеме Чжоу, раздутие особенностей, спектр алгебры инвариантных функций, см. [11]). Цель заметки — предложить очень простую (по существу общетопологическую) конструкцию отделимого факторпространства и обсудить некоторые ее приложения.

1. Неотделимое факторпространство. Пусть M — компактное метрическое пространство, и пусть $M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ — его разбиение на попарно непересекающиеся множества. Топология факторпространства A определяется условием: $B \subset A$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\bigcup_{\alpha \in B} M_\alpha$ замкнуто в M . Соответственно последовательность $\alpha_j \in A$ сходится к $\alpha \in A$, если существуют $m_j \in M_{\alpha_j}$, $m \in M_\alpha$, такие, что m_j сходится к m в топологии пространства M . Хорошо известно, что эта топология может оказаться неотделимой.

2. Допустимые множества. Пусть S — множество всех подмножеств в M , составленных из элементов разбиения M_α . Пусть разбиение $\bigcup M_\alpha$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: если множество Q содержится в S , то его замыкание $\text{Clos}(Q)$ тоже содержится в S .

* Поддержано грантом РФФИ №95-01-00814.

Фиксируем далее открытое плотное множество $\mathcal{M} \subset M$, такое, что $\mathcal{M} \in S$. Через $\mathcal{A}$ мы обозначим множество всех $\alpha \in A$, таких, что $M_\alpha \subset \mathcal{M}$.

По этим данным сейчас будет построено некоторое отдельное метрическое пространство $\bar{\mathcal{A}}$.

Возьмем последовательность $\alpha_j \in \mathcal{A}$. Скажем, что α_j *твердо сходится*, если любая предельная точка последовательности α_j в A является пределом этой последовательности в A (подчеркнем, что последовательность α_j может иметь много пределов, см. ниже разд. 4, 5).

Подмножество $T \subset A$ мы назовем *допустимым*, если существует твердо сходящаяся последовательность $\alpha_j \in \mathcal{A}$, такая, что T есть множество пределов последовательности α_j . Подчеркнем, что определение допустимого множества зависит от выбора подмножества $\mathcal{M} \subset M$.

Наше пространство $\bar{\mathcal{A}}$ мы определим как множество всех допустимых подмножеств в A . Естественный вопрос — как определить топологию в $\bar{\mathcal{A}}$?

3. Метрика Хаусдорфа. Обозначим ε -окрестность точки m через $O_\varepsilon(m)$, а ε -окрестность множества $Q \subset M$ через $O_\varepsilon(Q)$. Через $[M]$ мы обозначим пространство всех замкнутых непустых подмножеств в M .

Расстояние Хаусдорфа (см. [1, 2]) между $N_1, N_2 \in [M]$ определяется как точная нижняя грань чисел $\varepsilon > 0$, таких, что $N_1 \subset O_\varepsilon(N_2)$, $N_2 \subset O_\varepsilon(N_1)$.

Напомним признак сходимости в $[M]$.

ЛЕММА 1. *Последовательность $N_j \in [M]$ сходится к $N \in [M]$ тогда и только тогда, когда*

- (1) *для любого $t \in N$, начиная с некоторого номера j , множество $O_\varepsilon(t) \cap N_j$ непусто;*
- (2) *для любого $t \notin N$, начиная с некоторого номера j , множество $O_\varepsilon(t) \cap N_j$ пусто.*

Рассмотрим отображение $\psi: \mathcal{A} \rightarrow [M]$, которое точке $\alpha \in \mathcal{A}$ ставит в соответствие замыкание $\text{Clos}(M_\alpha)$ множества M_α . Пространство $\bar{\mathcal{A}}$ мы определяем как замыкание образа отображения ψ по метрике Хаусдорфа.

ЛЕММА 2. *Следующие условия равносильны:*

- (а) *$N \in [M]$ есть элемент из $\bar{\mathcal{A}}$;*
- (б) *существует допустимое множество $T \subset A$, такое, что $N = \bigcup_{\alpha \in T} M_\alpha$.*

Итак, два данных нами определения множества $\bar{\mathcal{A}}$ равносильны. Заметим, что по второму определению множество $\bar{\mathcal{A}}$ является компактным метрическим пространством (так как $[M]$ компактно, см. [2]).

4. Пример: “complete collineations” (см. [4, 8, 9]). Обозначим через Gr_n множество всех n -мерных подпространств в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$.

ПРИМЕР. Пусть A — оператор $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Тогда его график $\text{graph}(A)$ есть элемент из Gr_n .

Пусть $V \in \text{Gr}_n$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (через $\mathbb{C}^*$ мы обозначили группу комплексных чисел по умножению). Подпространство $\lambda V \in \text{Gr}_n$ мы определим как множество всех $(x, \lambda y) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, таких, что $(x, y) \in V$.

Пусть теперь $M = \text{Gr}_n$. Рассмотрим его разбиение на орбиты группы $\mathbb{C}^*$, причем соответствующее факторпространство обозначим через $\text{Gr}_n/\mathbb{C}^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $P \in \text{Gr}_n$ имеет вид $P = (P \cap (\mathbb{C}^n \oplus 0)) \oplus (P \cap (0 \oplus \mathbb{C}^n))$, то P — неподвижная точка группы $\mathbb{C}^*$. Все остальные орбиты изоморфны $\mathbb{C}^*$ как $\mathbb{C}^*$ -однородные пространства. Орбиты первого типа соответствуют замкнутым точкам в $\text{Gr}_n/\mathbb{C}^*$, орбиты второго типа — незамкнутым точкам (т.е. одноточечным множествам, которые не являются замкнутыми).

ЗАМЕЧАНИЕ. Любая последовательность $\text{graph}(A_j)$, где A_j — обратимые операторы, сходится и имеет по крайней мере два предела: $\mathbb{C}^n \oplus 0$ и $0 \oplus \mathbb{C}^n$, т.е. обычное определение сходящейся последовательности оказывается здесь совершенно бессмысленным.

Предположим теперь, что $\mathcal{M} \subset M = \text{Gr}_n$ есть множество графиков обратимых операторов, т.е. $\mathcal{M} = GL_n(\mathbb{C})$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{M}/\mathbb{C}^* = PGL_n(\mathbb{C})$.

ПРИМЕР. Пусть подпространство $P_j \in \text{Gr}_2$ состоит из векторов вида $(x, y; x, jy) \in \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$. Тогда последовательность $\mathbb{C}^*P_j$ твердо сходится в $\text{Gr}_n/\mathbb{C}^*$ и множество ее пределов имеет вид $R_1: (0, 0; x, y)$, $R_2: (0, y; x, y)$, $R_3: (x, 0; 0, y)$, $R_4: (x, y; 0, y)$, $R_5: (0, 0; x, y)$.

Чтобы описать компактификацию $\overline{\mathcal{A}}$ пространства $\mathcal{A}$, мы введем одно определение (см. [9]).

Пусть $V := \mathbb{C}^n \oplus 0$, $W := 0 \oplus \mathbb{C}^n$. Через π и π' мы обозначим проекторы на V и W в пространстве $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Шарнир в $\mathbb{C}^n$ — это следующий набор данных:

(а) два флага подпространств

$$V = L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_k = 0, \quad 0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = W,$$

причем $\dim L_j + \dim M_j = n$ для любого j ;

(б) семейство подпространств $P_1, \dots, P_k \in \text{Gr}_n$, определенных с точностью до множителя $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ и таких, что $P_j \cap V = L_j$, $\pi(P_j) = L_{j-1}$, $\pi'(P_j) = M_j$, $P_j \cap W = M_{j-1}$.

ТЕОРЕМА. (а) Для любого шарнира $P_1, \dots, P_k$ множество $P_1, \dots, P_k$, $L_0 \oplus M_0, L_1 \oplus M_1, \dots, L_k \oplus M_k$ является допустимым.

(б) Любое допустимое множество имеет вид, указанный в утверждении (а) (для некоторого шарнира $P_1, \dots, P_k$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенная нами компактификация $\overline{\mathcal{A}}$ группы $PGL_n(\mathbb{C})$ совпадает с многообразием “complete collineations”, см. [4, 8, 9]. Известно, что $\overline{\mathcal{A}}$ — гладкое алгебраическое многообразие, содержащее $PGL_n(\mathbb{C})$ в качестве открытого по Зарисскому плотного множества.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичным образом (см. [10, 12]) на языке шарниров описываются естественные компактификации других симметрических пространств: граница Сатаке–Фюрстенберга [5, 7], complete symmetric varieties ([3, 4, 6, 8]).

5. Граница ансамбля Брюа–Титса. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — поле p -адических чисел, $\mathbb{Z}_p$ — множество целых p -адических чисел и $\mathbb{Q}_p^*$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{Q}_p$. Пусть M — пространство всех $\mathbb{Z}_p$ -подмодулей в $\mathbb{Q}_p^n$ (естественно рассматривать эти модули как подмножества в проективном пространстве $\mathbb{QP}^n$). Тогда M становится компактным метрическим пространством относительно метрики Хаусдорфа в $[\mathbb{QP}^n]$. Напомним, что решеткой в $\mathbb{Q}_p^n$ называется $\mathbb{Z}_p$ -подмодуль вида $\mathbb{Z}_p v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p v_n$, где $v_1, \dots, v_n$ — произвольный базис в $\mathbb{Q}_p^n$. Обозначим через Ens_n пространство всех решеток, определенных

с точностью до растяжения (т.е. умножения на элемент группы $\mathbb{Q}_p^*$). Иными словами, Ens_n — множество вершин ансамбля Брюа–Титса.

Рассмотрим теперь пространство $A = M/\mathbb{Q}_p^*$, а в качестве $\mathcal{A}$ возьмем множество Ens_n . Тогда допустимые подмножества в $M/\mathbb{Q}_p^*$ имеют вид

$$0 = M_0, L_0, M_1, L_1, M_2, L_2, \dots, M_{k+1} = \mathbb{Q}_p^n,$$

где $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{k+1}$ — линейные подпространства в $\mathbb{Q}_p^n$ и $M_j \subset L_j \subset M_{j+1}$, причем L_j/M_j — решетки в M_{j+1}/M_j .

Таким образом, множество Ens_n естественным образом компактифицируется пространством допустимых подмножеств в $A = M/\mathbb{Q}_p^*$.

Я благодарю К. Де Кончини и С. Л. Трегуба за обсуждение затронутой темы. Я также благодарю руководство Института Макса Планка (Бонн) за гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pompeiu D.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, **7**, 265–315 (1905).
2. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. ОНТИ, 1937.
3. *Study E.* Math. Ann., **27**, 51–58 (1886).
4. *Semple I. G.* Rend. Math. Univ. Roma (5), **10**, 201–208 (1951).
5. *Satake I.* Ann. Math., **77**, 335–386 (1963).
6. *Alguineid A. R.* Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, **4**, 93–104 (1952).
7. *Furstenberg H.* Ann. Math., **77**, 335–386 (1963).
8. *De Concini C., Procesi C.* Lect. Notes Math., vol. 996, 1983, pp. 1–44.
9. *Неретин Ю. А.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 4, 30–44 (1992).
10. *Neretin Yu. A.* Preprint MPI 96-78.
11. *Kapranov M. M.* Adv. Sov. Math., Vol. 16, Part 2, 29–110.
12. *Neretin Yu. A.* To appear in Kirillov seminar on representation theory, Adv. Sov. Math.

Московский государственный институт
электроники и математики,
Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn)

Поступило в редакцию
24 апреля 1996 г.

УДК 530.1

Об интегрировании неабелевых цепочек типа Ленгмюра методом обратной спектральной задачи

© 1997. А. С. Осипов

Рассматривается задача Коши для системы дифференциально-разностных уравнений, коэффициенты которых — ограниченные операторы из произвольного банахова пространства B :

$$\dot{C}_n = \sum_{i=1}^q C_{n+i} C_n - C_n \sum_{i=1}^q C_{n-i}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$C_n = C_n(t) \in \mathfrak{L}(B), \quad t \in [0, T], \quad 0 < T \leq \infty, \quad \cdot = d/dt.$$

В скалярном случае при $C_n(t) > 0$ и $q = 1$ исследуемая система представляет собой известную в приложениях цепочку Ленгмюра (модель Вольтерра), интегрируемую различными методами обратной задачи [1, 2]. Для произвольных q