Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Просветов, Минимальная система определяющих соотношений для некоторых супералгебр
Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 89–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:41:28

ТЕОРЕМА 3. Пусть начальные данные для (1) удовлетворяют условию $\|C_n(0)\| \leq K$ и $C_n(0)$ обратимы, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда существует $\delta = \delta(K) > 0$, такое, что при $t \in [0, T)$ решение задачи Коши для (1) существует, единственно и представимо в виде ряда

$$C_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_{np} t^p}{p!}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Коэффициенты C_{np} определяются следующим образом:

- (i) строится конечная матрица $L(n, p, 0) = (L(n, p, 0)_{ij})_{i,j=0}^{q(2p+1)}$ с ненулевыми элементами
$$L(n, p, 0)_{i,i-q} = C_{n-pq+i-q}(0), \quad L(n, p, 0)_{i,i+1} = E, \quad i = 0, \dots, q(2p+1);$$
- (ii) определяется моментная последовательность $S(\mathfrak{M}_p(\lambda, 0)) = (S_{k,p}^1(0), \dots, S_{k,p}^q(0))_{k=0}^{\infty}$ по формуле $S_{k,p}^i = (L^k(n, p, 0))_{0,i-1}$, $i = 1, \dots, q$;
- (iii) при помощи формул (8) теоремы 2 и (6) теоремы 1 строится последовательность $(S_{k,p}^{1,l}(t), \dots, S_{k,p}^{q,l}(t))_{k=0}^{\infty} = S^l(\mathfrak{M}_p(\lambda, t))$, $l \in \mathbb{Z}_+$;
- (iv) вычисляются C_{np} по формулам

$$C_{np} = \frac{d^p}{dt^p} (S_{q+1,p}^{1,qp}(t)) \Big|_{t=0}.$$

Автор благодарен А. Г. Костюченко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кас М., van Moerbeke P. Adv. Math., **16**, 160–169 (1975). 2. Berezhansky Yu. M. Rep. Math. Phys., **24**, No. 1, 21–47 (1986). 3. Боголюбский О. И. Изв. АН СССР, сер. матем., **51**, №6, 1123–1142 (1987). 4. Иtoh I. Progr. Theoret. Phys., **7**, No. 3, 507–510 (1987). 5. Гехтман М. И. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 72–73 (1990). 6. Гехтман М. И. Функци. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 82–84 (1991).

Институт системных исследований РАН

Поступило в редакцию
22 ноября 1995 г.

УДК 519.46

Минимальная система определяющих соотношений для некоторых супералгебр Ли

© 1997. Г. И. ПРОСВЕТОВ

В данной работе найдены минимальные системы определяющих соотношений (т.е. минимальные системы соотношений между образующими) для некоторых супералгебр Ли.

Для алгебры Каца–Мууди $L(A)$ с обобщенной $n \times n$ -матрицей Картана $A = (a_{ij})$ и образующими Шевалле e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) имеется треугольное разложение $L(A) = L_- \oplus L_0 \oplus L_+$. Здесь L_+ (соответственно L_-) обозначает подалгебру в $L(A)$, порожденную элементами $e_1, \dots, e_n$ (соответственно $f_1, \dots, f_n$), а

L_0 — подалгебра Картана. Определяющая система для L_+ (соответственно L_-) — это $(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$ (соответственно $(\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0$), $i \neq j$ (см. [1]).

Известно, что подалгебра $\bigoplus_{k=2}^{\infty} \mathbb{C}[p] q^k$ алгебры Пуассона $P = \mathbb{C}[[p, q]]$ имеет образующие $p^k q^2$, $k = 0, 1, \dots$, и минимальную систему определяющих соотношений степеней 2 и 3. Следует напомнить, что алгебра Ли полиномиальных гамильтоновых векторных полей на плоскости есть факторалгебра алгебры P по ее центру. Через $\mathbb{C}[p]$ обозначено кольцо многочленов от p . Рассмотрим вопрос о минимальной системе определяющих соотношений для супералгебры Ли

$$L = \mathbb{C}[p] q \xi \oplus \mathbb{C}[p] q^2 \oplus \mathbb{C}[p] q^2 \xi \oplus \mathbb{C}[p] q^3 \oplus \mathbb{C}[p] q^3 \xi \oplus \dots$$

Здесь $\xi^2 = 0$. При помощи отображения

$$H(p, q, \xi) \mapsto \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

устанавливается изоморфизм между супералгеброй L и подсупералгеброй супералгебры Ли полиномиальных гамильтоновых векторных полей, сохраняющих 2-форму $dp \wedge dq + (d\xi)^2$. Коммутатор в L задается формулой

$$[H_1(p, q, \xi), H_2(p, q, \xi)] = \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_2}{\partial q} - \frac{\partial H_2}{\partial p} \frac{\partial H_1}{\partial q} + \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial H_2}{\partial \xi}.$$

Далее через W_1 мы обозначаем алгебру Ли полиномиальных векторных полей на прямой, через F_μ — пространство выражений вида $f(x) dx^{-\mu}$, где $f(x)$ — многочлен, а через $[n]$ — целую часть числа. Супералгебра L является градуированной:

$$\deg e_k^{(\lambda)} = \lambda, \quad e_k^{(\lambda)} = p^k q^\mu \xi^m, \quad \mu = [\lambda/2] + 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad m = \lambda \bmod 2.$$

Мы можем изобразить элементы нашей супералгебры в виде целочисленной решетки на плоскости, в которой элементам $e_k^{(\lambda)}$ соответствует точка с координатами $(\lambda, \mu - k)$. Как $\mathbb{C}[p] q (\simeq W_1)$ -модуль L изоморфна

$$F_1 \oplus F_2 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_3 \oplus \dots,$$

где элементам степени λ супералгебры L соответствует F_μ , $\mu = [\lambda/2] + 1$. Образующими для L являются элементы $e_k^{(1)}$, $k = 0, 1, \dots$.

ТЕОРЕМА. Минимальная система определяющих соотношений для L содержит только соотношения степеней 2, 4, 5, причем соотношения степени 2 составляют ядро отображения $S^2 F_1 \rightarrow F_2$, а соотношения степени 4 и 5 определяют соответственно F_1 и F_4 (как W_1 -модули). А именно, соотношения степени 2

$$[e_0^{(1)}, e_n^{(1)}] = [e_\alpha^{(1)}, e_\beta^{(1)}], \quad \alpha + \beta = n, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \leq \beta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

соответствуют ядру отображения $S^2 F_1 \rightarrow F_2$, соотношения степени 4

$$k[e_0^{(1)}, [e_0^{(1)}, [e_1^{(1)}, e_k^{(1)}]]] - (k+1)[e_1^{(1)}, [e_0^{(1)}, [e_0^{(1)}, e_k^{(1)}]]] = 0, \quad k = 2, 4, 5, 6, \dots,$$

соответствуют W_1 -модулю F_1 , а соотношения степени 5

$$(m-3)[e_0^{(1)}, [e_0^{(1)}, [e_0^{(1)}, [e_1^{(1)}, e_{m+1}^{(1)}]]]] - (m+2)[e_1^{(1)}, [e_0^{(1)}, [e_0^{(1)}, [e_0^{(1)}, e_{m+1}^{(1)}]]]] = 0,$$

$m = -1, 0, 1, \dots$, соответствуют W_1 -модулю F_4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай соотношений степени 2 ясен.

Для элементов степени $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеем

$$\begin{aligned} \partial: F_{\mu_1} \otimes F_{\mu_2} \otimes F_{\mu_3} &\rightarrow F_{\mu_1} \otimes F_{\nu_2} + F_{\mu_2} \otimes F_{\nu_3} + F_{\mu_3} \otimes F_{\nu_1}, \\ \mu_i &= [\lambda_i/2] + 1, \quad \nu_i = [(\lambda_i + \lambda_{i+1})/2] + 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = \lambda_1 \end{aligned} \quad (1)$$

(где ∂ — дифференциал комплекса). Напомним (см. [2]), что композиционный ряд модуля $F_\lambda \otimes F_\mu$ — это

$$F_{\lambda+\mu}, F_{\lambda+\mu-1}, F_{\lambda+\mu-2}, \dots,$$

т.е. в $F_\lambda \otimes F_\mu$ имеется фильтрация

$$F_\lambda \otimes F_\mu = \Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots, \quad \Phi_i / \Phi_{i+1} \simeq F_{\lambda+\mu-i}.$$

Сравнивая композиционные ряды в левом и правом модулях отображения $S^3 F_1 \rightarrow F_1 \otimes F_2$, убеждаемся, что нет соотношений степени 3.

Отождествим F_μ с $R_1 = \mathbb{C}[x]$, поставив в соответствие полю $f(x) dx^{-\mu}$ полином $f(x)$. При этом $F_{\mu_1} \otimes \dots \otimes F_{\mu_n}$ отождествляется с R_n — кольцом многочленов от n переменных с комплексными коэффициентами. Супералгебра L имеет $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ -градуировку: $\deg e_k^{(\lambda)} = (\lambda, \mu - k)$, $\mu = [\lambda/2] + 1$. Благодаря этому градуировку получают ее гомологии. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2s$ (соответственно $\lambda_3 = 2s + 1$), $s = 1, 2, \dots$, (1) запишется в виде $S^2 F_1 \otimes F_{s+1} \rightarrow F_1 \otimes F_{s+1} + F_2 \otimes F_{s+1}$ (соответственно $S^2 F_1 \otimes F_{s+1} \rightarrow F_1 \otimes F_{s+2} + F_2 \otimes F_{s+1}$), причем оператор

$$A_1 = \left((s+1) \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{u=x_2=y, v=x_1}$$

(соответственно $A_2 = \Big|_{u=x_2=y, v=x_1}$) отображает левую часть на первое слагаемое правой части, а оператор $B = \Big|_{u=x_1=x_2, v=y}$ — на второе. Оператор B переводит в нуль функции вида

$$f(x_1, x_2, y)(x_1 - x_2)^m((x_1 - y)^n + (x_2 - y)^n), \quad n = 0, 1, \dots, m = 2, 3, \dots$$

Здесь f — симметричный по x_1, x_2 многочлен. Подействуем на эти функции оператором A_1 (соответственно A_2). Под действием оператора A_1 (соответственно A_2) мы получаем при $s = 2, 3, \dots$ (соответственно $1, 2, \dots$) из $S^2 F_1 \otimes F_{s+1}$ все члены композиционного ряда $F_{s+2}, F_{s+1}, F_s, \dots$ (соответственно $F_{s+3}, F_{s+2}, F_{s+1}, \dots$) модуля $F_1 \otimes F_{s+1}$ (соответственно $F_1 \otimes F_{s+2}$), за исключением F_{s+2} (соответственно F_{s+3}, F_{s+2}). При $s = 1$ под действием A_1 мы не можем попасть в F_3 и F_1 . Вычисляя двумерные гомологии степеней $(2(s+1), s+2)$, $s = 2, 3, \dots$, $(4, 3-k)$, $k = 0, 1, \dots$, $(3+2t, t+3)$, $(3+2t, t+2)$, $t = 2, 3, \dots$, $(5, 3-m)$, $m = -1, 0, 1, \dots$, мы получаем, что нетривиальными являются лишь пространства $H_2^{(4, 3-k)}(L)$, $k = 2, 4, 5, 6, \dots$, $H_2^{(5, 3-m)}(L)$, $m = -1, 0, 1, \dots$. Эти пространства одномерны, и представляющие циклы равны $e_k^{(3)} e_0^{(1)} - e_{k-1}^{(3)} e_1^{(1)}$, $(m-3) e_{m+1}^{(4)} \otimes e_0^{(1)} - (m+1) e_m^{(4)} \otimes e_1^{(1)}$, откуда получается искомая система соотношений. Теорема доказана.

Рассмотрим эту же задачу для еще одного класса подсупералгебр. Мы получим аналог серровских соотношений. Напомним, что супералгебра Ли $sl(n, n)$

состоит из блочных матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию $\text{tr } A = \text{tr } D$ (подробности см. в [3]). Обозначим через $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$ матрицу, у которой на пересечении строки i и столбца j блоков A, B, C и D стоят единицы, а на остальных местах находятся нули. Рассмотрим максимальные нильпотентные подсупералгебры $L^{(1)}$ супералгебр Ли $sl(n+1, n)$, $sl(n, n)$, $n \geq 2$, с образующими

- 1) $b_{kk}, c_{1n}, c_{j+1,j}, k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n-2$, для $sl(n, n)$,
- 2) $b_{k+1,k}, c_{1,n+1}, c_{21}, c_{jj}, k = 1, \dots, n, j = 3, \dots, n$, для $sl(n+1, n)$.

Тогда имеет место разложение

$$sl(n, n) \text{ (или } sl(n+1, n)) = L^{(1)} \oplus L^{(0)} \oplus L^{(2)},$$

где $L^{(0)}$ — картановская подсупералгебра, а образующие для $L^{(2)}$ симметричны образующим для $L^{(1)}$ относительно главной диагонали. Супералгебра $L^{(1)}$ градуирована. Благодаря этому градуировку получают ее гомологии. Вычисляя двумерные гомологии, получаем, что нетривиальными являются лишь $H_2^{(2)}(L^{(1)})$, $H_2^{(4)}(L^{(1)})$. Найдя представляющие циклы, доказываем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Минимальная система определяющих соотношений супералгебры $L^{(1)}$ состоит только из соотношений степеней 2 и 4, причем соотношения степени 2 имеют вид

$$[b_{i_1 j_1}, b_{i_2 j_2}] = 0, \quad [c_{i_1 j_1}, c_{i_2 j_2}] = 0, \quad [b_{\alpha\beta}, c_{mr}] = 0, \quad \alpha \neq r, \beta \neq m,$$

а соотношения степени 4 имеют вид

$$\begin{aligned} [[b_{11}, c_{1n}], b_{nn}], c_{1n}] &= 0, \\ [[[b_{j+1,j+1}, c_{j+1,j}], b_{jj}], c_{j+1,j}] &= 0, \quad j = 1, \dots, n-2, \\ [b_{ii}, [c_{i+1,i}, [b_{ii}, c_{i,i-1}]]] &= 0, \quad i = 2, \dots, n-2, \end{aligned}$$

для случая $sl(n, n)$ и вид

$$\begin{aligned} [[[b_{21}, c_{1,n+1}], b_{n+1,n}], c_{1,n+1}] &= 0, \\ [[[b_{t+1,t}, c_{tt}], b_{t,t-1}], c_{tt}] &= 0, \quad t = 3, \dots, n, \\ [b_{s+1,s}, [c_{s+1,s+1}, [b_{s+1,s}, c_{ss}]]] &= 0, \quad s = 3, \dots, n-1, \end{aligned}$$

для случая $sl(n+1, n)$.

Автор признателен Б. Л. Фейгину за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац В. Г. Бесконечномерные алгебры Ли. Мир, М., 1993.
2. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Наука, М., 1984.
3. Кас V. G. Adv. Math., **26**, No. 1 (1977).