Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Осипов, Об интегрировании неабелевых цепочек типа Ленгмюра методом обратной спектральной задачи, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 86–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:06:38

с точностью до растяжения (т.е. умножения на элемент группы $\mathbb{Q}_p^*$). Иными словами, Ens_n — множество вершин ансамбля Брюа–Титса.

Рассмотрим теперь пространство $A = M/\mathbb{Q}_p^*$, а в качестве $\mathcal{A}$ возьмем множество Ens_n . Тогда допустимые подмножества в $M/\mathbb{Q}_p^*$ имеют вид

$$0 = M_0, L_0, M_1, L_1, M_2, L_2, \dots, M_{k+1} = \mathbb{Q}_p^n,$$

где $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{k+1}$ — линейные подпространства в $\mathbb{Q}_p^n$ и $M_j \subset L_j \subset M_{j+1}$, причем L_j/M_j — решетки в M_{j+1}/M_j .

Таким образом, множество Ens_n естественным образом компактифицируется пространством допустимых подмножеств в $A = M/\mathbb{Q}_p^*$.

Я благодарю К. Де Кончини и С. Л. Трегуба за обсуждение затронутой темы. Я также благодарю руководство Института Макса Планка (Бонн) за гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pompeiu D.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, **7**, 265–315 (1905).
2. *Хайсдорф Ф.* Теория множеств. ОНТИ, 1937.
3. *Study E.* Math. Ann., **27**, 51–58 (1886).
4. *Semple I. G.* Rend. Math. Univ. Roma (5), **10**, 201–208 (1951).
5. *Satake I.* Ann. Math., **77**, 335–386 (1963).
6. *Alguineid A. R.* Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, **4**, 93–104 (1952).
7. *Furstenberg H.* Ann. Math., **77**, 335–386 (1963).
8. *De Concini C., Procesi C.* Lect. Notes Math., vol. 996, 1983, pp. 1–44.
9. *Неретин Ю. А.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 4, 30–44 (1992).
10. *Neretin Yu. A.* Preprint MPI 96-78.
11. *Kapranov M. M.* Adv. Sov. Math., Vol. 16, Part 2, 29–110.
12. *Neretin Yu. A.* To appear in Kirillov seminar on representation theory, Adv. Sov. Math.

Московский государственный институт
электроники и математики,
Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn)

Поступило в редакцию
24 апреля 1996 г.

УДК 530.1

Об интегрировании неабелевых цепочек типа Ленгмюра методом обратной спектральной задачи

© 1997. А. С. Осипов

Рассматривается задача Коши для системы дифференциально-разностных уравнений, коэффициенты которых — ограниченные операторы из произвольного банахова пространства B :

$$\dot{C}_n = \sum_{i=1}^q C_{n+i} C_n - C_n \sum_{i=1}^q C_{n-i}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$C_n = C_n(t) \in \mathfrak{L}(B), \quad t \in [0, T], \quad 0 < T \leq \infty, \quad \cdot = d/dt.$$

В скалярном случае при $C_n(t) > 0$ и $q = 1$ исследуемая система представляет собой известную в приложениях цепочку Ленгмюра (модель Вольтерра), интегрируемую различными методами обратной задачи [1, 2]. Для произвольных q

система (1) с числовыми коэффициентами исследовалась в [3, 4], причем в [3] было установлено, что она является дискретным аналогом уравнения Кортевега–де Фриза. При $q = 1$ данная система в полубесконечном случае ($n \in \mathbb{Z}_+$) была рассмотрена в [5]. Ниже будут приведены процедуры построения ограниченных решений системы (1) как для полубесконечного, так и для бесконечного ($n \in \mathbb{Z}$) случая. При этом потребуются обобщить метод обратной спектральной задачи для несимметрических разностных операторов второго порядка [5] на некоторые классы разностных операторов высших порядков.

1. Полубесконечный случай. Система (1) допускает представление Лакса $\dot{L} = [L, A]$, где $L = L(t) = (L_{ij})_{i,j=0}^\infty$ и $A = A(t) = (A_{ij})_{i,j=0}^\infty$ — матрицы, ненулевые элементы которых имеют вид

$$L_{i,i-q} = C_{i-q}, \quad L_{i,i+1} = E \quad (E — тождественный оператор), \quad (2)$$

$$A_{i,i} = -C_{i-q} - \dots - C_i, \quad A_{i,i+q+1} = -E, \quad i \geq 0. \quad (3)$$

Будем искать решения системы (1), удовлетворяющие условиям

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+, t \in [0, T]} (\|C_n(t)\|) < \infty, \quad C_n(t) \text{ обратимы.} \quad (4)$$

Тогда при всех t матрицы $L(t)$ и $A(t)$ порождают ограниченные операторы в пространстве $l_1([0, \infty), B) = \{(u_n)_{n=0}^\infty; u_n \in B, \sum_{n=0}^\infty \|u_n\| < \infty\}$, за которыми мы сохраним те же обозначения.

Для оператора $L = L(t)$ введем матрицу Вейля $\mathfrak{M}(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda, t)$:

$$\mathfrak{M}(\lambda) = (\phi_1(\lambda), \dots, \phi_q(\lambda)),$$

где $\phi_i(\lambda) = (R_\lambda e_i)_0$, $e_i = (\delta_{i-1,k} E)_{k=0}^\infty$, $R_\lambda = (\lambda E - L(t))^{-1}$, $i = 1, \dots, q$. Следовательно,

$$\phi_i(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \frac{S_k^i}{\lambda^{k+1}}, \quad \text{где } S_k^i = (L^k)_{0,i-1}. \quad (5)$$

Можно рассматривать $\mathfrak{M}(\lambda)$ для оператора L как обобщение функции Вейля для полубесконечных матриц Якоби.

Будем называть последовательность $S(\mathfrak{M}(\lambda)) = (S_k^1, \dots, S_k^q)_{k=0}^\infty$ моментной последовательностью матрицы Вейля, а S_k^i — ее моментами. Следующая теорема дает критерий разрешимости обратной задачи для оператора $L(t)$ и алгоритм восстановления его элементов по $S(\mathfrak{M}(\lambda))$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы последовательность $(S_k^1, \dots, S_k^q)_{k=0}^\infty$, $S_k^i \in \mathfrak{L}(B)$, такая, что степенные ряды, построенные по формулам (5), являются голоморфными в бесконечности оператор-функциями, была моментной последовательностью матрицы Вейля оператора L , удовлетворяющего условиям (2)–(4), необходимо и достаточно выполнение таких условий:*

- (i) $S_{i-1}^i = E$, $i = 1, \dots, q$;
- (ii) $S_{n+(1+q)p}^i = 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $n = 0, \dots, q$, $n \neq i - 1$;
- (iii) *при любом $k \geq 0$ операторы $\Delta_k = (\alpha_{rj})_{r,j=0}^k$, где $\alpha_{rj} = S_{j+p+1}^{l+1}$ при $r = pq + l$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, q - 1$, обратимы в пространстве $B^k = \{(u_j)_{j=0}^k; u_j \in B\}$.*

Коэффициенты оператора L восстанавливаются посредством следующей процедуры:

(а) по последовательности $S(\mathfrak{M}(\lambda)) = S^0(\mathfrak{M}(\lambda))$ рекуррентно строится последовательность $S^n(\mathfrak{M}(\lambda)) = (S_k^{1,n}, \dots, S_k^{q,n})_{k=0}^\infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$S_k^{i,n+1} = D_k^{i+1}(S^n), \quad i = 1, \dots, q-1, \quad S_k^{q,n+1} = (D_{k+1}^1(S^n))(S_{q+1}^{1,n})^{-1}, \quad (6)$$

$k \in \mathbb{N}$, где

$$D_k^1(S^n) = \sum_{i_1 + \dots + i_m = k+1} (-1)^{m+1} S_{i_1}^{1,n} \dots S_{i_m}^{1,n},$$

$$D_k^{i+1}(S^n) = \sum_{i_1 + \dots + i_m = k-p} (-1)^m S_{i_1}^{1,n} \dots S_{i_m}^{1,n} \sum_{p=0}^{k-1} S_{p+1}^{i+1,n} + S_{k+1}^{i+1,n},$$

$i_1, \dots, i_m \geq 1$ и суммирование ведется по всем наборам $i_1, \dots, i_m$, удовлетворяющим указанным равенствам, а $S_0^{i,n+1} = \delta_{i-1,0} E$, $i = 1, \dots, q$;

(б) по $S^n(\mathfrak{M}(\lambda))$ определяются коэффициенты оператора L посредством формулы

$$C_n = L_{n+q,n} = S_{q+1}^{1,n}. \quad (7)$$

Отметим, что условие (ii) теоремы 1 является критерием выполнения следующего условия для оператора L : $L_{i,i+j} = 0$, $i \geq 0$, $j = -q+1, \dots, 0$.

Используя представление Лакса для системы (1) в предположении, что ее решение существует, получаем эволюционные уравнения для моментов $S_k^i(t)$:

$$\dot{S}_k^i(t) = S_{k+q+1}^i(t) - S_k^i(t) S_{i+q+1}^i(t), \quad i = 1, \dots, q.$$

Основная теорема для полубесконечного случая формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для системы (1) начальные данные $(C_n(0))_{n=0}^\infty$ удовлетворяют (4). Тогда найдется $\delta > 0$, такое, что при $t \in [0, \delta)$ решение задачи Коши для (1), удовлетворяющее (4), существует, единственно и строится следующим образом:

- (i) по формулам (2) определяется оператор $L(0)$;
- (ii) используя (5), для $L(0)$ строится моментная последовательность матрицы Вейля $S(\mathfrak{M}(\lambda, 0)) = (S_k^1(0), \dots, S_k^q(0))_{k=0}^\infty$;
- (iii) определяется последовательность $S(\mathfrak{M}(\lambda, t)) = (S_k^1(t), \dots, S_k^q(t))_{k=0}^\infty$:

$$S_k^i(t) = \left(\sum_{d=0}^\infty S_{k+(q+1)d}^i(0) \frac{t^d}{d!} \right) \left(\sum_{d=0}^\infty S_{i+(q+1)d}^i(0) \frac{t^d}{d!} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, q; \quad (8)$$

- (iv) по $S(\mathfrak{M}(\lambda, t))$, исходя из (6), (7), вычисляются $C_n(t)$,

Если для построенной последовательности $S(\mathfrak{M}(\lambda, t))$ условие (iii) теоремы 1 выполнено при $t \in [0, T)$, то указанная процедура дает решение системы на всем рассматриваемом интервале.

2. Бесконечный случай. Здесь можно получить решения системы (1) в виде степенных рядов, коэффициенты которых строятся при помощи конечных систем, аппроксимирующих (1). Этот метод использовался в [6] при интегрировании бесконечной цепочки Тода. А именно справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3. Пусть начальные данные для (1) удовлетворяют условию $\|C_n(0)\| \leq K$ и $C_n(0)$ обратимы, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда существует $\delta = \delta(K) > 0$, такое, что при $t \in [0, T)$ решение задачи Коши для (1) существует, единственно и представимо в виде ряда

$$C_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_{np} t^p}{p!}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Коэффициенты C_{np} определяются следующим образом:

- (i) строится конечная матрица $L(n, p, 0) = (L(n, p, 0)_{ij})_{i,j=0}^{q(2p+1)}$ с ненулевыми элементами
$$L(n, p, 0)_{i,i-q} = C_{n-pq+i-q}(0), \quad L(n, p, 0)_{i,i+1} = E, \quad i = 0, \dots, q(2p+1);$$
- (ii) определяется моментная последовательность $S(\mathfrak{M}_p(\lambda, 0)) = (S_{k,p}^1(0), \dots, S_{k,p}^q(0))_{k=0}^{\infty}$ по формуле $S_{k,p}^i = (L^k(n, p, 0))_{0,i-1}$, $i = 1, \dots, q$;
- (iii) при помощи формул (8) теоремы 2 и (6) теоремы 1 строится последовательность $(S_{k,p}^{1,l}(t), \dots, S_{k,p}^{q,l}(t))_{k=0}^{\infty} = S^l(\mathfrak{M}_p(\lambda, t))$, $l \in \mathbb{Z}_+$;
- (iv) вычисляются C_{np} по формулам

$$C_{np} = \frac{d^p}{dt^p} (S_{q+1,p}^{1,qp}(t)) \Big|_{t=0}.$$

Автор благодарен А. Г. Костюченко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кас М., van Moerbeke P. Adv. Math., **16**, 160–169 (1975). 2. Berezhansky Yu. M. Rep. Math. Phys., **24**, No. 1, 21–47 (1986). 3. Боголюбский О. И. Изв. АН СССР, сер. матем., **51**, №6, 1123–1142 (1987). 4. Иtoh I. Progr. Theoret. Phys., **7**, No. 3, 507–510 (1987). 5. Гехтман М. И. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 72–73 (1990). 6. Гехтман М. И. Функци. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 82–84 (1991).

Институт системных исследований РАН

Поступило в редакцию
22 ноября 1995 г.

УДК 519.46

Минимальная система определяющих соотношений для некоторых супералгебр Ли

© 1997. Г. И. ПРОСВЕТОВ

В данной работе найдены минимальные системы определяющих соотношений (т.е. минимальные системы соотношений между образующими) для некоторых супералгебр Ли.

Для алгебры Каца–Мууди $L(A)$ с обобщенной $n \times n$ -матрицей Картана $A = (a_{ij})$ и образующими Шевалле e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) имеется треугольное разложение $L(A) = L_- \oplus L_0 \oplus L_+$. Здесь L_+ (соответственно L_-) обозначает подалгебру в $L(A)$, порожденную элементами $e_1, \dots, e_n$ (соответственно $f_1, \dots, f_n$), а