Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин, Граничные условия для интегрируемых цепочек, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 1–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:56:35

Граничные условия для интегрируемых цепочек*

© 1997. В. Э. АДЛЕР, И. Т. ХАБИБУЛЛИН

§1. Введение

Как правило, явные частные решения дифференциального уравнения характеризуются инвариантностью относительно какой-либо подгруппы его симметрий. Роль непрерывных симметрий при построении точных решений общепризнана. Между тем дискретные симметрии не менее важны, а иногда и более удобны. Одним из эффективных методов их использования является аппарат нелинейных цепочек. Отметим работы [1–3], где были выявлены связи между конечномерными замыканиями одевающих цепочек, конечнозонным интегрированием и уравнениями Пенлеве. В связи с этим возникает задача описания интегрируемых граничных условий для цепочек. Эффективный критерий их выделения был предложен и апробирован в [4–7] на таких моделях, как уравнение КдФ, системы типа НУШ и Бюргерса, цепочка Тоды и др. В [4, 7] мы исследовали условия обрыва, согласованные с высшими симметриями. Точнее, граничное условие

$$w_0 = F(x, w_1, \dots, w_m) \quad (1)$$

для цепочки нелинейных уравнений ($j \in \mathbb{Z}$)

$$w_{j,x} = h(x, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}) \quad (2)$$

называется согласованным с высшей симметрией этой цепочки

$$w_{j,t} = f(x, w_{j-k}, \dots, w_{j+k}), \quad (3)$$

если потоки (2) и (3) коммутируют и после наложения связи (1). Граничное условие (1) сводит цепочку (2) к задаче на полуоси. Чтобы получить конечномерную систему, зададим пару граничных условий

$$w_0 = F(x, w_1, \dots, w_m), \quad w_{N+1} = G(x, w_{N-m}, \dots, w_N), \quad (4)$$

причем от второго мы требуем согласованности с симметрией

$$w_{j,t} = g(x, w_{j-l}, \dots, w_{j+l}), \quad (5)$$

быть может, отличной от (3).

Другим примером замыкания цепочки служит периодическое граничное условие $w_j = w_{j+N}$, $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что фактически для обрыва на отрезок $1, \dots, N$ используются только два равенства:

$$w_0 = w_N, \quad w_{N+1} = w_1. \quad (6)$$

* Работа поддержана грантами РФФИ №96-01-00128 и INTAS №93-166.

В настоящей работе мы рассматриваем замыкания вида

$$\begin{aligned} w_0 &= F(x, w_1, \dots, w_m; w_{N-m+1}, \dots, w_N), \\ w_{N+1} &= G(x, w_1, \dots, w_m; w_{N-m+1}, \dots, w_N), \end{aligned} \quad (7)$$

которые, очевидно, охватывают оба случая (4) и (6). Для краткости граничные условия (7) с нетривиальной зависимостью от переменных с противоположного конца отрезка мы называем квазипериодическими, а граничные условия вида (4) — локальными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Граничные условия (7) называются *согласованными с парой симметрий* (3) и (5), если для всех $N \gg 1$ выполняются равенства $D_t(w_0 - F)|_{(7)} = D_t(w_{N+1} - G)|_{(7)} = 0$, где оператор D_t действует на переменные $w_0, \dots, w_m$ в силу уравнения (3), а на переменные $w_{N-m}, \dots, w_{N+1}$ в силу уравнения (5).

Другое определение интегрируемости может заключаться в требовании, чтобы динамические системы, возникающие после наложения граничных условий (7), были интегрируемы, например, по Лиувиллю. Ясно, что если на оба конца цепочки налагать граничные условия, согласованные с одним и тем же набором симметрий, то полученная конечномерная система по крайней мере будет допускать эти симметрии. Если же граничные условия на разных концах согласованы с разными симметриями, то соответствующая система может и не быть интегрируемой, но ряд примеров убеждает, что она будет обладать свойством Пенлеве.

Наряду с исследованием динамики по x определенный интерес представляет и исследование динамики по дискретной переменной j . Ясно, что если w_0, w_1 заданы, то значения всех w_j вычисляются по явным рекуррентным формулам. Возникает вопрос, насколько эффективно это можно сделать. Мы увидим, что иногда сдвиг в цепочке может быть охарактеризован достаточно просто.

В качестве модели мы выбрали цепочку Вольтерра

$$w_{j,x} = w_j(w_{j+1} - w_{j-1}). \quad (8)$$

Ряд результатов об интегрируемых конечномерных редукциях для этой цепочки был получен в работе [8].

Остановимся кратко на содержании работы. В §2 определение согласованности граничного условия с парой симметрий переформулируется на языке ассоциированных систем уравнений в частных производных. Как известно [9], ассоциированные системы для цепочки Вольтерра являются членами иерархии системы Леви [10]. Задача об отыскании граничных условий вида (7) эквивалентна нахождению преобразований Бэклунда (ПБ) для этой иерархии, а отыскание граничных условий вида (4) сводится к нахождению дифференциальных связей, совместных с симметриями нечетного порядка.

В §3 рассматриваются квазипериодические замыкания цепочки Вольтерра. В случае когда симметрии (3) и (5) совпадают, для соответствующих систем можно предъявить представление Лакса. В принципе это позволяет доказать интегрируемость по Лиувиллю, что, однако, выходит за рамки нашей работы. Интегрируемость периодической цепочки Вольтерра хорошо известна. В отличие от обычного периодического замыкания динамика по дискретной переменной в

квазипериодическом случае нетривиальна. Сдвиг в квазипериодически замкнутой цепочке задает некоторое дискретное отображение, которое в интегрируемом случае эквивалентно скачку по лиувиллевому тору, а в неинтегрируемом может претендовать на роль разностного уравнения Пенлеве. Дискретные аналоги уравнений Пенлеве в последнее время активно изучаются, см., например, [11].

Локальные граничные условия подробно обсуждаются в §§ 4, 5. Как известно [8], каждой простой алгебре Ли можно поставить в соответствие обобщенную цепочку Вольтерра. В § 4 показано, что, с точностью до простых точечных замен на концах отрезка, обобщенные цепочки серий B , C , D сводятся к цепочке Вольтерра с локальными граничными условиями весьма частного вида. В § 5 приведена серия примеров, когда локальные граничные условия приводят к уравнению Пенлеве P_3 .

В § 6 обсуждается связь с релятивистской цепочкой Тоды [12]. Оказывается, что рассматриваемые цепочки, переписанные в подходящих переменных, являются ПБ друг для друга, так что сдвиг в одной цепочке приводит к «одеванию» граничного условия для второй. Это позволяет получить ряд новых интегрируемых граничных условий для релятивистской цепочки Тоды. Заметим, что до сих пор изучались только периодическое и вырожденное замыкания этой цепочки [13].

§ 2. Граничные условия для цепочки Вольтерра

При нахождении граничных условий удобно перейти на язык ассоциированных уравнений в частных производных. Рассмотрим, например, первую высшую симметрию цепочки Вольтерра

$$w_{j,t_2} = w_j(w_{j+1}(w_{j+2} + w_{j+1} + w_j) - w_{j-1}(w_{j-2} + w_{j-1} + w_j)). \quad (9)$$

Очевидно, что, выбрав какие-то две соседние переменные $u = w_{j+1}$, $v = w_j$, все остальные w_j можно выразить в силу (8) через эти переменные и их производные по x . При этом симметрия (9) принимает вид системы Леви [10]

$$u_{t_2} = u_{xx} + (u^2 + 2uv)_x, \quad v_{t_2} = -v_{xx} + (v^2 + 2uv)_x. \quad (10)$$

Рассмотрим граничное условие (7) в простейшем случае $m = 2$:

$$w_0 = F(x, w_1, w_2, w_{N-1}, w_N), \quad w_{N+1} = G(x, w_1, w_2, w_{N-1}, w_N), \quad (11)$$

и потребуем, чтобы оно было согласовано с парой симметрий $\partial_{t_2} + 2\mu\partial_x$ и $\partial_{t_2} + 2\tilde{\mu}\partial_x$, где μ , $\tilde{\mu}$ — некоторые постоянные. После введения обозначений $u = w_2$, $v = w_1$, $\tilde{u} = w_N$, $\tilde{v} = w_{N-1}$ и исключения лишних w_j в силу цепочки Вольтерра эти симметрии примут вид

$$u_t = u_{xx} + (u^2 + 2uv + 2\mu u)_x, \quad v_t = -v_{xx} + (v^2 + 2uv + 2\mu v)_x, \quad (12)$$

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + (\tilde{u}^2 + 2\tilde{u}\tilde{v} + 2\tilde{\mu}\tilde{u})_x, \quad \tilde{v}_t = -\tilde{v}_{xx} + (\tilde{v}^2 + 2\tilde{u}\tilde{v} + 2\tilde{\mu}\tilde{v})_x, \quad (13)$$

а формулы (11) превратятся в дифференциальные связи вида

$$\tilde{u}_x = P(x, u, v, \tilde{u}, \tilde{v}), \quad v_x = Q(x, u, v, \tilde{u}, \tilde{v}). \quad (14)$$

Легко показать, что если функция P не зависит от u , v , а Q — от $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, то связи (14) имеют вид $\tilde{u}_x = -\tilde{u}\tilde{v}$, $v_x = uv$ и приводят к вырожденным граничным условиям $w_0 = 0$, $w_{N+1} = 0$.

За исключением этого распавшегося случая, связи (14) можно интерпретировать как ПБ между системами (12) и (13). Перечислить все такие связи можно прямыми, хотя и довольно трудоемкими вычислениями.

ТЕОРЕМА 1. *Преобразования Бэклунда вида (14), связывающие системы (12) и (13), задаются одним из следующих наборов формул:*

$$\tilde{u}_x = \tilde{u}(v - \tilde{v}), \quad v_x = v(u - \tilde{u}), \quad \tilde{\mu} = \mu, \quad (15)$$

$$X_\varepsilon^+ : \quad \tilde{u}_x = uv - \tilde{u}\tilde{v}, \quad v_x = v(u + v - \tilde{u} - \tilde{v} - \varepsilon), \quad \tilde{\mu} = \mu + \varepsilon, \quad (16)$$

$$Y_\varepsilon^+ : \quad \tilde{u}_x = \tilde{u}(u + v - \tilde{u} - \tilde{v} - \varepsilon), \quad v_x = uv - \tilde{u}\tilde{v}, \quad \tilde{\mu} = \mu + \varepsilon, \quad (17)$$

$$Z_\beta^+ : \quad \tilde{u}_x = \tilde{u}(v - \tilde{v}) + A(u - \tilde{u}), \quad v_x = v(u - \tilde{u}) + A(v - \tilde{v}), \quad \tilde{\mu} = \mu, \quad (18)$$

где величина A находится из квадратного уравнения $(A - \tilde{u})(A - v) = \beta A$.

Все дискретные симметрии для системы (12) образуют полугруппу S , порожденную отражением $\tilde{w}_j = -w_{1-j}$ и сдвигом $\tilde{w}_j = w_{j+1}$, т.е. преобразованиями

$$R : \quad \tilde{u} = -v, \quad \tilde{v} = -u, \quad \tilde{\mu} = -\mu, \quad (19)$$

$$V : \quad \tilde{u} = v + u_x/u, \quad \tilde{v} = u, \quad \tilde{\mu} = \mu, \quad (20)$$

преобразованиями Бэклунда (16)–(18) (преобразование (15) совпадает с V^{-2}) и их формальными обратными X_ε^- , Y_ε^- , Z_β^- , которые получаются заменой переменных с тильдой на переменные без тильды. Структуру полугруппы S описывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Перечисленные преобразования удовлетворяют тождествам ($\sigma = \pm$)*

$$R^2 = 1, \quad (RV)^2 = 1, \quad RZ_\beta^\sigma R = Z_{-\beta}^{-\sigma}, \quad RX_\varepsilon^\sigma R = Y_\varepsilon^{-\sigma}, \quad RY_\varepsilon^\sigma R = X_\varepsilon^{-\sigma}, \\ V^2 Z_\beta^\sigma = Z_\beta^\sigma V^2, \quad VY_\varepsilon^\sigma = X_\varepsilon^\sigma V, \quad VX_\varepsilon^\sigma = Y_\varepsilon^\sigma V.$$

Из последней строки видно, что сдвиг V^2 коммутирует с остальными ПБ. Фактически это означает, что эти преобразования, переписанные в переменных w_j , являются ПБ и для самой цепочки Вольтерра. С точностью до сдвига и отражения имеются два различных преобразования.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Следующие формулы задают преобразования Бэклунда для цепочки Вольтерра:*

$$\tilde{w}_{2j} + \tilde{w}_{2j+1} + \varepsilon = w_{2j} + w_{2j+1}, \quad \tilde{w}_{2j+1}\tilde{w}_{2j+2} = w_{2j+1}w_{2j+2}, \quad (21)$$

$$\begin{cases} \tilde{w}_{2j+1}(\tilde{w}_{2j+2} - w_{2j+1}) = A_j(w_{2j+2} - \tilde{w}_{2j+1}), \\ w_{2j+1}(\tilde{w}_{2j+1} - w_{2j}) = A_j(w_{2j+1} - \tilde{w}_{2j}), \\ (A_j - \tilde{w}_{2j+1})(A_j - w_{2j+1}) = \beta A_j. \end{cases} \quad (22)$$

Отметим, что, по-видимому, преобразование (22) является новым.

Пользуясь явной записью ПБ в переменных w_j , нетрудно выписать граничные условия, соответствующие связям (14). Легко убедиться, что формула (15) приводит к обычному периодическому замыканию (6). В случаях (16) и (18) получаем соответственно обрывы

$$w_0 = w_{N-1} + w_N - w_1 + \varepsilon, \quad w_{N+1} = \frac{w_1 w_2}{w_N}, \quad (23)$$

$$w_0 = w_N + A \left(\frac{w_{N-1}}{w_1} - 1 \right), \quad w_{N+1} = w_1 + A \left(\frac{w_2}{w_N} - 1 \right), \quad (24)$$

где $(A - w_N)(A - w_1) = \beta A$.

Рассмотрение высших симметрий в качестве пробных не дает ничего нового, так как вся иерархия интегрируемых уравнений обслуживается одними и теми же ПБ. Другой опытный факт заключается в том, что ПБ высших порядков обычно можно разложить в композицию нескольких элементарных. Поэтому нахождение квазипериодических обрывов вида (7) с $m > 2$ также сводится к решению поставленной задачи.

Граничные условия можно получать, требуя, чтобы решение цепочки Вольterra было инвариантно относительно некоторого элемента полугруппы S . Так, граничные условия (23), (24) есть условия инвариантности относительно преобразования вида $V^{2-N}T$, где T — одно из преобразований (16)–(18). Продолжая этот ряд примеров, можно взять в качестве T преобразование $X_\alpha^- Y_\beta^+$. Нетрудно проверить, что оно приводит к квазипериодическим граничным условиям

$$w_0 = \frac{w_{N-1} w_N}{w_1} + A \frac{w_{N-1}}{w_1} (w_{N-2} + w_{N-1} - w_1 - w_2 - \alpha + \beta),$$

$$w_{N+1} = w_1 + w_2 - w_N + \alpha - \beta + \frac{A}{w_N} (w_2 w_3 - w_{N-1} w_N), \quad (25)$$

где $w_{N-1} A^2 - (w_1 + w_2 - \beta) A + w_N = 0$.

Перейдем к рассмотрению граничных условий на полуоси. После введения обозначений $u = w_1$, $v = w_0$ и исключения переменных $w_1, \dots, w_m$ в силу цепочки Вольterra граничное условие (1) перепишется в виде связи

$$H(x, u, v, \dots, u_{x\dots x}, v_{x\dots x}) = 0. \quad (26)$$

Легко убедиться, что из-за разницы в знаках перед старшими производными сама система (10) и ее симметрии четного порядка не выдерживают связей такого вида; поэтому в качестве пробной мы будем рассматривать неоднородную симметрию третьего порядка

$$u_t = u_{xxx} + (3s^2 u + 3s u_x - 2u^3 + 3\mu(u_x + u^2 + 2uv))_x, \quad s = u + v. \quad (27)$$

$$v_t = v_{xxx} + (3s^2 v - 3s v_x - 2v^3 + 3\mu(-v_x + v^2 + 2uv))_x,$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что интегрируемые связи вида $v = h(u)$ исчерпываются связями $v = 0$ и $u + v + \mu = 0$, эквивалентными

соответственно граничным условиям

$$w_0 = 0, \quad (28)$$

$$w_0 + w_1 + \mu = 0. \quad (29)$$

Если принять, что $u_j = w_{2j+1}$, $v_j = w_{2j}$, то решение цепочки Вольтерра с граничным условием (29) характеризуется инвариантностью относительно преобразования $RX_{-2\mu}^+ V$.

Дифференциальные связи высших порядков также можно найти непосредственно по определению, но вычислительные трудности быстро нарастают. Более эффективный способ заключается в использовании автопреобразований из полугруппы S . Дифференцирование (14) дает выражения для u и производных u и v по x произвольного порядка через $\hat{H}$ и производные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. Подставляя их в связь (26), получим соотношение вида $\hat{H}(x, v, \tilde{u}, \tilde{v}, \dots, \tilde{u}_{x\dots x}, \tilde{v}_{x\dots x}) = 0$. Исключая v из равенств $\hat{H} = 0$ и $D_x(\hat{H}) = 0$, получаем на переменные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ дифференциальную связь $\tilde{H}(x, \tilde{u}, \tilde{v}, \dots, \tilde{u}_{x\dots x}, \tilde{v}_{x\dots x}) = 0$. Поскольку в силу определения ПБ новые переменные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ также удовлетворяют системе (27), то и найденная связь оказывается совместной с этой системой. Описанную процедуру естественно назвать одеванием связи (26).

Можно проверить, что одевание связи $u + v + \mu = 0$ *любым* из ПБ (16)–(18) и переписывание ее в переменных w_j приводят к граничному условию

$$w_1 w_2 (w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + 2\nu)^2 = \mu^2 (w_0 + w_1 + \nu) (w_2 + w_3 + \nu). \quad (30)$$

В частности, при $\mu = 0$ получаем граничное условие

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + 2\nu = 0, \quad (31)$$

определяющее решение, инвариантное относительно преобразования $RX_{-2\nu}^+ V^3$. Дальнейшее одевание граничного условия (30) приводит к слишком сложным формулам. В частном случае (31) ответ имеет вид

$$\begin{aligned} & (w_0 + w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4 + w_5 + 4\kappa)(w_1 w_2 (w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + 2\kappa) \\ & \quad + w_3 w_4 (w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + 2\kappa)) \\ & = (\nu^2 - (w_2 + w_3 + \kappa)^2)(w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + 2\kappa)(w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + 2\kappa). \end{aligned}$$

§3. Квазипериодические замыкания цепочки Вольтерра

В этом параграфе мы выведем представления Лакса для цепочки Вольтерра с квазипериодическими граничными условиями (23), (24). Рассмотрим линейные задачи $\Psi_{j,x} = U_j \Psi_j$, $\Psi_{j,t} = V_j \Psi_j$, $\Psi_{j+1} = W_j \Psi_j$, где матрицы U , V , W зависят от полевых переменных и спектрального параметра λ . Условие их совместности дает представления нулевой кривизны

$$U_{j,t} = V_{j,x} + [V_j, U_j], \quad W_{j,x} = U_{j+1} W_j - W_j U_j, \quad W_{j,t} = V_{j+1} W_j - W_j V_j \quad (32)$$

для некоторого уравнения в частных производных и его ПБ. Нас интересует ситуация, когда рассматриваемое уравнение допускает по крайней мере еще

одно ПБ. Пусть ему соответствует линейная задача $\tilde{\Psi}_j = B_j \Psi_j$; тогда условия совместности с предыдущими задачами имеют вид

$$B_{j,x} = \tilde{U}_j B_j - B_j U_j, \quad B_{j,t} = \tilde{V}_j B_j - B_j V_j, \quad B_{j+1} W_j = \tilde{W}_j B_j.$$

Последнее равенство выражает коммутативность двух ПБ.

Рассмотрим теперь квазипериодическое замыкание, соответствующее, на языке Ψ -функций, условию

$$\Psi_{j+K} = \tilde{\Psi}_j C(\lambda), \quad (33)$$

где C — нормировочная матрица. Из этого условия следует $U_{j+K} = \tilde{U}_j$, причем для получающейся конечномерной динамической системы из уравнения (32) имеем представление Лакса

$$\widehat{W}_{j,x} = [U_j, \widehat{W}_j], \quad \widehat{W}_j = \tilde{W}_{j+K-1} \cdots \tilde{W}_j B_j = B_{j+K} W_{j+K-1} \cdots W_j. \quad (34)$$

Величина $\tau(\lambda) = \text{tr } \widehat{W}_j$ служит производящей функцией для первых интегралов системы (34), которая оказывается интегрируемой по Лиувиллю и определяет конечнозонные решения уравнения (32) (ср. с [2]).

Рассмотренное замыкание можно обобщить, взяв вместо (33) условие

$$\Psi_{j+K}(\lambda + \varepsilon) = \tilde{\Psi}_j(\lambda) C(\lambda). \quad (35)$$

При $\varepsilon \neq 0$ соответствующие системы перестают быть интегрируемыми по Лиувиллю, но, как показывает ряд примеров, сводятся к уравнениям Пенлеве или их высшим аналогам [2, 3]. Представление Лакса (34) переходит в соотношение $\widehat{W}_{j,x} = (U_j(\lambda + \varepsilon) - U_j(\lambda)) \widehat{W}_j + [U_j, \widehat{W}_j]$.

Рассмотрим общую схему на конкретном примере. Представление нулевой кривизны для системы (12) задается матрицами

$$U = \begin{pmatrix} s - \lambda & -v \\ u & \lambda - s \end{pmatrix}, \quad V = 2(\lambda + s)U + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u - v & 2v \\ 2u & v - u \end{pmatrix}_x,$$

где $2s = u + v + \mu$. Сама цепочка Вольтерра (8) допускает представление (32) с матрицей U_j , полученной из матрицы U заменой переменных u, v на u_j, v_j (параметр μ не зависит от j), и матрицей W_j , равной

$$W_j = (u_j v_{j+1})^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & -v_{j+1} \\ u_j & 2\lambda - \mu - u_j - v_{j+1} \end{pmatrix}.$$

ПБ (16) и (18) задаются соответственно матрицами B вида

$$v^{-1/2} \begin{pmatrix} 2\lambda - \tilde{\mu} - \tilde{u} & v \\ -\tilde{u} & v \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^{-1/2} \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu - \tilde{u} - v + A & v \\ -\tilde{u} & A \end{pmatrix}.$$

Формула (34) с этими матрицами и задает представление Лакса для квазипериодически замкнутых цепочек Вольтерра.

В качестве примера замыканий вида (35) рассмотрим более подробно случай граничных условий (23). Из коммутативности преобразований X_ε^+ и V^2 следует, что при сдвиге индексов на 2 граничные условия повторяются, в чем

легко убедиться и непосредственно, путем дифференцирования формул (23). Таким образом, преобразование сдвига V^2 в данном случае эквивалентно отображению $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, которое переводит вектор $(w_{2j+1}, \dots, w_{2j+N})$ в вектор $(w_{2j+3}, \dots, w_{2j+N+2})$ по формулам

$$w_{2j+N+1} = \frac{w_{2j+1}w_{2j+2}}{w_{2j+N}}, \quad w_{2j+N+2} = w_{2j+2} + w_{2j+3} - w_{2j+N+1} - \varepsilon. \quad (36)$$

Это отображение определяет дискретную часть динамики цепочки Вольтерра с обрывом (23). Непрерывная часть определяется системой

$$\begin{aligned} w_{2j+1,x} &= w_{2j+1}(w_{2j+1} + w_{2j+2} - w_{2j+N-1} - w_{2j+N} - \varepsilon), \\ w_{k,x} &= w_k(w_{k+1} - w_{k-1}), \quad 2j+1 < k < 2j+N, \\ w_{2j+N,x} &= w_{2j+1}w_{2j+2} - w_{2j+N-1}w_{2j+N}, \end{aligned} \quad (37)$$

для которой отображение T можно интерпретировать как ПБ. Рассмотрим величины

$$z_j^2 = w_{2j+1} \cdots w_{2j+N-1}, \quad s_{j+1} = w_{2j+2} + \cdots + w_{2j+N}. \quad (38)$$

Легко показать, что $z_j = z$, $z_x = -\varepsilon z/2$, $s_j = s - \varepsilon j$, $s_x = 0$. Используя эти первые интегралы, размерность отображения (36) и системы (37) можно понизить до $N-2$. Кроме того, при нечетном $N = 2M+1$ размерность системы (37) понижается еще на 1 за счет введения переменных $f_j = w_{2j+1}w_{2j+2}$, $g_j = w_{2j+2} + w_{2j+3}$, в которых она принимает вид

$$\begin{aligned} f_{j,x} &= f_j(g_j - g_{j+M-1} - \varepsilon), \quad f_{k+1,x} = f_{k+1}(g_{k+1} - g_k), \\ g_{j+M-1,x} &= f_j - f_{j+M-1}, \quad g_{k,x} = f_{k+1} - f_k, \end{aligned} \quad k = j, \dots, j+M-2. \quad (39)$$

Редукция отображения (36) тривиальна: $f_{j+M} = f_j$, $g_{j+M} = g_j - \varepsilon$, т.е. при нечетном N отображение T по существу одномерно.

ПРИМЕР 1. В первом нетривиальном случае $N = 3$ система (37) сводится к уравнению Риккати $w_{2j+1,x} = w_{2j+1}^2 - s_j w_{2j+1} + z^2$, а отображение (36) — к соотношению $w_{2j+1} = s_j - z^2/w_{2j-1}$. Полагая, без потери общности, $\varepsilon = 2$ и сделав замену $w_{2j+1}(x) = z\psi_{j,z}(z)/\psi_j(z) + s_j/2$, получаем уравнение Бесселя $\psi_{j,zz} + \psi_{j,z}/z + (1 - s_j^2/4z^2)\psi_j = 0$ и известную рекуррентную формулу $\psi_{j+1} = \psi_{j,z} + s_j\psi_j/2z$.

ПРИМЕР 2. При $N = 4$ на w_{2j+1} , w_{2j+2} имеем систему

$$w_{2j+1,x} = w_{2j+1}(w_{2j+1} + 2w_{2j+2} - s_j), \quad w_{2j+2,x} = \frac{z^2}{w_{2j+1}} - w_{2j+1}w_{2j+2}.$$

Делая замену $w_{2j+1}(x) = zy_j(z)$ и исключая w_{2j+2} , получаем, что y_j удовлетворяет третьему уравнению Пенлеве

$$y_{zz} = \frac{y_z^2}{y} - \frac{y_z}{z} + \frac{1}{z}(Ay^2 + B) + Cy^3 + \frac{D}{y} \quad (40)$$

со значениями параметров $A = -4s_j\varepsilon^{-2}$, $B = 8\varepsilon^{-2}$, $C = 4\varepsilon^{-2}$, $D = 0$. При этом сдвиг (36) эквивалентен преобразованию Шлезингера, а его итерация —

принципу нелинейной суперпозиции (дискретная версия P_3) [11, 14]

$$y_{j+1} = -\frac{4}{\varepsilon z y_{j,z} + 2z y_j^2 + (\varepsilon - 2s_j) y_j}, \quad \frac{1}{y_{j-1}} + z y_j^2 - s_j y_j + \frac{1}{y_{j+1}} = 0.$$

ПРИМЕР 3. При $N = 5$ система (39) имеет вид

$$\begin{aligned} f_{j,x} &= f_j(g_j - g_{j+1} - \varepsilon), & g_{j,x} &= f_{j+1} - f_j, \\ f_{j+1,x} &= f_{j+1}(g_{j+1} - g_j), & g_{j+1,x} &= f_j - f_{j+1}. \end{aligned}$$

Понижая порядок при помощи соотношений $f_j f_{j+1} = z^2$, $g_j + g_{j+1} = s_{j+1}$ и делая замену $f_j(x) = z y_j(z)$, получаем, что y_j удовлетворяет уравнению (40) с параметрами $-A = B = 8\varepsilon^{-2}$, $C = D = 0$. Очевидно, что при этом сдвиг V^2 сводится к инволюции $y_{j+1} = 1/y_j$.

§4. Обобщенные цепочки Вольтерра

О. И. Богоявленским была предложена конструкция, ставящая в соответствие произвольной простой алгебре Ли так называемую обобщенную цепочку Вольтерра — конечномерную интегрируемую гамильтонову систему уравнений, по структуре очень близкую к цепочке (8). Цель настоящего раздела — показать на примерах алгебр Ли серий B , C , D , как обобщенные цепочки Вольтерра могут быть получены в результате замыкания бесконечной цепочки посредством граничных условий, совместимых с высшими симметриями. Алгебре Ли серии A_{N-1} соответствует цепочка Вольтерра с периодическими граничными условиями (6). Исключительные алгебры Ли мы оставляем без рассмотрения. Отметим, что для наших целей достаточно использовать локальные граничные условия (28)–(30) с нулевыми значениями параметров.

Следуя [8], сопоставим алгебре Ли типа B_{n+1} , $n > 1$, систему

$$\begin{aligned} u_{0,x} &= u_0(2u_2 - u_1 + u_0), & u_{1,x} &= u_1(2u_2 - u_0 + u_1), \\ u_{2,x} &= u_2(2u_3 - u_1 - u_0), & u_{n,x} &= -2u_n u_{n-1}. \end{aligned}$$

Для краткости во всех системах мы приводим только те уравнения, которые отличаются от $u_{k,x} = 2u_k(u_{k+1} - u_{k-1})$. Полагая $w_0 = -(u_1 - u_0)^2/w_1$, $w_1 = u_1 + u_0$, $w_k = 2u_k$, $k > 1$, приходим к цепочке Вольтерра с граничным условием вида (30) на левом конце и вырожденным граничным условием (28) на правом: $w_{-1} + w_0 + w_1 + w_2 = 0$, $w_{n+1} = 0$.

Алгебре Ли C_{n+1} , $n > 0$, соответствует обобщенная цепочка Вольтерра

$$\begin{aligned} u_{0,x} &= u_0(2u_1 + u_0), & u_{1,x} &= u_1(2u_2 - u_0), \\ u_{n-1,x} &= u_{n-1}(u_n - 2u_{n-2}), & u_{n,x} &= -u_n(u_n + 2u_{n-1}). \end{aligned}$$

Полагая здесь $u_0 = w_0$, $u_n = w_n$, $2u_k = w_k$, $0 < k < n$, получаем цепочку с граничными условиями вида (29): $w_{-1} + w_0 = w_{n+1} + w_n = 0$.

Система, отвечающая алгебре Ли D_{n+1} , $n > 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} u_{0,x} &= u_0(2u_2 - u_1 + u_0), & u_{1,x} &= u_1(2u_2 - u_0 + u_1), \\ u_{2,x} &= u_2(2u_3 - u_0 - u_1), & u_{n-2,x} &= u_{n-2}(u_{n-1} + u_n - 2u_{n-3}), \\ u_{n-1,x} &= u_{n-1}(u_n - u_{n-1} - 2u_{n-2}), & u_{n,x} &= u_n(u_{n-1} - u_n - 2u_{n-2}). \end{aligned}$$

В результате замены переменных

$$\begin{aligned} w_0 &= -(u_1 - u_0)^2/w_1, & w_1 &= u_1 + u_0, & w_{n-1} &= u_{n-1} + u_n, \\ w_n &= -(u_{n-1} - u_n)^2/w_{n-1}, & w_k &= 2u_k, & 1 < k < n-1, \end{aligned}$$

получаем цепочку Вольтерра, оборванную граничными условиями

$$w_{-1} + w_0 + w_1 + w_2 = 0, \quad w_{n+1} + w_n + w_{n-1} + w_{n-2} = 0$$

вида (30) на обоих концах.

§5. Локальные граничные условия и уравнения Пенлеве

Примеры, рассмотренные в предыдущем разделе, относятся к числу систем, интегрируемых по Лиувиллю. В этом разделе мы рассмотрим их обобщения, соответствующие локальным граничным условиям с различными параметрами на левом и правом концах цепочки и относящиеся к системам типа Пенлеве. Динамика по дискретной переменной, в отличие от квазипериодического случая, не так очевидна, но, как мы увидим из следующего примера, устроена довольно просто.

Рассмотрим цепочку Вольтерра с граничными условиями вида (29)

$$w_0 + w_1 + \mu = 0, \quad w_M + w_{M+1} + \nu = 0, \quad \delta = \nu - \mu \neq 0. \quad (41)$$

В качестве легкого упражнения мы оставляем проверку того, что при $M = 2$ получающаяся при таком замыкании динамическая система

$$\begin{aligned} w_{1,x} &= w_1(w_2 + w_1 + \mu), \\ w_{j,x} &= w_j(w_{j+1} - w_{j-1}), \quad j = 2, \dots, M-1, \\ w_{M,x} &= -w_M(w_{M-1} + w_M + \nu) \end{aligned} \quad (42)$$

решается в функциях Бесселя, а при $M = 3, 4$ сводится к уравнению P_3 . Что касается динамики по дискретной переменной, то оказывается, что ответ существенно зависит от четности M . При четном M легко показать, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} w_{2j+2M} + w_{2j+2M+1} - w_{2j} - w_{2j+1} + 2\delta &= 0, \\ w_{2j+2M+1}w_{2j+2M+2} &= w_{2j+1}w_{2j+2}. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае сдвиг в цепочке Вольтерра задается уже знаковыми нам формулами (36) при нечетном $N = 2M + 1$ и $\varepsilon = 2\delta$. Иначе говоря, система (42) является редукцией системы (37) при дополнительном предположении $w_{jM} + w_{jM+1} + \mu + j\delta = 0$. Например, как мы видели в §3, при $N = 5$

система (37) сводится к уравнению P_3 . Таким образом, установленное соответствие позволяет строить частные решения уравнения P_3 , выражающиеся через функции Бесселя.

При нечетном $M = 2K + 1$ можно аналогично показать, что граничные условия (41) являются редукцией квазипериодических граничных условий (25). Преобразование сдвига $(w_{2j}, \dots, w_{2j+2M-1}) \mapsto (w_{2j+2}, \dots, w_{2j+2M+1})$, как нетрудно доказать, задается соотношениями

$$\begin{aligned} w_{2j} + w_{2j+1} + \dots + w_{2j+2M} + \frac{z^2}{w_{2j+1}w_{2j+2} \dots w_{2j+2M-1}} + \alpha_j &= 0, \\ w_{2j+1}w_{2j+2} \dots w_{2j+2M+1} &= z^2(w_{2j+2} + w_{2j+3} + \dots + w_{2j+2M} + \beta_j), \end{aligned} \quad (43)$$

где $z = w_1 \dots w_M$, $z_x = -\delta z$, $\alpha_j = (K + 2)\mu + (2j + M)\delta$, $\beta_j = K\mu + (2j + M)\delta$. Размерность пространства, в котором действует это отображение, ровно в 2 раза больше размерности системы (42). Возникает вопрос, согласованы ли формулы (43) с цепочкой Вольтерра сами по себе, без учета граничных условий (41), из которых мы их вывели. Следующее предложение доказывается непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Производная связей (43), где $\alpha_j = \alpha + 2\delta j$, $\beta_j = \beta + 2\delta j$, $z = \gamma e^{-\delta x}$, α , β , γ , δ — произвольные константы, в силу цепочки Вольтерра тождественно равна 0 в силу этих связей.*

Таким образом, формулы (43) можно рассматривать как самостоятельные граничные условия для цепочки Вольтерра, а граничные условия (41) являются их интегрируемой редукцией.

ПРИМЕР 4. В простейшем случае $M = 1$ формулы (43) имеют вид

$$\begin{aligned} w_{2j} + w_{2j+1} + w_{2j+2} + \frac{z^2}{w_{2j+1}} + \alpha_j &= 0, \\ w_{2j+1}w_{2j+2}w_{2j+3} &= z^2(w_{2j+2} + \beta_j) \end{aligned} \quad (44)$$

и сводят цепочку Вольтерра к системе

$$\begin{aligned} w_{2j+1,x} &= w_{2j+1}(2w_{2j+2} + w_{2j+1} + \alpha_j) + z^2, \\ w_{2j+2,x} &= \frac{z^2}{w_{2j+1}}(w_{2j+2} + \beta_j) - w_{2j+1}w_{2j+2}. \end{aligned}$$

Исключая w_{2j+2} и делая замену $w_{2j+1} = zy_j(z)$, получаем, что y_j удовлетворяет уравнению P_3 (40) со значениями параметров

$$A = \alpha_j \delta^{-2}, \quad B = (2\beta_j - \alpha_{j+1}) \delta^{-2}, \quad C = -D = \delta^{-2}.$$

При этом отображение сдвига на 2 приводит к преобразованию Шлезингера для этого уравнения

$$y_{j+1} = \frac{1}{y_j} - \frac{2\beta_j}{z(\delta y_{j,z} + y_j^2 + 1) + (\alpha_j + \delta)y_j}.$$

Исключая из (44) переменные с четными номерами, приходим к формуле нелинейной суперпозиции (дискретное уравнение P_2 [11])

$$\frac{\beta_{j-1}}{y_{j-1}y_j - 1} + z\left(y_j + \frac{1}{y_j}\right) + \frac{\beta_j}{y_jy_{j+1} - 1} + \alpha_j = 0.$$

Что касается редукции (42), то она при $M = 1$ сводится к равенству $w_1 = z$ или, в новых обозначениях, $y_0 = 1$. Используя преобразования Шлезингера, можно, стартуя с этого решения, построить последовательность рациональных решений уравнения P_3 .

Следует подчеркнуть, что граничные условия (43) относятся к типу редукций цепочки Вольтерра, принципиально отличающемуся от тех, которые мы изучали прежде. Действительно, соотношения (43) связывают все переменные на отрезке длины $2M + 2$, а в нашем определении интегрируемых граничных условий существенную роль играет то обстоятельство, что соотношения (7) связывают лишь несколько переменных с каждого конца цепочки, тогда как длина самой цепочки может быть сколь угодно большой. Это позволяет рассматривать переменные на разных концах цепочки как независимые динамические переменные. Обобщение симметричного подхода для классификации обрывов типа (43) остается пока открытой задачей. В качестве еще одного примера таких граничных условий приведем соотношение

$$(w_{j-1} + w_j + w_{j+1})w_j + \varepsilon x w_j = \gamma_j, \quad \gamma_{2j} = \alpha - j\varepsilon, \quad \gamma_{2j+1} = \beta - j\varepsilon,$$

найденное в [15], где показано, что соответствующая редукция цепочки Вольтерра сводится к четвертому уравнению Пенлеве.

В заключение этого раздела рассмотрим несколько примеров с использованием локальных граничных условий, причем исследование динамики по дискретной переменной мы опускаем.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим граничные условия вида (31)

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + 2\mu = 0, \quad w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + 2\nu = 0, \quad \nu - \mu = \delta \neq 0. \quad (45)$$

Полученная система 3-го порядка

$$\begin{aligned} w_{1,x} &= w_1(w_3 + 2w_2 + w_1 + 2\mu), & w_{2,x} &= w_2(w_3 - w_1), \\ w_{3,x} &= -w_3(w_3 + 2w_2 + w_1 + 2\nu) \end{aligned}$$

обладает первым интегралом $w_1 w_3 = z^2$, $z_x = -\delta z$. После исключения переменных w_2 , w_3 и замены $w_1(x) = zy(z)$ она сводится к (40) со значениями параметров $A = -2\mu\delta^{-2}$, $B = -2\nu\delta^{-2}$, $C = -D = \delta^{-2}$.

ПРИМЕР 6. Сместим второе из граничных условий (45) вправо, так что получится система

$$\begin{aligned} w_{1,x} &= w_1(w_3 + 2w_2 + w_1 + 2\mu), & w_{2,x} &= w_2(w_3 - w_1), \\ w_{3,x} &= w_3(w_4 - w_2), & w_{4,x} &= -w_4(w_4 + 2w_3 + w_2 + 2\nu). \end{aligned}$$

Введение переменных $p = w_1 w_2$, $q = w_3 w_4$, $r = w_2 + w_3$ дает систему $p_x = 2p(r + \mu)$, $q_x = -2q(r + \nu)$, $r_x = q - p$. Понижая порядок при помощи первого

интеграла $pq = z^2$, $z_x = -\delta z$ и делая замену $p(x) = zu(z)$, снова получаем уравнение P_3 с параметрами $B = -A = 2\delta^{-2}$, $C = D = 0$.

Можно показать, что граничные условия (30) общего вида также приводят к уравнению P_3 , хотя используемые при этом замены достаточно громоздки.

§6. Релятивистская цепочка Тоды

До сих пор ПБ для системы (10), найденные в §2, были в нашем изложении неравноправны. Одно из них, а именно сдвиг (20) в цепочке Вольтерра, было выделено и являлось основным объектом изучения, в то время как остальные играли вспомогательную роль при построении граничных условий для этой цепочки. Ясно, что точно так же мы можем выделить любое другое ПБ и рассмотреть цепочку, порожденную его итерациями. При этом уже преобразование (20) становится вспомогательным. Анализ всего многообразия получающихся при таком подходе интегрируемых систем превосходит наши возможности, и поэтому мы ограничимся одним достаточно содержательным примером. Рассмотрим цепочку, порожденную ПБ X_ε^- при $\varepsilon = 0$, т. е.

$$u_{j,x} = u_{j+1}v_{j+1} - u_jv_j, \quad v_{j+1,x} = v_{j+1}(u_{j+1} + v_{j+1} - u_j - v_j). \quad (46)$$

Подстановка $u_j = -q_{j,x}$, $v_j = -q_{j-1,x}\Phi(q_{j-1} - q_j)$, $\Phi(t) = g^2e^t/(1 + g^2e^t)$ связывает ее с релятивистской цепочкой Тоды

$$q_{j,xx} = q_{j,x}(q_{j-1,x}\Phi(q_{j-1} - q_j) - q_{j+1,x}\Phi(q_j - q_{j+1})), \quad (47)$$

введенной в [12]. Запись этой цепочки в переменных u , v эквивалентна найденной в работе [13] (там использовались переменные $c_j = -v_{j+1}$, $d_j = v_{j+1} - u_j$). До сих пор в литературе изучались только вырожденный ($q_0 = 0$, $q_{N+1} = 0$) и периодический ($q_{j+N} = q_j$) обрывы цепочки (47).

Простейшим примером локального граничного условия является связь $u_0 + v_0 + \mu = 0$, которая в переменных q_j имеет вид $q_{-1,x}\Phi(q_{-1} - q_0) = \mu - q_{0,x}$.

В качестве примера квазипериодического замыкания рассмотрим соотношения $u_{j+N-1} = \tilde{u}_j$, $v_{j+N-1} = \tilde{v}_j$, где тильда обозначает действие ПБ (15), т. е. сдвига V^{-2} в цепочке Вольтерра. Исключая производные в силу формул (46), получаем граничные условия

$$u_{j+N}v_{j+N} = u_{j+N-1}v_j, \quad u_j + v_j = v_{j+1} + u_{j+N},$$

замыкающие систему (46) на отрезок $1 \leq j \leq N$. Для этой системы нетрудно построить представление Лакса вида (34), только теперь матрица $\widehat{W}_j$ будет произведением $N-1$ матриц B и одной матрицы W . В переменных q_j найденные граничные условия имеют вид

$$q_{j+N+1,x}\Phi(q_{j+N} - q_{j+N+1}) = q_{j,x}\Phi(q_j - q_{j+1}), \\ q_{j-1,x}\Phi(q_{j-1} - q_j) = q_{j+N,x} - q_{j,x} + q_{j,x}\Phi(q_j - q_{j+1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Склянин Е. К.* Граничные условия для интегрируемых систем. Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 2, 86–87 (1987).
2. *Веселов А. П., Шабат А. Б.* Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера. Функц. анализ и его прил., **27**, вып. 2, 1–21 (1993).
3. *Adler V. E.* Nonlinear chains and Painlevé equations. Phys. D, **73**, 335–351 (1994).
4. *Habibullin I. T.* Symmetries of boundary problems. Phys. Lett. A, **178**, 369–375 (1993).
5. *Gürel B., Gürses M., Habibullin I. T.* Boundary conditions, compatible with the symmetry algebra. J. Math. Phys., **36**, No. 12, 6809–6821 (1995).
6. *Habibullin I. T., Svinolupov S. I.* Integrable boundary value problems for the multicomponent Schrödinger equation. Phys. D, **87**, 101–106 (1995).
7. *Adler V. E., Habibullin I. T.* Integrable boundary conditions for the Toda lattice. J. Phys. A, **28**, 6717–6729 (1995).
8. *Боголюбенский О. И.* Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. Наука, М. (1991).
9. *Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Симметрии нелинейных цепочек. Алгебра и анализ, **2**, вып. 2, 183 (1990).
10. *Levi D.* Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations. J. Phys. A, **14**, No. 5, 1083–1098 (1981).
11. *Nijhoff F., Satsuma J., Kajiware K., Grammaticos B., Ramani A.* A study of the alternate discrete Painlevé II equation. Inverse Problems, **12**, 697–716 (1996).
12. *Ruijsenaars S. N. M.* Relativistic Toda system. Preprint Stichting Centre for Mathematics and computer Sciences, Amsterdam, 1986.
13. *Bruschi M., Ragnisco O.* The periodic relativistic Toda lattice: direct and inverse problem. Inverse Problems, **5**, 389–405 (1989).
14. *Громак В. И., Лукашевич Н. А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Университетское, Минск, 1992.
15. *Итс А. Р., Китаев А. В., Фокас А. С.* Изомонодромный подход в теории двумерной квантовой гравитации. УМН, **45**, вып. 6, 135–136 (1987).

Институт математики Уфимского
научного центра РАН

Поступило в редакцию
20 февраля 1996 г.