Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Шмелев, Функциональные модули ростков
римановых метрик, *Функц. анализ и его прил.*,
1997, том 31, выпуск 2, 58–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:20:19

УДК 515.164.15

Функциональные модули ростков римановых метрик^{*}

© 1997. А. С. ШМЕЛЕВ

Введение

В работе рассматривается пространство F струй римановых метрик в точке 0 , на котором естественным образом (заменами координат) действует группа $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ формальных диффеоморфизмов, сохраняющих точку 0 . Пространство орбит этого действия называется пространством модулей струй римановых метрик. Если зафиксировать некоторые локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ в окрестности рассматриваемой точки, то струя римановой метрики будет задана симметричной матрицей $G = (g_{ij})$, где $g_{ij}(x)$ — формальные степенные ряды, а действие группы $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ на F будет состоять в преобразовании матрицы G как матрицы симметрической формы при замене локальных координат:

$$G \mapsto J(\varphi)^T G J(\varphi), \quad G \in F, \quad \varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0),$$

где $J(\varphi)$ — якобиан формального диффеоморфизма φ .

Оказывается, что в любой размерности можно предъявить нормальную форму струи римановой метрики. Структура такой нормальной формы описывается следующей основной теоремой.

ТЕОРЕМА. *Струю римановой метрики можно привести формальным диффеоморфизмом к виду, в котором метрические коэффициенты представляются в виде конечной суммы:*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \sum p_{ij}^I(x) \varphi_{ij}^I(x),$$

где сумма берется по всем подмножествам $I \subset \{1, \dots, n\}$, не содержащимся ни в одном из взаимно дополнительных подмножеств $I_{ij} = \{i, \dots, j-1\}$ и $\{1, \dots, n\} \setminus I_{ij}$, функция $\varphi_{ij}^I(x)$ представляет собой формальный степенной ряд по переменным x_i , где $i \in I$, а моном $p_{ij}^I(x)$ имеет вид

$$p_{ij}^I(x) = \prod_{k \in I} x_k.$$

Функции $\varphi_{ij}^I(x)$ называются функциональными модулями струй римановых метрик. В частности, имеется лишь конечное число функциональных модулей. Разумеется, как число функциональных модулей, так и их вид (от какого числа

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №96-01-01104, а также INTAS, грант №4373.

каких переменных они зависят) зависит от способа приведения к нормальной форме.

Вопрос о конечности числа функциональных модулей естественных дифференциально-геометрических структур был поставлен В. И. Арнольдом в [1]. Если рассматривать пространство k -струй римановых метрик, на котором естественно действует группа $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$, то пространство орбит такого действия конечномерно. Обозначим его размерность через a_k и составим ряд Пуанкаре

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) t^k.$$

В работе [1] был поставлен следующий вопрос. Верно ли, что для естественных дифференциально-геометрических структур ряд Пуанкаре является рациональной функцией? Еще в работах классиков, таких, как Трессе [2], изучались вопросы о конечной порожденности алгебр дифференциальных инвариантов геометрических структур. Конечная порожденность алгебры дифференциальных инвариантов влечет за собой рациональность ряда Пуанкаре. В [3] были явно вычислены ряды Пуанкаре в случае римановых, келеровых и гиперкелеровых структур, и оказалось, что во всех трех случаях они рациональны. Следующее представление ряда Пуанкаре является следствием предъявленной выше нормальной формы струи римановой метрики.

ТЕОРЕМА. *Ряд Пуанкаре пространства модулей струй римановых метрик в $\mathbb{R}^n$ имеет вид*

$$p(t) = t^2 q(t) + \sum_{r=2}^n \frac{a_r t^r}{(1-t)^r},$$

где $q(t)$ — некоторый полином с неположительными коэффициентами,

$$a_r = \frac{n(n-1)}{2} \binom{n}{r} - n \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r}, \quad r = 2, \dots, n.$$

Автор благодарен В. И. Арнольду за внимание к работе, а также А. М. Лукацкому и А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

§1. Функциональные модули в пространстве струй римановых метрик

Пусть F — пространство струй, а F^k — пространство k -струй римановых метрик в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Имеют место следующие естественные проекции

$$F^0 \xleftarrow{\pi_1} F^1 \xleftarrow{\pi_2} F^2 \xleftarrow{\pi_3} F^3 \xleftarrow{\quad} \dots,$$

сопоставляющие k -струе ее $(k-1)$ -струю.

На пространствах F и F^k действует заменами координат группа $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$, коммутируя с проекциями π_k . Если $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$, то

$$G \xrightarrow{\varphi^*} J(\varphi)^T G J(\varphi), \quad G \in F, \quad j^k G \xrightarrow{\varphi^*} j^k(J(\varphi)^T G J(\varphi)), \quad j^k G \in F^k,$$

где $J(\varphi)$ — матрица Якоби диффеоморфизма φ .

Пусть F_1 — касательное пространство к орбите единичной матрицы E (евклидовой метрики) в точке E . Обозначим через M_G орбиту элемента G . Всякая трансверсаль T к F_1 в пространстве $T_E F$ симметричных функциональных матриц (не обязательно невырожденных) трансверсально пересекается со всеми орбитами группы $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ на F , достаточно близкими к орбите единичной матрицы.

ЛЕММА 1.1. *Если трансверсаль T такова, что $T_E F = F_1 \oplus T$, т. е. $T \cap F_1 = \{0\}$, то T пересекается со всеми достаточно близкими к M_E орбитами по конечномерному многообразию размерности $\leq n(n-1)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересечение $M_E \cap T = \{E\}$ — нульмерное многообразие. Стабилизатор элемента E есть $O(n) \subset \text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$, стабилизатор струи общего положения — это единичная подгруппа $\{\text{id}\}$, а стабилизатор струи, не являющейся струей общего положения, — подгруппа Ли в $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ размерности, не превосходящей $n(n-1)/2$ [4]. Следовательно, касательное пространство $T_G M_G$ в точке $G \in T \cap M_G$, изоморфное факторпространству пространства $T_{\text{id}} \text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ векторных полей по конечномерному касательному подпространству к стабилизатору элемента G , представляется в виде прямой суммы пространства, трансверсального к T , и конечномерного подпространства в $T_G T$, имеющего размерность, не превосходящую $n(n-1)/2$. $\square$

Ниже будет доказано (теорема 1.5), что трансверсаль T можно выбрать таким образом, что для любого $G \in T$ существует набор функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, каждая из которых зависит от некоторого подмножества множества переменных $x_1, \dots, x_n$, а элементами матрицы G являются конечные суммы этих функций, умноженных на некоторые фиксированные мономы. И наоборот, любому набору таких функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ соответствует элемент $G \in T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ называются функциональными модулями струй римановых метрик, а $G = G(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in T$ называется нормальной формой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Выбор такой трансверсали T , вообще говоря, неоднозначен. При другом выборе трансверсали T получится другая нормальная форма с другим набором функциональных модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Нормальная форма, соответствующая трансверсали T , представляет струи римановой метрики не однозначно, а лишь с точностью до некоторого конечномерного многообразия, т. е. каждой $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ -орбите соответствует конечномерное подмногообразие в T , оценка размерности которого дана в лемме 1.1.

ТЕОРЕМА 1.5. *Нормальная форма T струи римановой метрики может быть выбрана такой, что $T = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} T_{ij}$, где T_{ij} — пространство формальных бесконечных линейных комбинаций элементов подмножеств $G_{ij} \subset \mathbb{Z}_+^n$, где*

$$G_{ij} = \mathbb{Z}_+^I \setminus (A_{ij} \cup B_{ij}),$$

A_{ij}, B_{ij} — координатные подполюгруппы вида

$$A_{ij} = \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i = 0, i \notin \{i, \dots, j-1\}\},$$

$$B_{ij} = \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i = 0, i \notin \{i, \dots, i-1, j, j+1, \dots, n\}\}.$$

В частности, при $i = j$ имеем $A_{ii} = \mathbb{Z}_+^n$, $B_{ii} = 0$, $G_{ii} = \emptyset$ и $T_{ii} = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Касательное пространство F_1 к орбите M_E евклидовой метрики $E = (\delta_{ij})$ состоит из симметричных матриц, имеющих вид

$$h_{ij} = (L_v E)_{ij} = \sum_k \left(\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_k} v_k + \delta_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

где L_v — производная Ли вдоль векторного поля $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

Покажем, что для каждого $B \in T_E F$ существует однозначное разложение $B = H + T$, где $H \in F_1$, $T \in T$, т.е.

$$b_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + t_{ij}$$

для некоторого векторного поля $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

Пусть $T = (t_{ij}) \in T$. Тогда $t_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$, а компоненты векторного поля $\mathbf{v}$ имеют вид

$$v_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \int_0^{x_i} b_{ii}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt + u_i(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n),$$

где «крышка» означает, что переменная x_i отсутствует, а u_i — произвольные формальные степенные ряды. Следовательно,

$$t_{ij} = b_{ij}^1 - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

где

$$b_{ij}^1 = b_{ij} - \frac{1}{2} \int \frac{\partial b_{jj}}{\partial x_i} dx_j - \frac{1}{2} \int \frac{\partial b_{ii}}{\partial x_j} dx_i.$$

Формальные степенные ряды u_i , $i = 1, \dots, n$, однозначно определяются из последнего уравнения и из условий $t_{ij} \in T_{ij}$. Действительно, из уравнений

$$t_{i,i+1} = b_{i,i+1}^1 - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$t_{1n} = t_{n1} = b_{n1}^1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_1}$$

и из условий $t_{i,i+1} \in T_{i,i+1}$, $t_{n1} \in T_{1n}$ степенные ряды u_i определяются однозначно с точностью до слагаемого u_i^1 , являющегося формальным степенным рядом, не зависящим от x_i и $x_{\tau(i)}$, где $\tau(i) = i+1$ при $i = 1, \dots, n-1$ и $\tau(n) = 1$. Рассмотрим уравнения

$$t_{i,i+2} = b_{i,i+2}^2 - \frac{\partial u_{i+2}^1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^1}{\partial x_{i+2}}, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

$$t_{1,n-1} = t_{n-1,1} = b_{n-1,1}^2 - \frac{\partial u_1^1}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial u_{n-1}^1}{\partial x_1}, \quad t_{2n} = t_{n2} = b_{n2}^2 - \frac{\partial u_2^1}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n^1}{\partial x_2},$$

где в b_{ij}^2 отнесены как мономы, входящие в b_{ij}^1 , так и мономы, входящие в ряд $\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j$, определенный на предыдущем шаге однозначно с точностью до слагаемого $\partial u_j^1 / \partial x_i + \partial u_i^1 / \partial x_j$. Из этих уравнений и из условий $t_{i,i+2} \in T_{i,i+2}$, $t_{n-1,1} \in T_{1,n-1}$, $t_{n2} \in T_{2n}$ степенные ряды u_i^1 определяются однозначно с точностью до слагаемого u_i^2 , являющегося формальным степенным рядом, не зависящим от x_i , $x_{\tau(i)}$, $x_{\tau^2(i)}$. Продолжая эту процедуру, на последнем $(n-1)$ -м шаге получим следующие уравнения:

$$t_{1n} = b_{1n}^{n-1} - \frac{\partial u_n^{n-2}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^{n-2}}{\partial x_n},$$

$$t_{i,i+1} = t_{i+1,i} = b_{i+1,i}^{n-1} - \frac{\partial u_i^{n-2}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial u_{i+1}^{n-2}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где u_i^{n-2} — формальные степенные ряды, не зависящие от x_i , $x_{\tau(i)}$, $\dots$, $x_{\tau^{n-2}(i)}$, т.е. u_i^{n-2} — формальный степенной ряд по $x_{\tau^{n-1}(i)} = x_{\tau^{-1}(i)}$. Из этих уравнений и из условий $t_{1n} \in T_{1n}$ и $t_{i+1,i} \in T_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, степенные ряды u_i^{n-2} определяются однозначно с точностью до членов нулевой степени. Из условия $v_i(0) = 0$ вытекает, что $u_i(0) = 0$ и что свободный член ряда u_i^{n-2} равен нулю. Таким образом, доказано, что для каждого элемента $B \in T_{EF}$ существует однозначное разложение $B = H + T$, где $H \in F_1$, $T \in T$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.6. *Струю римановой метрики в $\mathbb{R}^n$ можно привести формальным диффеоморфизмом к виду $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{ij}$, где функция f_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$, обращается в нуль на паре координатных плоскостей*

$$a_{ij} = \{x_1 = \dots = x_{i-1} = x_j = x_{j+1} = \dots = x_n = 0\},$$

$$b_{ij} = \{x_i = \dots = x_{j-1} = 0\}.$$

В частности, при $i = j$ имеем $a_{ii} = \{0\}$, $b_{ii} = \mathbb{R}^n$, т.е. $g_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Для каждого подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим через $\mathbb{Z}_+^I$ координатную подполугруппу $\{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i = 0, i \notin I\}$ в $\mathbb{Z}_+^n$. Подполугруппа $\mathbb{Z}_+^I$ изоморфна $\mathbb{Z}_+^{|I|}$, где $|I|$ есть мощность подмножества I . При $I = \emptyset$ имеем $\mathbb{Z}_+^\emptyset = \{(0, \dots, 0)\}$.

ЛЕММА 1.7. *Полугруппа $\mathbb{Z}_+^n$ распадается в объединение 2^n непересекающихся сдвинутых координатных подполугрупп:*

$$\mathbb{Z}_+^n = \bigcup_{I \subset \{1, \dots, n\}} p^I(x_1, \dots, x_n) \mathbb{Z}_+^I,$$

где $p^I(x)$ — моном следующего вида:

$$p^I(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k \in I} x_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полугруппа $\mathbb{Z}_+^n$ распадается в объединение 2^n непересекающихся подмножеств

$$U_I = \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i = 0, i \notin I; m_i \neq 0, i \in I\},$$

где $I \subset \{1, \dots, n\}$. Подмножество U_I представляет собой координатную подполугруппу, сдвинутую на моном $p^I(x)$. $\square$

ТЕОРЕМА 1.8. *Нормальная форма Γ струи римановой метрики может быть выбрана такой, что метрические коэффициенты представляются в виде конечной суммы*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \sum p_{ij}^I(x) \varphi_{ij}^I(x),$$

где сумма берется по всем подмножествам $I \subset \{1, \dots, n\}$, не содержащимся ни в одном из взаимно дополнительных подмножеств $I_{ij} = \{i, \dots, j-1\}$ и $\{1, \dots, n\} \setminus I_{ij}$, функциональный модуль $\varphi_{ij}^I(x)$ представляет собой формальный степенной ряд по переменным x_i , где $i \in I$, а моном $p_{ij}^I(x)$ имеет вид

$$p_{ij}^I(x) = \prod_{k \in I} x_k.$$

В частности, $|I| \geq 2$ и $\deg p_{ij}^I \geq 2$ для любого подмножества I , входящего в сумму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.5 нормальную форму Γ можно выбрать так, что подпространства Γ_{ij} , $1 \leq i \leq j \leq n$, состоят из формальных бесконечных линейных комбинаций элементов подмножеств

$$G_{ij} = \mathbb{Z}_+^n \setminus (A_{ij} \cup B_{ij}) \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

где по лемме 1.7 координатные подполугруппы A_{ij} и B_{ij} распадаются в объединение непересекающихся сдвинутых координатных подполугрупп:

$$A_{ij} = \bigcup_{I \subset I_{ij}} p_{ij}^I(x) \mathbb{Z}_+^I, \quad B_{ij} = \bigcup_{I \subset \{1, \dots, n\} \setminus I_{ij}} p_{ij}^I(x) \mathbb{Z}_+^I.$$

Следовательно, подмножество G_{ij} представляется в виде

$$G_{ij} = \bigcup p_{ij}^I(x) \mathbb{Z}_+^I,$$

где $I \not\subset I_{ij}$ и $I \not\subset \{1, \dots, n\} \setminus I_{ij}$.

Каждой сдвинутой координатной подполугруппе $p_{ij}^I(x) \mathbb{Z}_+^I$ в последнем разложении соответствует подпространство в Γ_{ij} , состоящее из формальных бесконечных линейных комбинаций вида $p_{ij}^I(x) \varphi_{ij}^I(x)$, где $\varphi_{ij}^I(x)$ — формальный степенной ряд по переменным x_i , $i \in I$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Будем называть функциональные модули $\varphi_{ij}^I(x)$, входящие в нормальную форму, функциональными модулями порядка $|I|$.

СЛЕДСТВИЕ 1.10. *Струю римановой метрики можно привести формальным диффеоморфизмом к нормальной форме, содержащей конечное число функциональных модулей порядка $|I| \geq 2$. В частности, существуют такие локальные координаты, в которых метрика имеет второй порядок касания с евклидовой метрикой.*

В следующих примерах даны нормальные формы для двумерных и трехмерных струй римановых метрик.

ПРИМЕР 1. В случае струй римановых метрик на плоскости имеется единственный функциональный модуль $\varphi(x, y)$ порядка 2. Следовательно, нормальная форма имеет вид $ds^2 = dx^2 + xy\varphi(x, y) dx dy + dy^2$, а подмножества G_{ij} в двумерном случае имеют следующий вид:

$$G_{11} = G_{22} = \emptyset, \quad G_{12} = \{(p, q) \mid p > 0, q > 0\},$$

где G_{12} является координатной подполугруппой $\mathbb{Z}_+^2$, сдвинутой на моном xy .

ПРИМЕР 2. В случае трехмерных струй римановых метрик подмножества $I_{ij} \subset \{1, 2, 3\}$ из теоремы 1.8 имеют вид $I_{12} = \{1\}$, $I_{13} = \{1, 2\}$, $I_{23} = \{2\}$. Для каждого из них существует пара подмножеств мощности 2, не содержащихся ни в I_{ij} , ни в $\{1, 2, 3\} \setminus I_{ij}$:

$\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$ для I_{12} , $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ для I_{13} , $\{1, 2\}$ и $\{2, 3\}$ для I_{23} .

Каждому из этих подмножеств соответствует функциональный модуль порядка 2. Кроме того, все множество $\{1, 2, 3\}$ не содержится ни в одном из подмножеств I_{ij} . Следовательно, нормальная форма трехмерной струи римановой метрики имеет следующий вид:

$$g_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$g_{12} = x_1 x_2 \varphi_{12}^{\{1,2\}}(x_1, x_2) + x_1 x_3 \varphi_{12}^{\{1,3\}}(x_1, x_3) + x_1 x_2 x_3 \varphi_{12}^{\{1,2,3\}}(x_1, x_2, x_3),$$

$$g_{13} = x_1 x_3 \varphi_{13}^{\{1,3\}}(x_1, x_3) + x_2 x_3 \varphi_{13}^{\{2,3\}}(x_2, x_3) + x_1 x_2 x_3 \varphi_{13}^{\{1,2,3\}}(x_1, x_2, x_3),$$

$$g_{23} = x_1 x_2 \varphi_{23}^{\{1,2\}}(x_1, x_2) + x_2 x_3 \varphi_{23}^{\{2,3\}}(x_2, x_3) + x_1 x_2 x_3 \varphi_{23}^{\{1,2,3\}}(x_1, x_2, x_3).$$

Таким образом, в трехмерном случае имеется шесть функциональных модулей порядка 2 и три функциональных модуля порядка 3.

§2. Ряд Пуанкаре пространства модулей струй римановых метрик

ТЕОРЕМА 2.1. Если геометрическая структура имеет нормальную форму с конечным числом функциональных модулей, то ряд Пуанкаре представляется следующей рациональной функцией:

$$p(t) = \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^R \frac{a_{rq} t^r}{(1-t)^q},$$

где n — размерность пространства, a_{rq} — число функциональных модулей порядка r , зависящих от q переменных, а R — максимальный порядок функциональных модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если нормальная форма имеет m функциональных модулей $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ порядка r , зависящих от q переменных, то размерность пространства орбит действия группы $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ на пространстве k -струй равна числу мономов степени $k-r$ в формальных степенных рядах $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, а ряд Пуанкаре пространства струй такой геометрической структуры имеет вид

$$p(t) = \frac{mt^r}{(1-t)^q}.$$

В общем случае геометрической структуры с конечным числом функциональных модулей нужно просуммировать ряды такого вида, группируя функциональные модули по порядкам и по числу переменных, от которых они зависят. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Набор функциональных модулей зависит от выбора способа приведения геометрической структуры к нормальной форме, в то время как ряд Пуанкаре инвариантен относительно такого выбора. Если выбрать другую нормальную форму с конечным числом функциональных модулей и применить к ней теорему 2.1, то ряд Пуанкаре, являющийся рациональной функцией, просто запишется в виде суммы других рациональных дробей.

ТЕОРЕМА 2.3. *Ряд Пуанкаре пространства модулей струй римановых метрик имеет вид*

$$p(t) = t^2 q(t) + \sum_{r=2}^n \frac{a_r t^r}{(1-t)^r},$$

где $q(t)$ — некоторый полином с неположительными коэффициентами,

$$a_r = \frac{n(n-1)}{2} \binom{n}{r} - n \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r}, \quad r = 2, \dots, n,$$

а n — размерность пространства. В частности, имеется $n(n-1)/2$ функциональных модулей порядка n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Члену g_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, нормальной формы Т соответствует подмножество $I_{ij} \subset \{1, \dots, n\}$, $I_{ij} = \{i, \dots, j-1\}$, $|I_{ij}| = j-i$. Функциональные модули порядка r , входящие в g_{ij} , занумерованы r -подмножествами $I \subset \{1, \dots, n\}$, такими, что $I \not\subset I_{ij}$ и $I \not\subset \{1, \dots, n\} \setminus I_{ij}$. Число таких подмножеств равно

$$b_{ij} = \binom{n}{r} - \binom{j-i}{r} - \binom{n-j+i}{r},$$

где предполагается, что $\binom{p}{q} = 0$ при $q > p$. Суммируя по всем $1 \leq i < j \leq n$, получаем

$$a_r = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} = \frac{n(n-1)}{2} \binom{n}{r} - n \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r}.$$

Поскольку нормальная форма, соответствующая трансверсали Т, представляет струи римановой метрики не однозначно, а лишь с точностью до некоторого конечномерного многообразия (см. замечание 1.4), то формальный степенной ряд рациональной функции

$$\sum_{r=2}^n \frac{a_r t^r}{(1-t)^r},$$

разложенный в нуле, еще не определяет ряда Пуанкаре пространства струй римановых метрик. Для получения ряда Пуанкаре необходимо к последнему формальному степенному ряду прибавить формальный степенной ряд $q(t)$ с неположительными коэффициентами, являющийся полиномом (так как трансверсаль T пересекается с $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ -орбитами по конечномерным многообразиям), причем в полиноме $q(t)$ отсутствуют члены нулевой и первой степени. $\square$

Например, при $n = 2$ имеем $r = 2$ и один функциональный модуль второго порядка, $a_2 = 1$. В этом случае ряд Пуанкаре имеет вид

$$p(t) = t^2 q(t) + \frac{t^2}{(1-t)^2}, \quad \text{где } q(t) = -t.$$

При $n = 3$ имеются функциональные модули второго и третьего порядка: $a_2 = 6$, $a_3 = 3$. В этом случае ряд Пуанкаре имеет вид

$$p(t) = t^2 q(t) + \frac{6t^2}{(1-t)^2} + \frac{3t^3}{(1-t)^3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold V. I.* Mathematical Problems in Classical Physics. Appl. Math. Sci., Vol. 100, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1992.
2. *Tresse A.* Sur les invariants différentiels des groupes continus des transformations. Acta Math., **18** (1894).
3. *Шмелев А. С.* О дифференциальных инвариантах некоторых дифференциально-геометрических структур. Труды МИАН, **209**, 234–267 (1995).
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, Наука, М., 1981.

Независимый московский университет

Поступило в редакцию
15 декабря 1995 г.