Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Табачников, О функциях с нулевым средним по конечной группе, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 1, 93–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:20:50

УДК 517.9

О функциях с нулевым средним по конечной группе*

© 1997. С. Л. ТАБАЧНИКОВ

1. В работе В. И. Арнольда [1] сделано следующее наблюдение. Пусть f — тригонометрический вещественный многочлен степени n с нулевым свободным членом, меняющий знак в точности в двух точках. Эти точки разбивают окружность на две дуги.

ТЕОРЕМА 1. *Отношение длин этих дуг не меньше $1/n$. В случае равенства многочлен f единствен с точностью до множителя и поворота окружности. Корни такого экстремального многочлена образуют правильный $(n+1)$ -угольник; кратности всех корней, за исключением двух соседних, равны 2.*

Близкая к первому утверждению теоремы оценка содержится в [2]. В этой заметке мы предлагаем несколько вариаций на эту тему.

Начнем с простого общего наблюдения. Пусть M — пространство с конечной мерой и $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция. Обозначим через $m(f)$ относительную меру множества $\{x \in M \mid f(x) \leq 0\}$. Пусть G — конечная группа сохраняющих меру преобразований пространства M ; обозначим через $\bar{f}$ усреднение функции f по G : $\bar{f}(x) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} f(gx)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\bar{f} \equiv 0$, то $m(f) \geq 1/|G|$.*

Доказательство следует из того, что каждая G -орбита пересекает множество $\{x \mid f(x) \leq 0\}$.

2. В случае когда $M = \mathbb{S}^1$ с мерой Лебега и G — циклическая группа поворотов окружности порядка n , мы получаем такое следствие.

ТЕОРЕМА 3. *Если ряд Фурье функции f не содержит гармоник, порядок которых кратен n (включая константы), то $m(f) \geq 1/n$. В частности, $m(f) \geq 1/n$ для тригонометрических многочленов степени меньше n с нулевым средним.*

Рассмотрим случай равенства. Пусть f — тригонометрический многочлен степени N , не содержащий гармоник, порядок которых кратен n , и $m(f) = 1/n$. Обозначим через k число компонент множества $\{x \mid f(x) < 0\}$.

ТЕОРЕМА 4. $k \leq N/(n-1)$.

В частности, если $N = n-1$, то f меняет знак ровно дважды и, следовательно, совпадает с экстремальным многочленом из теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интервалы $I_1, \dots, I_k$, составляющие множество $\{x \mid f(x) < 0\}$, и их повороты на углы $2\pi j/n$, $j = 0, \dots, n-1$. Эти nk интервалов I_{ij} покрывают $\mathbb{S}^1$ (за исключением концов) и попарно не пересекаются. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, k\}$ и поместим единичные массы в левые концы интервалов I_{ij} , $j = 0, \dots, n-1$. Функция f ортогональна полученной $\mathbb{Z}_n$ -инвариантной мере и $f \geq 0$ в каждой точке ее носителя (ибо ни одна из этих точек не лежит в интервалах $I_1, \dots, I_k$). Поэтому каждая из этих n точек — корень многочлена f . Не более двух из этих точек — граничные для интервалов

* Работа выполнена при частичной поддержке NSF.

I_i (иначе интервалы I_{ij} пересекались бы). Поэтому $n - 2$ из этих корней кратные, а суммарная кратность этих n корней не меньше $2(n - 1)$. Изменяя i от 1 до k , получим $2(n - 1)k$ корней, считая с кратностью. Тригонометрический многочлен степени N имеет не более $2N$ корней — теорема доказана.

Напомним, что система Чебышева порядка $2n - 1$ — это $(2n - 1)$ -мерное пространство функций на окружности, такое, что любая ненулевая функция из этого пространства имеет не более $2(n - 1)$ корней, считая с кратностью. Утверждение теоремы 3 относительно тригонометрических многочленов степени меньше n сохраняет силу для функций из $\mathbb{Z}_n$ -инвариантной системы Чебышева порядка $2n - 1$. Этот результат [2] вытекает из нашей теоремы 2 и следующей леммы из [2]. Поскольку доказательство в [2] довольно длинное, мы приведем здесь простое доказательство.

ЛЕММА 5. Пусть f — элемент $\mathbb{Z}_n$ -инвариантной системы Чебышева порядка $2n - 1$ на окружности. Если среднее значение функции f равно нулю, то усреднение этой функции по $\mathbb{Z}_n$ — нулевая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Среднее значение функции f равно среднему значению функции $\bar{f}$ (и равно нулю). Поэтому $\bar{f}$ имеет корни. Будучи $\mathbb{Z}_n$ -инвариантной функцией, $\bar{f}$ имеет не менее $2n$ корней, считая с кратностью. В то же время $\bar{f}$ принадлежит системе Чебышева порядка $2n - 1$; поэтому $\bar{f} \equiv 0$.

3. Приведем три аналога теоремы 3 для функций многих переменных.

(i) Пусть $P(z_1, \dots, z_k)$ — комплексный многочлен степени $n - 1$ с нулевым свободным членом и $f = \operatorname{Re} P$. Рассмотрим f как функцию на единичной сфере $\mathbb{S}^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$ (со стандартной мерой).

ТЕОРЕМА 6. $m(f) \geq 1/n$.

Действительно, усреднение функции f по группе $\mathbb{Z}_n$, порожденной умножением каждой комплексной координаты на $\exp(2\pi i/n)$, — нулевая функция.

(ii) Пусть $f: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ — тригонометрический многочлен с нулевым свободным членом, степени которого по каждой из переменных равны $n_1 - 1, \dots, n_k - 1$.

ТЕОРЕМА 7. $m(f) \geq 1/(n_1 \cdots n_k)$.

Здесь $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ действует поворотами каждого сомножителя на углы $2\pi/n_1, 2\pi/n_2$ и т.д. и $\bar{f} \equiv 0$.

(iii) Пусть для каждого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ зафиксирован кососимметрический (относительно группы S_k) многочлен $g_I(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ и симметрический (относительно группы S_n) многочлен $h_I(x_1, \dots, x_n)$. Пусть f — ограничение многочлена $\sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} g_I h_I$ на единичную сферу $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 8. $m(f) \geq 1/n!$.

Действительно, усреднение функции f по симметрической группе S_n , действующей в $\mathbb{R}^n$ перестановками координат, — нулевая функция.

Я благодарен В. И. Арнольду за интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnold V. I. Almost Sign-Preserving Trigonometric Polynomials. Preprint, 1996.
2. Бабенко А. Г. Матем. заметки, **35**, вып. 3, 349–356 (1984).