Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Закалюкин, Особенности контакта окружностей с поверхностями и флаги, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 73–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:14:26

Построение решений в описанной алгебро-геометрической ситуации является предметом дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность Б. А. Дубровину и А. П. Веселову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baxter J., Perk J. H. H., Yang H. A.* Phys. Lett. A, **128**, No. 3, 4 (1988).
2. *Bazhanov V. V., Stroganov Yu. G.* Chiral Potts Model as a Descendant of the Six-Vertex Model. Preprint, 1989.
3. *Кричевер И. М.* Функц. анализ и его прил., **15**, 22–35 (1981).
4. *Гриффитс П., Харрис И.* Принципы алгебраической геометрии. Мир, М., 1978.

Математический институт,
Кнез Михайлова 35, 11000 Белград, Югославия

Поступило в редакцию
15 августа 1995 г.

УДК 514.853

Особенности контакта окружностей с поверхностями и флаги*

© 1997. В. М. ЗАКАЛЮКИН

Дискриминанты групп, порожденных отражениями, появляются в качестве бифуркационных диаграмм в различных классификационных задачах теории особенностей. Еще одна достаточно естественная задача такого типа, по-видимому, не изученная ранее, связана с особенностями контакта окружностей в трехмерном евклидовом пространстве с заданной поверхностью общего положения [1]. Она находит приложения, например, в компьютерной графике [2] и вкладывается в более общую задачу классификации особенностей контакта подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ с выбранным в этом пространстве полным или неполным флагом аффинных подпространств. Оказывается, что классы таких особенностей тесно связаны с краевыми особенностями, особенностями функций на многообразиях с углами [3], особенностями проектирований на прямую полных пересечений [4], уплощениями кривых [5] и т.д.

1. Пусть S^2 — некоторая сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, и пусть M_S^3 — трехмерное многообразие всех окружностей (включая окружности нулевого радиуса), лежащих на сфере S . Заметим, что M_S^3 диффеоморфно пространству, полученному из шара B , ограниченного сферой S , σ -раздутием его центра. Действительно, отображение, сопоставляющее окружности ее центр, является диффеоморфизмом вне множества больших кругов, диффеоморфного $\mathbb{R}P^2$ и отображаемого в центр шара B .

Пусть Γ — некоторая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Бифуркационным множеством $D(\Gamma, S) \subset M_S^3$ назовем множество окружностей, не трансверсальных Γ . Особенности бифуркационных множеств $D(\Gamma, S)$ опишем с помощью следующей конструкции. На пространстве пар $(f, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ гладких функций, заданных

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 96-01-00710 и INTAS 4373.

на плоскости, действует группа K , состоящая из диффеоморфизмов прообраза и умножений пар на невырожденные *нижнетреугольные* матрицы, зависящие от точки плоскости.

Функцию f назовем *типичной*, если ее росток в любой точке нулевого множества уровня $f^{-1}(0)$ имеет особенность коразмерности ≤ 5 (в пространстве ростков функций с нулевым значением в данной точке).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Росток пары (f, g_r) , состоящей из типичной функции f и семейства общего положения g_r функций, зависящих от параметра $r \in \mathbb{R}^3$, во всякой точке из $f^{-1}(0)$ приводится семейством преобразований из K к ростку в нуле одной из следующих нормальных форм (здесь $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r = (a, b, c)$):*

f	g
$x \ (A_0)$	$y^2 + a \ (\hat{A}_1)$ или $y^3 + ax + b \ (\hat{A}_2)$, или $y^4 + ax^2 + bx + c \ (\hat{A}_3)$
$xy \ (A_1^-)$	$x + y + a \ (\hat{A}_1)$ или $x^2 + y + ax + b \ (B_2)$, или $x^3 + y + ax^2 + bx + c \ (B_3)$, или $x^2 \pm y^2 + ax + by + c \ (T_3)$
$x^2 + y^2 \ (A_1^+)$	$x + a \ (\hat{A}_1)$ или $x^2 + ax + b \ (B_2)$, или $x^3 + ax^2 + bx + c \ (B_3)$
$x^2 + y^3 \ (A_2)$	$y + a \ (\hat{A}_1)$ или $x + ay + b \ (G_2)$, или $y^2 + ax + by + c \ (L_3)$
$x^2 \pm y^4 \ (A_3^\pm)$	$y + a \ (\hat{A}_1)$ или $x + (\lambda + a)y^2 + by + c$, или $x + (\lambda \pm a^2)y^2 + by + c$ (здесь $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \pm 1 \ (X_3)$), или $x + (a \pm 1)y^2 + y^3 + by + c \ (X_3^*)$, или $y^2 + ax + by + c \ (\hat{X}_3)$
$x^2 + y^5 \ (A_4)$	$y + a \ (\hat{A}_1)$ или $x + y^2 + ay + b \ (H_2)$, или $x + y^3 + ay^2 + by + c \ (H_3)$, или $y^2 + ax + by + c \ (H_3^*)$
$x^2y \pm y^3 \ (D_4^\pm)$	$x + (\lambda + a)y + b \ (\hat{A}_1)$ или $x + (\lambda + b^2 \pm a^2)y + c$ (здесь $\lambda^2 \pm 1 \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$), или $y + x^2 + ax + b \ (B_2)$, или $y + x^3 + ax^2 + bx + c \ (B_3)$, или $x^2 + \lambda_1 xy + \lambda_2 y^2 + ax + by + c \ (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$

Значения параметров r , при которых отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с компонентами f и g_r имеет критическую точку с нулевым критическим значением, образуют бифуркационное множество $D(f, g_r)$ этой пары. Преобразования из K порождают диффеоморфизмы таких множеств.

ТЕОРЕМА 2. *Для поверхности Γ общего положения и произвольной сферы S росток бифуркационного множества $D(\Gamma, S)$ в любой его точке диффеоморфен либо ростку в нуле бифуркационного множества $D(f, g_r)$ для*

пары из предложения 1, либо объединению таких трансверсально пересекающихся ростков, либо пересечению такого ростка с полупространством, заданным границей многообразия M_S .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Бифуркационное множество пары f, g_r из предложения 1 диффеоморфно: в случае $\hat{A}_1$ — гладкой поверхности; в случаях $\hat{A}_2, B_2, G_2$ — цилиндру над дискриминантом соответствующей группы A_2, B_2, G_2 , порожденной отражениями; в случае H_2 — объединению цилиндра над дискриминантом группы H_2 (кривой с точкой возврата $2/5$) с касательной прямой; в случаях $\hat{A}_3, B_3$ — дискриминанту групп A_3, B_3 соответственно; в случае H_3 — объединению дискриминанта группы H_3 симметрий икосаэдра [5] с касательной плоскостью; в случае H_3^* — поверхности, бирационально эквивалентной предыдущей; в случае L_3 — объединению сложенного зонтика и касательной плоскости [6]; в случае T_3 — объединению трех гладких поверхностей, из которых первая и вторая касаются третьей вдоль соответствующих трансверсально пересекающихся гладких кривых; в случаях $X_3, X_3^*, \hat{X}_3$ — объединению трех гладких поверхностей, попарно касающихся вдоль одной гладкой кривой (такое множество имеет модули).

2. Случаи H_3, H_3^* геометрически отвечают сфере S , проходящей через точку поверхности Γ , нормаль в которой проходит через вершину ласточкиного хвоста фокальной поверхности. Центр сферы S совпадает с этой вершиной.

3. С помощью стереографической проекции задача сводится к описанию бифуркационных множеств особенностей контакта двумерной поверхности Γ' , вложенной в $\mathbb{R}^4$, с флагами, состоящими из аффинного трехмерного подпространства, отвечающего сфере S , и его аффинных двумерных подпространств, отвечающих окружностям из M_S .

2. *Контактной парой* в $\mathbb{C}^m$ назовем росток X полного пересечения и флаг в $\mathbb{C}^m$, состоящий из двух аффинных подпространств $\mathbb{C}^k \hookleftarrow \mathbb{C}^{k-1}$. Будем предполагать, что $\dim(X) + k - 1 \geq m$, т.е. пересечение X с $\mathbb{C}^{k-1}$ непусто. Две контактные пары эквивалентны, если существует диффеоморфизм пространства $\mathbb{C}^m$, сохраняющий флаг и переводящий одно в другое соответствующие полные пересечения. Класс эквивалентности контактной пары называется *простым*, если росток в любой точке всякого близкого к данному полного пересечения эквивалентен одной из конечного числа контактных пар. Пару $X \times \mathbb{C}^s \hookrightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^s \hookleftarrow \mathbb{C}^k \times \{0\} \hookleftarrow \mathbb{C}^{k-1} \times \{0\}$ назовем *надстройкой*, а пару $X \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^s \hookleftarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^s \hookleftarrow \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C}^s$ — *поднятием* пары $X \hookrightarrow \mathbb{C}^m \hookleftarrow \mathbb{C}^k \hookleftarrow \mathbb{C}^{k-1}$.

ТЕОРЕМА 3. Простые классы эквивалентности контактных пар с точностью до подходящей надстройки и поднятия исчерпываются случаем, когда X — гладкая гиперповерхность, а пересечение $X \cap \mathbb{C}^k$ и край $\mathbb{C}^{k-1}$ определяют в $\mathbb{C}^k$ простую краевую особенность (типа A, B, C, D, E), а также случай, когда X — двумерная гладкая поверхность в $\mathbb{C}^4$, $k = 3$, а сужения на X координатных функций f и g , нули которых задают $\mathbb{C}^k$ в

$\mathbb{C}^{k+1}$ и $\mathbb{C}^{k-1}$ в $\mathbb{C}^k$, в некоторых локальных координатах x, y имеют вид

$$\begin{aligned} C_{n,l}: \quad & f = xy, \quad g = x^n + y^l, \quad 2 \leq n \leq l, \\ F_{2n+1}: \quad & f = x^2 + y^3, \quad g = y^n, \quad n \geq 1, \\ F_{2n+4}: \quad & f = x^2 + y^3, \quad g = xy^n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти особенности входят в список простых особенностей проецирований на прямую полных пересечений [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Montaldi J. J. Differential Geom., **23**, No. 2, 109–126 (1986).
2. Koenderink J. J. Solid Shape, MIT, 1993.
3. Duc N. H., Pham F. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **291**, 113–116 (1980).
4. Горюнов В. В. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 1–8 (1981).
5. Казарян М. Э. Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. ВИНТИ, **33**, 1988, с. 215–234.

Московский авиационный институт

Поступило в редакцию
24 декабря 1996 г.

УДК 512.54

Группы перестановок, порожденные (2,2)-циклом и n -циклом

© 1997. Ю. Ю. Кочетков

В данной работе изучается подгруппа H симметрической группы S_n , порожденная двумя перестановками: n -циклом $a = (1, \dots, n)$ и $(2, 2)$ -циклом $b = (k, l)(m, p)$. Подгруппа H называется полной, если $H = S_n$ или $H = A_n$. Напомним, что H называется импримитивной подгруппой [1], если существует разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на непересекающиеся подмножества $M_1, \dots, M_s$, $s < n$, такие, что для любого $h \in H$ и любого $i \leq s$ существует $j \leq s$, такое, что $h(M_i) \subseteq M_j$. Если H не является импримитивной группой, то она называется примитивной. Группа H импримитивна, если $(l - k, p - m, n) > 1$ или $l - k = p - m$ и $m - l = n - p + k$ ($(\cdot, \cdot, \cdot)$ — наибольший общий делитель). Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если H не полна и примитивна, то либо $n = 6$ и $H = S_5$, либо $n = 7$ и $H = PSL_2(7)$.

Будут обсуждены приложения этого результата в теории групп монодромии плоских деревьев [3] и в теории Галуа. Методы настоящей работы являются развитием методов статьи [2], где характеризуются подгруппы, порожденные 2-циклом и произвольной перестановкой.

Пусть подгруппа $K \subseteq S_n$ порождена двумя перестановками: n -циклом $a = (1, \dots, n)$ и 3-циклом $b = (k, l, m)$, где $k < l < m$. Рассмотрим множество $M = \{1, \dots, n\}$. Три элемента $i_1, i_2, i_3 \in M$ образуют триаду, если 3-цикл