Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, Группы перестановок, порожденные $(2, 2)$ -циклом и n -циклом, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 76–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:31:23

$\mathbb{C}^{k+1}$ и $\mathbb{C}^{k-1}$ в $\mathbb{C}^k$, в некоторых локальных координатах x, y имеют вид

$$\begin{aligned} C_{n,l}: \quad & f = xy, \quad g = x^n + y^l, \quad 2 \leq n \leq l, \\ F_{2n+1}: \quad & f = x^2 + y^3, \quad g = y^n, \quad n \geq 1, \\ F_{2n+4}: \quad & f = x^2 + y^3, \quad g = xy^n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти особенности входят в список простых особенностей проецирований на прямую полных пересечений [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Montaldi J. J. Differential Geom., **23**, No. 2, 109–126 (1986).
2. Koenderink J. J. Solid Shape, MIT, 1993.
3. Duc N. H., Pham F. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **291**, 113–116 (1980).
4. Горюнов В. В. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 1–8 (1981).
5. Казарян М. Э. Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. ВИНТИ, **33**, 1988, с. 215–234.

Московский авиационный институт

Поступило в редакцию
24 декабря 1996 г.

УДК 512.54

Группы перестановок, порожденные (2,2)-циклом и n -циклом

© 1997. Ю. Ю. Кочетков

В данной работе изучается подгруппа H симметрической группы S_n , порожденная двумя перестановками: n -циклом $a = (1, \dots, n)$ и $(2, 2)$ -циклом $b = (k, l)(m, p)$. Подгруппа H называется полной, если $H = S_n$ или $H = A_n$. Напомним, что H называется импримитивной подгруппой [1], если существует разбиение множества $\{1, \dots, n\}$ на непересекающиеся подмножества $M_1, \dots, M_s$, $s < n$, такие, что для любого $h \in H$ и любого $i \leq s$ существует $j \leq s$, такое, что $h(M_i) \subseteq M_j$. Если H не является импримитивной группой, то она называется примитивной. Группа H импримитивна, если $(l - k, p - m, n) > 1$ или $l - k = p - m$ и $m - l = n - p + k$ ($(\cdot, \cdot, \cdot)$ — наибольший общий делитель). Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если H не полна и примитивна, то либо $n = 6$ и $H = S_5$, либо $n = 7$ и $H = PSL_2(7)$.

Будут обсуждены приложения этого результата в теории групп монодромии плоских деревьев [3] и в теории Галуа. Методы настоящей работы являются развитием методов статьи [2], где характеризуются подгруппы, порожденные 2-циклом и произвольной перестановкой.

Пусть подгруппа $K \subseteq S_n$ порождена двумя перестановками: n -циклом $a = (1, \dots, n)$ и 3-циклом $b = (k, l, m)$, где $k < l < m$. Рассмотрим множество $M = \{1, \dots, n\}$. Три элемента $i_1, i_2, i_3 \in M$ образуют триаду, если 3-цикл

(i_1, i_2, i_3) сопряжен в K с b или с b^{-1} . Заметим, что 3-цикл $(k+i, l+i, m+i)$ (по модулю n) сопряжен с b . Такой цикл мы будем называть сдвигом цикла b .

ЛЕММА 1. Если две триады T_1 и T_2 пересекаются (как множества), то любое подмножество из трех элементов $\{i_1, i_2, i_3\} \subset T_1 \cup T_2$ является триадой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $T_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$, $T_2 = \{i_1, i_2, i_4\}$; тогда существует перестановка $h \in K$, такая, что $h(k) = i_1$, $h(l) = i_2$, $h(m) = i_3$. Так как цикл $c = (i_1, i_2, i_4)$ принадлежит K и $ch(k) = i_2$, $ch(l) = i_4$, $ch(m) = i_3$, то $\{i_2, i_3, i_4\}$ — триада. Аналогично, $\{i_1, i_3, i_4\}$ — триада.

б) Пусть $T_2 = \{i_1, i_4, i_5\}$. Рассуждая, как в а), получаем, что $\{i_2, i_3, i_4\}$ — триада, и т. д.

Множество триад $\{T_1, \dots, T_j\}$ образует цепочку, если $T_i \cap T_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, j-1$. Множество триад T называется связным, если для любых двух триад $T_1, T_2 \in T$ найдется цепочка триад $T_1 = T_{i_1}, \dots, T_{i_s} = T_2$, где все T_{i_j} принадлежат T .

ЛЕММА 2. Пусть T — связное множество триад и $\bigcup_{T_i \in T} T_i = M$; тогда K — полная подгруппа.

ЛЕММА 3. Если $d = (l-k, m-l, n) = 1$, то K — полная подгруппа. Если $d > 1$, то K импримитивна и имеет морфизм в $S_{n/d}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если K содержит два 3-цикла $c_1 = (i_1, i_2, i_3)$ и $c_2 = (j_1, j_2, j_3)$ и $d = (i_2 - i_1, i_3 - i_2, j_2 - j_1, j_3 - j_2, n) = 1$, то K полна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Изложенный выше метод аналогичен методу графов Пойа (с заменой графов на 3-графы).

Вернемся к случаю подгруппы H , порожденной n -циклом a и $(2, 2)$ -циклом $b = (k, l)(m, p)$. Мы будем рассматривать случай $k < l < m < p$, случай $k < m < l < p$ рассматривается аналогично. Пусть $x = l - k$, $y = m - l$, $z = p - m$, $u = n - p + k$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $x \leq z$, $y \leq u$. Пусть $(2, 2)$ -цикл $b' = (k', l')(m', p')$ является сдвигом цикла b и $\#(b \cap b') = \#(\{k, l, m, p\} \cap \{k', l', m', p'\}) = 1$. Тогда сопряжение цикла b с помощью b' дает $(2, 2)$ -цикл $b'' = (l, l')(m, p)$ (например) и произведение bb'' есть 3-цикл $c = (k, l, l')$. Теперь мы можем применить лемму 3 для описания подгруппы $K = \langle a, c \rangle \subseteq H$. Если K — полная подгруппа, то и H полная (обратное неверно). Описанный выше прием не работает в следующем случае: $\#(b \cap b') = 1$, но K импримитивна. Пересечение $b \cap b'$ непусто при сдвигах на 1) x , 2) $x + y$, 3) $x + y + z$, 4) y , 5) $y + z$, 6) z (достаточно рассматривать только эти шесть сдвигов). Прием не работает (т.е. не дает прямого доказательства полноты подгруппы H), если при каждом из сдвигов 1)–6) либо $\#(b \cap b') > 1$, либо K импримитивна. То есть каждый из сдвигов 1)–6) дает следующие альтернативы (запятая означает «или»):

- 1) $x = y$, $x = z$, $x = u$, $(x, n) > 1$;
- 2) $x = z$, $z = x + y$, $u = x + y$, $u = y$, $(x, z, n) > 1$;
- 3) $x = u$, $y = u$, $u = x + y$, $z = u$, $u = y + z$, $u = x + y + z$, $(x, z, n) > 1$;
- 4) $x = y$, $y = z$, $y = u$, $(x, z, n) > 1$;
- 5) $x = z$, $y = u$, $u = y + z$, $x + u = y + z$, $z = x + u$, $(x, z, n) > 1$;
- 6) $x = z$, $z = x + y$, $y = z$, $z = u$, $z = x + u$, $z = x + y + u$, $(z, n) > 1$.

Последнее условие в 2)–5) эквивалентно импримитивности H . Если выполнено и последнее условие в 1), и последнее условие в 6), то K содержит два 3-цикла. Если $(x, z, n) > 1$, то H импримитивна, а если $(x, z, n) = 1$, то K , а значит, и H полна. Таким образом, нужно рассмотреть три случая: а) $(x, n) > 1$ и $(z, n) = 1$; б) $(x, n) = 1$ и $(z, n) > 1$; в) $(x, n) = 1$ и $(z, n) = 1$. Эти три случая во многом аналогичны. Мы рассмотрим в) и укажем, какие отличия возникают в а) и б). Как отмечалось выше, если $x = z$ и $y = u$, то H импримитивна.

1. Пусть $x = z$ и $y < u$. Имеем

$$x = y \quad \text{и} \quad (u = x + y \quad \text{или} \quad u = 2x + y).$$

Если $x > 1$, то H импримитивна, а если $x = 1$, то $b = (1, 2)(3, 4)$, $n = 5, 6$ (b указывается с точностью до сдвига).

2. Пусть $x < z$ и $y = u$. Имеем

$$x = y \quad \text{и} \quad (z = x + y \quad \text{или} \quad z = x + 2y).$$

Если $x > 1$, то H импримитивна, а если $x = 1$, то либо $n = 5$ и $b = (1, 2)(3, 5)$, либо $n = 6$ и $b = (1, 2)(3, 6)$.

3. Пусть $x < z$ и $y < u$. Имеем следующие альтернативы в каждой строке:

- 1) $x = y$, $x = u$;
- 2) $z = x + y$, $u = x + y$;
- 3) $x = u$, $u = x + y$, $z = u$, $u = z + y$, $u = x + y + z$;
- 4) $x = y$, $y = z$;
- 5) $u = y + z$, $x + u = y + z$, $z = x + u$;
- 6) $z = x + y$, $y = z$, $z = u$, $z = x + u$, $z = x + y + u$.

Здесь всегда $x = y$ и либо $z = u = 2x$, $n = 6$, либо $z = 2x$, $u = 3x$, $n = 7$, либо $z = 3x$, $u = 2x$, $n = 7$. Если $x > 1$, то H импримитивна, а если $x = 1$, то $b = (1, 2)(3, 5)$, $n = 6, 7$, или $b = (1, 2)(3, 6)$, $n = 7$.

Если $(z, n) > 1$ и $(x, n) = 1$ (случай б)), то случаи 1) и 3) рассматриваются аналогично, а случай 2) ($x < z$ и $y = u$) дает $x = y$ и $(z, u) > 1$, т.е. $(z, 3x) > 1$. Если $(x, z) > 1$, то H импримитивна. Пусть $(x, z) = 1$ и $z = 3z_1$. Рассмотрим сдвиг цикла b на $x - b' = (l, m)(m+x, k)$ и $(2, 2)$ -цикл $b'' = b'bb' = (m, m+x)(l, p)$. Сдвинем b'' на z : $b''' = (k, p)(l+z, p+z)$. Так как $\#(b'' \cap b''') = 1$, то b'' и b''' порождают 3-цикл $c = (k, l, p)$. Так как $(x, z) = 1$, то K , а значит, и H — полная подгруппа.

Случай $k < m < l < p$ рассматривается аналогично. Таким образом, с точностью до сдвига, мы получаем следующий список (все остальные значения n и b приводят либо к полному, либо к импримитивному случаям):

1) $n = 5$, $b = (1, 2)(3, 4)$, $(1, 2)(3, 5)$, $(1, 3)(2, 4)$, $(1, 3)(2, 5)$. Здесь H всегда полна;

2) $n = 6$, $b = (1, 2)(3, 5)$, $(1, 3)(2, 4)$, $(1, 3)(2, 6)$. Здесь H импримитивна;

3) $n = 6$, $b = (1, 2)(3, 4)$, $(1, 3)(2, 5)$, $H = S_5$;

4) $n = 7$, $b = (1, 3)(3, 5)$, $(1, 2)(3, 6)$, $(1, 3)(2, 5)$, $(1, 3)(2, 6)$, $H = PSL_2(7)$.

Это и завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $H \subseteq S_n$ порождена n -циклом a и перестановкой b . Пусть $N \subseteq M$ — подмножество нестационарных для b элементов, b' — сдвиг b и N'

— подмножество нестационарных для b' элементов. Если $\#(N \cap N') = 1$, то рассмотрим перестановку $b'' = (b')^{-1}bb'$. Тогда $c = b^{-1}b''$ является 3-циклом, и мы можем использовать лемму 3 для описания подгруппы $K = \langle a, c \rangle \subseteq H$. В частности, если n — простое число, то K , а значит, и H полна.

Приложение к теории групп монодромии плоских деревьев [3]. Пусть T — плоское дерево с n ребрами, вершины которого раскрашены в два цвета — белый и черный — так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Определим перестановки ребер a и b : вращение вокруг белых вершин против часовой стрелки — перестановка a , вращение вокруг черных вершин против часовой стрелки — перестановка b . Отметим, что ab есть n -цикл. Подгруппа $H = \langle a, b \rangle \subseteq S_n$ называется группой монодромии дерева T . Если T имеет 2 черные вершины валентности 2, а остальные черные вершины имеют валентность 1, то H порождена n -циклом и $(2, 2)$ -циклом. Тогда из теоремы вытекает, что T либо общее, либо редуцируемое (т. е. имеющее морфизм как плоское дерево в дерево с меньшим числом ребер) (см. [3]), либо (с точностью до зеркального отражения)

$$T = ((())((()))((()))), \quad \text{либо} \quad T = ((())((()))((()))), \quad \text{либо} \quad T = ((())((()))((()))).$$

Приложение к теории Галуа. Пусть p — неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ровно две пары комплексно-сопряженных корней (остальные корни вещественные). Тогда если степень многочлена p проста и больше семи, то его группа Галуа полна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. Наука, М., 1976.
2. Janusz G. J. L'Enseign. Math., **38**, 41–53 (1992).
3. Кочетков Ю. Ю. УМН, **50**, 163–164 (1995).

Московский государственный институт
электроники и математики

Поступило в редакцию
1 декабря 1995 г.

УДК 517.5

Многопараметрический интерполяционный функтор и пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$

© 1997. Е. Д. НУРСУЛТАНОВ

1. Метод вещественной интерполяции, имеющий своим истоком фундаментальную теорему Марцинкевича, введен Лионсом и Петре в [1, 2]. Этот метод описывается функтором

$$\Phi_{\theta q}(\varphi) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \varphi(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

В [3] Петре заметил, что при широких условиях на функционал Φ данный функтор определяет интерполяционный метод с многими свойствами вещественного метода. Центральным результатом в этом направлении является теорема о