Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Спрефико, Об одном обобщении гамма-функции Эйлера, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 87–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa46>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 07:14:29

УДК 517.581

Об одном обобщении гамма-функции Эйлера

© 2005. М. СПРЕФИКО

1. Введение. Рассмотрим регуляризованное произведение Вейерштрасса

$$F_{\beta}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^{\beta}}\right) e^{\sum_{j=1}^p \frac{(-1)^j}{j} \frac{z^j}{n^{j\beta}}},$$

где β вещественно и положительно, $p = [1/\beta]$ и $\gamma_{\beta} = -\ln F_{\beta}(1)$. Определим функцию $\Gamma_{\beta}(z)$ формулой $1/\Gamma_{\beta}(z) = ze^{\gamma_{\beta}z}F_{\beta}(z)$. Это аналитическая функция переменной z во всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = 0, -1^{\beta}, -2^{\beta}, \dots$, в которых она имеет простые полюсы, причем $\Gamma_{\beta}(1) = 1$. В этой заметке мы анонсируем основные свойства функции Γ_{β} , а подробности и полные доказательства будут опубликованы в другой работе. Поскольку $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$, то функция Γ_{β} представляет собой естественное обобщение функции Эйлера, и мы показываем, что все свойства, характеризующие гамма-функцию и не зависящие от «линейности» членов определяющей последовательности (см. разд. 2), выполнены весьма естественным и простым образом и для Γ_{β} . В частности, мы выписываем функциональное уравнение, ряд Тейлора, а также асимптотическое разложение при больших z . Примечательно, что последнее мы получаем, доказывая существование полного асимптотического разложения соответствующей функции теплопроводности (лемма 3). Последняя имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n t}$ для некоторой последовательности a_n , и в общем случае весьма мало шансов получить для таких функций полное разложение. Труден уже случай двумерной сферы [4]. При $\beta > 1$ обобщение формулы Эйлера для гамма-функции задается выражением

$$F_{\beta}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1^{\beta} + z)(2^{\beta} + z) \cdots (m^{\beta} + z)}{1^{\beta} 2^{\beta} \cdots m^{\beta}},$$

которое продолжается в область $\beta < 1$ с подходящими регуляризирующими множителями. Эта формула показывает, что ни функциональное уравнение, ни интегральное представление гамма-функции, вероятно, не обобщаются на случай функции Γ_{β} , поскольку они основаны на «линейности» общего члена.

Помимо абстрактного интереса [6, 8], изучение такого рода функций мотивировано тем, что они возникают при рассмотрении регуляризованного определителя [5, 9] вещественных степеней оператора Лапласа на окружности¹⁾ [3]: определитель $\det_{\zeta}(-\Delta_{S^1}^{\beta} + a)$ равен $\Gamma_{\beta}(a)$, что обобщает формулу Лерха (лемма 3). В частности, асимптотики логарифма $\ln \Gamma_{\beta}$ задают поведение при малом или большом массовом члене.

2. Спектральные функции. Рассмотрим последовательность $S_{\beta,a} = \{a_n = n^{\beta} + a\}$, где $\beta \neq 1$ фиксировано²⁾. Последовательность $S_{\beta,a}$ имеет конечный

¹⁾В стандартном случае $F_2(z) = \frac{\text{sh } \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}}$.

²⁾Заметим, что при $\beta = 1$ общий член однородной последовательности $S_{1,0}$ линейен по переменной n . В действительности это свойство является причиной некоторых основных свойств гамма-функции, и именно поэтому последние не наблюдаются в общем нелинейном случае $\beta \neq 1$.

показатель сходимости $1/\beta$ и единственную точку накопления на бесконечности. Мы сопоставим последовательности $S_{\beta,a}$ следующие спектральные функции: дзета-функцию $\zeta_\beta(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^\beta + a)^{-s}$, регуляризованное произведение Вейерштрасса $F_\beta(z)$, которое является целой функцией порядка $1/\beta$ и рода $p = [1/\beta]$, функцию теплопроводности $f_\beta(t, a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n^\beta + a)t}$ и резольвентную функцию, определенную формулой $R_\beta(\lambda, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - n^\beta - a} = -\zeta_\beta(1, a - \lambda)$ при $\beta > 1$ и λ , лежащем в произвольном секторе, не содержащем чисел a_n . Для произвольного β мы можем ввести только производные $R_\beta^{(p)}(\lambda, a) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - n^\beta - a)^{-p-1} = -\zeta_\beta(p+1, a - \lambda)$.

Используя теорему Плана таким же образом, как и в [7], мы получаем полное асимптотическое разложение функции теплопроводности. Пусть $\beta = [\beta] + (\beta)$.

ЛЕММА 1. При $t \rightarrow 0^+$ справедливо разложение $f_\beta(t, 0) \sim \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) t^{-1/\beta} + \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} c_m t^m$, где

$$c_{2m} = 2 \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \binom{2m}{2j+1} \cos^{2j+1} \frac{\pi}{2}(\beta) \sin^{2m-2j-1} \frac{\pi}{2}(\beta) \int_0^\infty \frac{y^{2m/\beta}}{e^{2\pi y} - 1} dy,$$

$$c_{2m+1} = 2 \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j+1} \binom{2m+1}{2j} \cos^{2j} \frac{\pi}{2}(\beta) \sin^{2m+1-2j} \frac{\pi}{2}(\beta) \int_0^\infty \frac{y^{(2m+1)/\beta}}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

3. Дзета-функция. Основные свойства обобщенной дзета-функции Гурвица $\zeta_\beta(s, a)$ можно получить стандартными методами [2], но мы дадим простое доказательство взаимосвязи основных дзета-инвариантов с произведениями Вейерштрасса [9].

ЛЕММА 2. Функция $\zeta_\beta(s, a)$ обладает регулярным аналитическим продолжением на всю комплексную плоскость, за исключением простых полюсов в точках $s = \frac{1}{\beta} - j$ при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, если $\frac{1}{\beta} \notin \mathbb{N}$, или при $0 \leq j \leq \frac{1}{\beta} - 1$, если $\frac{1}{\beta} \in \mathbb{N}_{0,1}$. При этом

$$\text{Res}_1 \left(\zeta_\beta(s, a), s = \frac{1}{\beta} - j \right) = \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta} - j)} a^j.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для коэффициентов в разложении функции теплопроводности справедлива альтернативная формула $c_m = \zeta_\beta(-m, 0) = \zeta(-\beta m)$.

ЛЕММА 3. Справедливы формулы

$$\zeta_\beta(0, a) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \frac{1}{\beta} \notin \mathbb{N}, \\ -\frac{1}{2} + (-1)^{1/\beta} a^{1/\beta}, & \frac{1}{\beta} \in \mathbb{N}_{0,1}, \end{cases}$$

$$\zeta'_\beta(0, a) = -\frac{\beta}{2} \ln 2\pi + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(-1)^j}{j} \zeta(\beta j) a^j - \ln F_\beta(a) + \begin{cases} \frac{(-1)^p}{p} \zeta(\beta p) a^p, & \frac{1}{\beta} \notin \mathbb{N}, p \neq 0 \\ (-1)^{1/\beta} [(\beta+1)\gamma + \psi(1/\beta)] a^{1/\beta}, & \frac{1}{\beta} \in \mathbb{N}_{0,1}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|a| < 1$ разложим степени двучлена в определении дзета-функции и получим $\zeta_\beta(s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} \zeta_\beta(s+j, 0) a^j$, где $\zeta_\beta(s, 0) = \zeta(\beta s)$. Если $1/\beta \notin \mathbb{N}$, то мы можем вычислить и ряд, и его производную по s при $s = 0$. При $1/\beta \in \mathbb{N}_{0,1}$ трудности связаны с p -м членом, который можно вычислить, используя разложения при $s = 0$:

$$\binom{-s}{j} \zeta_\beta(s+j, 0) = \frac{(-1)^j}{j} \{R_1(j) + [R_0(j) + (\gamma + \psi(j))R_1(j)]s\} + O(s^2),$$

где

$$R_k(j) = \text{Res}_k(\zeta_\beta(s, 0), s = j) = \begin{cases} \gamma, & k = 0, \\ 1/\beta, & k = 1. \end{cases}$$

Пользуясь леммой 3, мы обобщаем лемму о факторизации Чои и Куина [1]:

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедливы формулы*

$$\zeta_{2\beta}(0, a^2) = \frac{1}{2}[\zeta_\beta(0, ia) + \zeta_\beta(0, -ia)],$$

$$\zeta'_{2\beta}(0, a^2) = \zeta'_\beta(0, ia) + \zeta'_\beta(0, -ia) - \begin{cases} 2(-1)^{p/2} \sum_{j=1}^{p/2} \frac{1}{2j-1} a^p, & \text{если } p \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

4. Свойства гамма-функции. Наши первые результаты следуют из определения¹⁾.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедлива формула $\Gamma_\beta(iz)\Gamma_\beta(-iz) = e^{\gamma_{2\beta}z^2}\Gamma_{2\beta}(z^2)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $\beta > 1$, то*

$$\left(1 - \frac{x}{z}\right) e^{-\gamma_\beta x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n^\beta + z}\right) e^{x/n^\beta} = \frac{\Gamma_\beta(z)}{\Gamma_\beta(z-x)}.$$

В качестве следствия можно вычислить общий класс бесконечных произведений вида $\Pi = \prod_{n=1}^{\infty} P(n^\beta)/Q(n^\beta)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена одной и той же степени J , а Q не имеет корней вида n^β . Непосредственные вычисления дают

$$\Pi = \prod_{j=1}^J \frac{b_j \Gamma_\beta(-b_j)}{a_j \Gamma_\beta(-a_j)} e^{\gamma_\beta(b_j - a_j)},$$

где a_j и b_j — корни многочленов P и Q соответственно.

Ряд Тейлора функции $\ln \Gamma_\beta$ можно получить также из леммы 3. В качестве альтернативного варианта можно использовать регуляризованную резольвентную функцию

$$\tilde{R}_\beta(-z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{-z - n^\beta} + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-z)^j}{n^{(j+1)\beta}} \right],$$

что будет существенно в доказательстве предложения 4. Указанный выше ряд равномерно сходится в любой ограниченной области вместе с первыми p производными, так что мы можем продифференцировать и при подходящей нормализации получить $(d^k/dz^k) \ln F_\beta(z) = (-1)^k (k-1)! \tilde{R}_\beta^{(k-1)}(-z, 0)$. Переходя к пределу, имеем $\tilde{R}_\beta^{(k)}(-z, 0) = 0$ при $0 \leq k \leq p-1$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

¹⁾Предложение 1 также может быть получено из следствия 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При малых z справедлива формула

$$\ln \Gamma_\beta(z) = -\ln z - \gamma_\beta z + \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \zeta(\beta j) z^j.$$

Наш последний результат — асимптотическое разложение при больших значениях аргумента. Доказательство состоит из двух шагов. Вначале, как и в доказательстве леммы 2, используется преобразование Меллина, чтобы выразить p -резольвентную функцию $R_\beta^{(p)}(\lambda, 0)$ как преобразование Лапласа функции теплопроводности; таким образом, асимптотическое разложение функции $R_\beta^{(p)}(\lambda, 0)$ задается подстановкой, использующей доставляемое леммой 1 разложение функции теплопроводности. Поскольку асимптотические разложения можно интегрировать, из указанного выше разложения мы получаем разложение логарифма произведения Вейерштрасса с точностью до конечного числа постоянных b_j . Здесь требуется некоторая осторожность при обращении с возможным слагаемым $1/z$. Следует различать два случая в зависимости от того, выполнено включение $1/\beta \in \mathbb{N}_{0,1}$ или нет¹⁾. Вторым шагом является нахождение пока что неизвестных постоянных b_j . Для этого нам потребуется ввести следующее аналитическое представление дзета-функции:

$$\zeta_\beta(s, 0) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{c,\theta}} e^{-\lambda t} \tilde{R}_\beta(\lambda, 0) d\lambda dt,$$

где $\Lambda_{c,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - c)| = \theta\}$ для некоторых вещественных $c < 1$ и $0 < \theta < \pi$ превращается в контур ганкелевского типа. Интегрируя по частям сначала по λ , а затем по t , мы получаем $\ln F_\beta$ вместо регуляризованной резольвенты и дополнительный множитель s . Присутствие последнего обеспечивает нуль второго порядка при $s = 0$ и позволяет применить стандартную технику²⁾ (см., например, [2]) и известное разложение логарифма $\ln F_\beta$, чтобы найти вычеты при $s = 0$. Сравнивая их со значениями дзета-функции Римана и ее производных, находим постоянные b_j . Мы получаем следующее утверждение³⁾.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для больших z при $\arg(z) \neq 0$ справедлива формула

$$\begin{aligned} \ln \Gamma_\beta(z) \sim & -\frac{1}{2} \ln z + \frac{\beta}{2} \ln 2\pi - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \zeta(-\beta m) z^{-m} - \gamma_\beta z \\ & + \begin{cases} \sum_{j=1}^p \frac{(-1)^{j+1}}{j} \zeta(\beta j) z^j + \frac{(-1)^{p+1} \pi}{\sin \pi(1/\beta - p)} z^{1/\beta}, & \text{если } \frac{1}{\beta} \notin \mathbb{N}, p = \left\lfloor \frac{1}{\beta} \right\rfloor \neq 0, \\ -\frac{\pi}{\sin(\pi/\beta)} z^{1/\beta}, & \text{если } \frac{1}{\beta} \notin \mathbb{N}, p = \left\lfloor \frac{1}{\beta} \right\rfloor = 0, \\ \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \zeta(\beta j) z^j + (-1)^{p+1} z^p [\ln z + \gamma_\beta], & \text{если } \frac{1}{\beta} = p \in \mathbb{N}_{0,1}. \end{cases} \end{aligned}$$

¹⁾Заметим, что в первом случае обязательно $\beta < 1$, так что второй случай содержит случай $\beta > 1$, $p = 0$. Заметим также, что $1/\beta$ всегда отличен от нуля, поскольку β предполагается конечным.

²⁾При модификации контура нужна некоторая осторожность.

³⁾Отметим, что последняя формула покрывает и случай $p = 1$.

В заключение отметим, что постоянная γ_β представляет собой естественное обобщение постоянной Эйлера $\gamma = \gamma_1$. Это можно увидеть, явно выписывая определяющий ряд или замечая, что $\gamma_\beta = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(\beta k)$. Из изложенных выше результатов следует также, что

$$\gamma_\beta = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \ln z \Gamma_\beta(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\tilde{R}_\beta(-z, 0) - \frac{1}{z} \right),$$

в согласии с классическим случаем и независимо от функционального уравнения. С другой стороны, для произвольного β уже неверно, что постоянная γ_β совпадает с неособой частью соответствующей дзета-функции $\zeta_\beta(s, 0)$ при $s = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Choi J., Quine J. R.* Rocky Mountain J. Math., **26**, 719–729 (1996).
2. *Gilkey P. B.* Invariance theorems, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem. Studies in Adv. Math. CRC Press, 1995.
3. *Morpurgo C.* Duke Math. J., **114**, 477–573 (2002).
4. *Mulholland H. P.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **24**, 280–289 (1928).
5. *Sarnak P.* Comm. Math. Phys., **110**, 113–120 (1987).
6. *Schuster R.* Z. Anal. Anwendungen, **11**, 229–236 (1992).
7. *Spreafico M.* Rocky Mountain J. Math., **33**, 1499–1512 (2003).
8. *Vardi I.* SIAM J. Math. Anal., **19**, 493–507 (1988).
9. *Voros A.* Comm. Math. Phys., **110**, 439–465 (1987).

ICMC, Universidade de São Paulo,
CEP 13560-970 São Carols, Brazil
e-mail: mauros@icmc.usp.br

Поступило в редакцию
23 апреля 2003 г.

УДК 512.772.5+517.546.3

Некоторые соотношения на двойные числа Гурвица*

© 2005. С. В. ШАДРИН

1. В этой заметке мы формулируем некоторые новые соотношения на двойные числа Гурвица. Эти соотношения приходят из теории пересечений на пространстве модулей кривых и являются прямым обобщением результатов, анонсированных в [3] и доказанных в [4].

Числа Гурвица, которые мы здесь изучаем, — это основной объект исследования в работе [2]. Мы рекомендуем работу [2], в частности, как хороший обзор по двойным числам Гурвица, содержащий наиболее полный набор ссылок по данной тематике.

2. Напомним определение чисел Гурвица. Зафиксируем целые числа $g \geq 0$, $n \geq 1$ и два неупорядоченных разбиения числа n на целые положительные слагаемые, $n = a_1 + \dots + a_p = b_1 + \dots + b_q$. Рассмотрим пространство $\mathbb{CP}^1$ с отмеченными точками $0, \infty$ и еще $2g + p + q - 2$ точками $z_1, \dots, z_{2g+p+q-2}$.

Множество мероморфных функций $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени n , определенных на кривых C рода g и таких, что $(f) = -\sum_{i=1}^p a_i x_i + \sum_{j=1}^q b_j y_j$ (x_i, y_j —

*Работа частично поддержана грантами РФФИ-01-01-00660, РФФИ-02-01-22004 и НШ-1972.2002.1.