Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Полиморфизмы, джойнинги и тензорная простота динамических систем, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 45–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:56:02

УДК 512.54

Полиморфизмы, джойнинги и тензорная простота динамических систем

© 1997. В. В. Рыжиков

§1. Введение

В статье рассматриваются сохраняющие меру μ действия $\{T_g : g \in G\}$ группы G на пространстве Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, называемые динамическими системами, и группы унитарных операторов $\{T_g\}$ на $L_2(\mu)$: $(T_g f)(x) = f(T_g(x))$, индуцированных этими действиями. Преобразование T_g множества X и отвечающий ему оператор называются автоморфизмами и обозначаются одним и тем же символом.

Оператор $P: L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu')$ называется *марковским* (или *бистохастическим*), если P и P^* переводят неотрицательные функции в неотрицательные, а постоянную функцию в себя. Марковский оператор P связан с мерой ν на $X \times X$:

$$\forall f, f' \in L_2(\mu) \quad \langle Pf, f' \rangle = \int f \otimes f' d\nu.$$

Такие меры называются полиморфизмами (порядка 2), они введены в [3] (см. там же о соответствии между полиморфизмами и марковскими операторами). *Полиморфизм порядка n* есть мера на n -кубе $X^n = X \times \cdots \times X$ (n сомножителей), проекции которой на сомножители совпадают с μ . (Произведение n экземпляров меры μ обозначается через μ^n ; оператор, отвечающий мере $\mu \otimes \mu$, обозначается через Θ).

Джойнингом набора автоморфизмов $T_1, \dots, T_n$ называется полиморфизм порядка n , инвариантный относительно $T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$. О теории джойнингов и ее приложениях см. недавний обзор [14].

Мы говорим, что полиморфизм ν , заданный на X^n , принадлежит классу $M(m, n)$, $n > m > 1$, если его проекции на m -мерные грани декартова n -куба совпадают с мерой μ^m . Если для действия $\{T_g\}$ мера μ^n является единственной мерой класса $M(m, n)$, инвариантной относительно $T_g \otimes \cdots \otimes T_g$, то мы говорим, что это действие принадлежит классу $S(m, n)$ или обладает свойством $S(m, n)$.

Тензорно простым называется действие класса $S(3, 4)$. Авторы статьи [7] ввели в рассмотрение класс $PID = \bigcap_{n>2} S(2, n)$ (их результат: класс PID замкнут относительно декартовых произведений). В [9] доказано, что свойство $S(2, 4)$ влечет за собой $S(2, n)$ для всех $n > 4$. Как будет видно, $S(2p-1, 2p) = S(2, 4)$ для всех $p > 1$. Таким образом, класс тензорно простых действий совпадает с классом PID . Словосочетание «тензорная простота» подчеркивает, что

система и ее тензорная степень не имеют нетривиальных марковских сплетений (формальные определения см. ниже).

Открыты вопросы о совпадении классов $S(2, 3)$ и $S(3, 4)$ и существовании слабо перемешивающего $\mathbb{Z}$ -действия с нулевой энтропией, не принадлежащего классам $S(n, n + 1)$. Значительный интерес к этим задачам связан с тем, что в классе $S(3, 4)$ давняя проблема Рохлина о кратном перемешивании имеет положительное решение (см., например, [6, 9]).

1.1. Пример $\mathbb{Z}$ -действия класса $S(3, 4)$. Используя метод аппроксимаций [8], несложно построить автоморфизм T , удовлетворяющий следующему условию: для некоторой последовательности $k(i) \rightarrow \infty$

$$\forall A, B \quad \mu(T^{k(i)} A \cap B) \rightarrow \frac{1}{2}\mu(A \cap B) + \frac{1}{2}\mu(TA \cap B),$$

что эквивалентно слабой сходимости

$$T^{k(i)} \rightarrow Q = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}T.$$

(Из эргодичности такого автоморфизма T следует, что он обладает свойством слабого перемешивания: найдется последовательность $m(i) \rightarrow \infty$, такая, что $T^{m(i)} \rightarrow \Theta$.)

Пусть ν — некоторый эргодический джойнинг класса $M(3, 4)$. Рассмотрим оператор $P: L_2(\mu \otimes \mu \otimes \mu) \rightarrow L_2(\mu)$, соответствующий мере ν :

$$\forall f_1, f_2, f_3, f \in L_2(\mu) \quad \langle P(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3), f \rangle = \int_{X \times X \times X \times X} f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f \, d\nu.$$

Отметим, что из проекционных свойств меры ν вытекает, что $P(f \otimes g \otimes h)$ является постоянной функцией, если постоянна одна из функций f, g, h . Из инвариантности меры ν относительно $T \otimes T \otimes T$ вытекает условие сплетения

$$TP = P(T \otimes T \otimes T);$$

следовательно,

$$T^k P = P(T \otimes T \otimes T)^k, \quad QP = P(Q \otimes Q \otimes Q).$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I + T)P &= \frac{1}{2}P(I \otimes I \otimes I) + \frac{1}{2}P(T \otimes T \otimes T) = P(Q \otimes Q \otimes Q) \\ &= \frac{1}{8}(P(I \otimes I \otimes I) + P(I \otimes T \otimes T) + \dots + P(T \otimes T \otimes T)). \end{aligned}$$

Приняв во внимание эргодичность меры ν (эквивалентную неразложимости оператора P в сумму двух различных сплетающих марковских операторов), получаем

$$P = P(T \otimes I \otimes I) \quad \text{или} \quad P = P(T \otimes T \otimes I).$$

Так как $T^{m(i)} \rightarrow \Theta$, то в первом случае

$$P(f \otimes g \otimes h) = P(\Theta f \otimes g \otimes h) = \Theta f \Theta g \Theta h,$$

что влечет за собой

$$\nu = \mu \otimes \mu \otimes \mu \otimes \mu$$

(второй случай приводит к аналогичному заключению). Таким образом, автоморфизм T является тензорно простым.

Отметим, что этот результат можно получить также из глубокой теоремы [6]: автоморфизм с сингулярным спектром является тензорно простым.

1.2. Кратное перемешивание и джойнинги. Мы говорим, что преобразование T перемешивает с кратностью k , если для любых $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ при $|z_m - z_n| \rightarrow \infty$, $0 \leq m < n \leq k$,

$$\mu(T^{z_0} A_0 \cap T^{z_1} A_1 \cap \dots \cap T^{z_k} A_k) \rightarrow \mu(A_0) \mu(A_1) \dots \mu(A_k).$$

Известно (см., например, [6, 9]), что для перемешивающего автоморфизма T в предположении, что он не перемешивает с кратностью k , найдется мера $\nu \neq \mu^{k+1}$ класса $M(2, k+1)$ и последовательности $z_0(i), \dots, z_k(i) \rightarrow \infty$, такие, что

$$\mu(T^{z_0(i)} A_0 \cap T^{z_1(i)} A_1 \cap \dots \cap T^{z_k(i)} A_k) \rightarrow \nu(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_k).$$

Мера ν , конечно, инвариантна относительно $T \otimes \dots \otimes T$ ($k+1$ сомножителей).

Если же для перемешивающего автоморфизма T таких нетривиальных джойнингов (отличных от μ^{k+1}) нет, то T является перемешивающим порядка k .

Опишем приложение тензорной простоты и инварианта типа кратного перемешивания к задаче симметрии прошлого и будущего динамической системы. Примеры слабо перемешивающих автоморфизмов, не сопряженных своему обратному, были построены в [11]. Представляют интерес явные и простые инварианты, которые отличают некоторые автоморфизмы от их обратных.

Для некоторой последовательности $n(i) \rightarrow \infty$ и числа $a > 0$ найдется автоморфизм T с простым сингулярным спектром, такой, что для некоторой меры $\nu \in M(2, 3)$ выполнено следующее условие:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{B} \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{n(i)} B \cap T^{3n(i)} C) \geq a \nu(A \times B \times C),$$

причем

$$\mu(A \cap T^{-n(i)} A \cap T^{-3n(i)} A) \rightarrow \mu(A)^2.$$

(Конструкция такого автоморфизма T ввиду ограниченности объема статьи не приводится.)

Из сказанного непосредственно следует, что T и T^{-1} неизоморфны. Так как из [6] вытекает, что автоморфизм T является тензорно простым, получим $\nu = \mu \otimes \mu \otimes \mu$. Таким образом, на паре фиксированных последовательностей $\{n(i)\}$, $\{3n(i)\}$ автоморфизм T обладает свойством частичного кратного перемешивания:

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{n(i)} B \cap T^{3n(i)} C) \geq a \mu(A) \mu(B) \mu(C),$$

а его обратный этим свойством не обладает.

В §2 мы изложим фрагмент элементарной теории тензорной простоты, а в §§3, 4 установим тензорную простоту для некоторых классов динамических систем.

§2. Некоторые следствия тензорной простоты

Приведем определение тензорной простоты в терминах операторов. Пусть H — пространство функций из $L_2(X, \mu)$ с нулевым средним. Действие $\{T_g : g \in G\}$ принадлежит классу $S(3, 4)$, если существует единственный марковский оператор $J : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu \otimes \mu \otimes \mu)$, удовлетворяющий условиям

$$JH \subset H \otimes H \otimes H \quad \text{и} \quad JT_g = (T_g \otimes T_g \otimes T_g)J \quad \forall g \in G. \quad (1)$$

Этим условиям (при любом T_g) удовлетворяет *тривиальный* оператор, образ которого (по определению) есть одномерное пространство постоянных функций.

Назовем *внутренним централизатором* действия $T_g^{\otimes n} = T_g \otimes \dots \otimes T_g$ (n сомножителей) множество всех марковских операторов J , коммутирующих с $T_g^{\otimes n}$, таких, что полиморфизмы, отвечающие этим операторам, принадлежат классу $M(2n-1, 2n)$. Эквивалентное определение: внутренний централизатор действия $T_g^{\otimes n}$ состоит из таких марковских операторов J , что для любого набора марковских операторов $P_1, \dots, P_n : L_2 \rightarrow L_2$, один из которых равен Θ , выполняется соотношение

$$J(P_1 \otimes \dots \otimes P_n) = (P_1 \otimes \dots \otimes P_n)J = \Theta \otimes \dots \otimes \Theta.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (а) *Тензорная простота влечет за собой свойство $S(m, n)$ для всех $n > m > 1$.*

(б) *Для любого n тензорная простота действия T_g равносильна тривиальности внутреннего централизатора действия $T_g^{\otimes n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Покажем, что $S(3, 4)$ влечет за собой $S(4, 5)$ (общий случай рассматривается аналогично). Пусть действие T_g не принадлежит классу $S(4, 5)$. Найдется отличная от $\mu \otimes \mu \otimes \mu$ мера $\nu \in M(2, 3)$, инвариантная относительно $T_g \otimes T_g \otimes S_g$, где действие S_g изоморфно действию $T_g \otimes T_g \otimes T_g$. (Пространство $(X, \mathcal{B}, \mu)$ изоморфно всем пространствам вида $(X, \mathcal{B}, \mu) \times \dots \times (X, \mathcal{B}, \mu)$.) Пусть оператор $P : L_2 \otimes L_2 \rightarrow L_2$ отвечает полиморфизму ν , т. е.

$$\forall f_1, f_2, h \in L_2(\mu) \quad \langle P(f_1 \otimes f_2), h \rangle = \int (f_1 \otimes f_2 \otimes h) d\nu.$$

Для оператора J , связанного с P соотношением

$$\forall f_1, f_2, f'_1, f'_2 \in L_2(\mu) \quad \langle Jf_1, f_2 \otimes f'_1 \otimes f'_2 \rangle = \langle P(f_1 \otimes f_2), P(f'_1 \otimes f'_2) \rangle,$$

выполнены условия (1), что легко проверяется. Так как $T_g \in S(3, 4)$, получим, что J тривиален (ему отвечает мера $\mu \otimes \mu \otimes \mu \otimes \mu$). Тогда тривиален оператор P . Действительно, $\langle P(f_1 \otimes f_2), P(f_1 \otimes f_2) \rangle = 0$, если $\int f_1 d\mu = 0$; значит, $P(f_1 \otimes f_2) \equiv 0$. Мера ν , соответствующая оператору P , будет равна $\mu \otimes \mu \otimes \mu$. Получили противоречие.

(б) Пусть нетривиальный внутренний оператор J сплетает $T_g \otimes T_g \otimes T_g$ и T_g . Тогда J^*J — нетривиальный внутренний оператор, коммутирующий с $T_g \otimes T_g \otimes T_g$. Для $n = 3$ п. (б) доказан. Теперь определим оператор P :

$$\langle P(f_1 \otimes \dots \otimes f_5), f_6 \rangle = \langle J^*J(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3), J^*J(f_4 \otimes f_5 \otimes f_6) \rangle.$$

Проверяется, что P^*P — нетривиальный внутренний оператор, коммутирующий с $T_g \otimes T_g \otimes T_g \otimes T_g$. Если P^*P тривиален, то тривиален и P . Для $n = 4$ п. (b) доказан.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что из тривиальности внутреннего централизатора действия $T_g \otimes \cdots \otimes T_g$ вытекает тензорная простота действия T_g . $\square$

Рассмотрим случай расширений динамической системы, сохраняющих свойство кратного перемешивания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть S перемешивает с кратностью k , а косое произведение R , $R(x, y) = (S(x), T_x(y))$, является перемешивающим. Если все преобразования T_x коммутируют с некоторым тензорно простым действием Ψ (быть может, некоммутативным), то косое произведение R перемешивает с кратностью k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $k = 2$. Обозначим через λ меру $\mu \otimes \mu$, которая инвариантна относительно R . Пусть для некоторых последовательностей $z_0, z_1, z_2 \rightarrow \infty$ и некоторой меры $\nu \in M(2, 3)$ (класс $M(2, 3)$ рассматривается здесь относительно пространства $(X \times Y, \lambda)$)

$$\lambda(R^{z_0}A_0 \cap R^{z_1}A_1 \cap T^{z_2}A_2) \rightarrow \nu(A_0 \times A_1 \times A_2).$$

Мера ν задана на произведении $(X \times Y) \times (X \times Y) \times (X \times Y)$, которое нам удобно представить в виде $(X \times X \times X) \times (Y \times Y \times Y)$. Из того, что S перемешивает кратно, вытекает, что проекция меры ν на $(X \times X \times X)$ совпадает с $\mu \otimes \mu \otimes \mu$. Меру ν разложим в систему условных мер $\{\nu_w : w \in X \times X \times X\}$:

$$\nu(A_1 \times A_2 \times A_3 \times B_1 \times B_2 \times B_3) = \int_{A_1 \times A_2 \times A_3} \nu_w(B_1 \times B_2 \times B_3) dw.$$

Для почти всех w верно, что $\nu_w \in M(2, 3)$. Так как R коммутирует с $\Phi = I \otimes \Psi$, мера ν инвариантна относительно $\Phi \otimes \Phi \otimes \Phi$. Теперь получаем, что условные меры $\nu_w \in M(2, 3)$ инвариантны относительно $\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi$. Но Ψ есть тензорно простая система; следовательно, почти все ν_w равны $\mu \otimes \mu \otimes \mu$. Таким образом, мы получили, что $\nu = \lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$. Тем самым свойство кратного перемешивания порядка $k = 2$ установлено. Случай $k > 2$ рассматривается аналогично; при $k > 3$ нужно также применить предложение 2.1. $\square$

Понятие тензорной простоты близко по смыслу к свойству дизъюнктивности динамических систем: две системы T и S *дизъюнкты* (в смысле Фюрстенберга), если $\mu \otimes \mu$ — единственный джойнинг систем T и S .

Эквивалентное определение: две системы (стохастически) дизъюнкты, если они имеют единственное марковское сплетение Θ — оператор, образ которого есть одномерное пространство постоянных функций.

Классический пример: орициклический и геодезический потоки дизъюнкты (хотя они унитарно эквивалентны), что вытекает из результатов о К-свойстве геодезического потока [1], о равенстве нулю энтропии орициклического потока [5] и теоремы Фюрстенберга о дизъюнктивности К-системы и действия с нулевой энтропией (см. [9]). Последняя теорема следует из теоремы Пинскера: для любой динамической системы каждый К-фактор и фактор Пинскера независимы. Действительно, пусть ν — джойнинг T и S , где T есть К-автоморфизм, а S имеет

нулевую энтропию. Тогда у динамической системы $(T \times S, X \times X, \nu)$ координатные факторы (а они изоморфны S и T) независимы; следовательно, $\nu = \mu \otimes \mu$.

Со свойством тензорной простоты непосредственно связана давняя задача Фюрстенберга: если S и T дизъюнкты, будут ли дизъюнкты S и $T \otimes T$? Следующие утверждения демонстрируют эту связь и дополняют результаты [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Если автоморфизм S или автоморфизм T является тензорно простым и S и T дизъюнкты, то S и $T \otimes T$ также дизъюнкты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оператор P сплетает $T \otimes T$ и S , то оператор P^*P сплетает $T \otimes T$ с $T \otimes T$. Из дизъюнктности T и S вытекает, что

$$P(f \otimes \mathbb{I}) = P(\mathbb{I} \otimes f) = \text{Const} = \Theta f.$$

Легко видеть, что оператору P^*P отвечает мера $\eta \in M(3, 4)$, инвариантная относительно $T^{\otimes 4}$. Если автоморфизм T является тензорно простым, то $\eta = \mu^4$ и операторы P^*P и, следовательно, P тривиальны.

Если же S является тензорно простым, для аналогичной цели нужно рассмотреть оператор Q , сплетающий $S \otimes T$ и $R = T$ и удовлетворяющий условию $Q(f \otimes \mathbb{I}) = Q(\mathbb{I} \otimes f) = \text{Const}$. Оператор Q^*Q сплетает $S \otimes T$ с $S \otimes T$. Теперь определим оператор P :

$$\langle P(f_1 \otimes f_3), f_2 \otimes f_4 \rangle = \langle Q(f_1 \otimes f_2), Q(f_3 \otimes f_4) \rangle.$$

Оператор P^*P является внутренним и сплетает $S \otimes S$ с $S \otimes S$. В силу свойства тензорной простоты автоморфизма S оператор P^*P тривиален, а следовательно, тривиален Q . Таким образом, $T \otimes T$ и S дизъюнкты. $\square$

Доказательство следующего утверждения несложно получить из результатов [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть $\{T_i : i \in C\}$ — семейство попарно дизъюнктных тензорно простых преобразований, и пусть $\prod_{i \in D} T_i$ изоморфен $\prod_{i \in D'} T_j$, где $D, D' \subset C$. Тогда $D = D'$.*

§3. Некоторые тензорно простые системы

Тензорно простым является (любой) перемешивающий унипотентный поток на однородном пространстве $X = G/\Gamma$ конечного объема. Как будет показано далее, это утверждение вытекает из результатов [12]. М. Ратнер доказала, что любой эргодический джойнинг унипотентного потока является гладким: он сосредоточен на гладком подмногообразии $Y \subset X^n$ (X^n — декартова степень пространства X) и абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на Y . Назовем потоки с таким свойством S -потоками.

В [12] доказано больше: эргодическим джойнингом унипотентного потока является H -инвариантная мера, сосредоточенная на замкнутой орбите $Hx \subset X^n$ связной подгруппы H группы $G^{\otimes n}$. А. Н. Старков, используя этот факт, решил проблему о кратном перемешивании для однородных потоков [13]. Доказательство в [13] можно модифицировать: после того как проведена редукция к случаю унипотентных потоков, достаточно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Слабо перемешивающий S -поток является тензорно простым.*

СЛЕДСТВИЕ. *Унипотентный перемешивающий поток является тензорно простым и перемешивающим всех степеней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в §2, свойство $S(3, 4)$ эквивалентно свойству $S(2p - 1, 2p)$ для любого $p > 1$. Пусть размерность пространства X равна d и на нем действует S -поток $\{T_t\}$. Покажем, что поток принадлежит классу $S(n, n + 1)$ при $n > d$ (из этого следует тензорная простота потока $\{T_t\}$).

Фиксируем $n > d$ и предположим, что ν — эргодическая относительно $\{T_t \otimes \cdots \otimes T_t\}$ ($n + 1$ сомножителей) мера класса $M(n, n + 1)$. Предположим, что ν сосредоточена на гладком многообразии $Y \subset X^{n+1}$, $\dim(Y) < \dim(X^{n+1})$. Для некоторого фиксированного $\delta > 0$ рассмотрим множества

$$V_r = \bigcup_{0 < t_1, \dots, t_r < \delta} (T_{t_1} \otimes \cdots \otimes T_{t_r} \otimes I \otimes I \otimes \cdots)Y.$$

Так как множество V_r инвариантно относительно эргодического потока $T_t^{\otimes n+1}$ (поток T_t является слабо перемешивающим относительно μ), мера (объем) множества V_r равна 0 или 1. Последнее невозможно, если δ достаточно мало.

Таким образом, считаем, что $\mu^{n+1}(V_r) = 0$, а следовательно, $\dim(V_r) < \dim(X^{n+1})$. Начиная с некоторого r , размерности множеств V_r стабилизируются: $\dim(V_r) = \dim(V_{r+1})$. Это означает, что для достаточно малых $s_1, \dots, s_r$, $s, s > 0$,

$$(T_{s_1} \otimes \cdots \otimes T_{s_r} \otimes T_s \otimes I \otimes I \otimes \cdots)Y \subset V_r.$$

Переходя от многообразий к джойнингам, определим меры

$$\begin{aligned} \nu_{(t_1, \dots, t_{n+1})}(A_1 \times \cdots \times A_{n+1}) &= \nu(T_{-t_1}A_1 \times \cdots \times T_{-t_{n+1}}A_{n+1}), \\ \bar{\nu} &= \int_{0 < t_i < \delta} \nu_{(t_1, \dots, t_r, 0, 0, \dots)} dt_1 \cdots dt_r. \end{aligned}$$

При достаточно малом $s > 0$ получим, что мера $\bar{\nu}$ и ее сдвиг

$$(I_{(1)} \otimes \cdots \otimes I_{(r)} \otimes T_s \otimes I_{(r+2)} \otimes I_{(r+3)} \cdots \otimes I_{(n+1)})\bar{\nu}$$

имеют общую часть, так как обе эти меры абсолютно непрерывны относительно меры Лебега на V_r , а s мало. Поскольку разложение этих мер на эргодические компоненты известно (это сдвиги эргодической меры ν), получим

$$\nu_{(s_1, \dots, s_r, s, 0, 0, \dots)} = \nu_{(t_1, \dots, t_r, 0, 0, 0, \dots)}$$

(слева и справа выписаны эргодические компоненты). Таким образом,

$$\nu = (T_{s_1-t_1} \otimes \cdots \otimes T_{s_r-t_r} \otimes T_s \otimes \cdots \otimes I \otimes I \otimes \cdots)\nu.$$

Но из того, что мера ν принадлежит классу $M(n, n + 1)$ и инвариантна относительно $(\cdots \otimes T_s \otimes \cdots \otimes I \otimes \cdots)$ ($n + 1$ сомножителей), где T_s — слабо перемешивающий автоморфизм, следует $\nu = \mu^{n+1}$ (см. конец §3 и доказательство

леммы 4.4). Таким образом, для достаточно больших n мера μ^{n+1} — единственная $(T_t \otimes \cdots \otimes T_t)$ -инвариантная мера класса $M(n, n+1)$. Следовательно, поток является тензорно простым. $\square$

Действия с почти простым централизатором. Будем говорить, что действие Ψ имеет почти простой марковский централизатор $MC(\Psi)$, если для некоторого $a > 0$ найдется конечный набор операторов $\{Q_i\}$, $Q_i \in MC(\Psi)$, удовлетворяющих условиям:

- $Q_i^* Q_i > aI$, $Q_i Q_i^* > aI$;
- каждый неразложимый оператор $J \neq \Theta$, $J \in MC(\Psi)$, имеет вид $J = Q_m R$, где R — автоморфизм, коммутирующий с действием Ψ .

Неизвестно, является ли тензорно простым перемешивающее действие $\{T^i : i \in \mathbb{Z}\}$, марковский централизатор которого есть множество выпуклых сумм операторов T^i и оператора Θ . (В теории джойнингов это свойство обозначается через $MSJ(2)$.) Известно, что для слабо перемешивающих потоков $MSJ(2)$ влечет за собой тензорную простоту, а для дискретных действий эта задача еще не решена.

Напомним, что автоморфизм T частично перемешивает с показателем $a > 0$, если

$$\forall A, B \quad \liminf_i \mu(A \cap T^i B) \geq a \mu(A) \mu(B).$$

Рангом автоморфизма T называется минимальное натуральное число r , такое, что некоторая последовательность разбиений ξ_j вида

$$\xi_j = \{C_1^j, TC_1^j, T^2 C_1^j, \dots, T^{h_1(j)} C_1^j, \dots, C_r^j, TC_r^j, T^2 C_r^j, \dots, T^{h_r(j)} C_r^j, Q_j\}$$

стремится к разбиению на точки (заметим, что тогда $\mu(Q_j) \rightarrow 0$). (Если такого r нет, говорят, что T имеет бесконечный ранг.)

Частично перемешивающие (с показателем $0 < a < 1$) $\mathbb{Z}^n$ -действия конечного ранга служат примерами динамических систем, для которых выполнены условия следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.2. *Почти простое действие, централизатор которого содержит слабо перемешивающий не перемешивающий автоморфизм, является тензорно простым.*

Марковский сплетающий оператор назовем неразложимым, если ему отвечает эргодическая мера (для оператора, сплетающего T и S , мера эргодична относительно $T \otimes S$).

ЛЕММА 3.3. *Пусть J_i , $i \in \mathbb{N}$, — неразложимые марковские операторы, сплетающие почти простое действие $\{T_g : g \in G\}$ с его тензорным кубом. Если $J_0^* J_i \neq \Theta$ для всех $k \neq 0$, то для некоторых $z, w \in \mathbb{N}$ найдется автоморфизм R , коммутирующий с T_g , такой, что выполнено равенство $J_w = J_z R$.*

Доказательство леммы 3.3 является несложной модификацией доказательства теоремы 2 из [4].

Доказательство теоремы 3.2 проводится по следующей схеме. Пусть внутренний оператор $J : L_2 \rightarrow L_2 \otimes L_2 \otimes L_2$, сплетающий Ψ и $\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi$, является неразложимым.

Предположим, что J нетривиален: $J \neq J\Theta$. Покажем, что для некоторой последовательности $k(i) \rightarrow \infty$ последовательность операторов

$$J_i = (S^{k(i)} \otimes I \otimes I)J$$

удовлетворяет условиям леммы 3.3.

Пусть $S^{m(i)} \rightarrow D \neq \Theta$. Тогда D — марковский оператор, коммутирующий с действием Ψ . Так как $S^{-m(j)} \rightarrow D^*$, то

$$S_i = S^{m(i)-m(j(i))} \rightarrow D^*D \neq \Theta$$

для некоторой последовательности $j(i)$. Так как действие Ψ почти простое, оператор D имеет вид $\sum_k a_k P_k Q_k$, где P_k — операторы, являющиеся средними по некоторым мерам на групповом централизаторе $C(\Psi)$ действия Ψ . При $a > 0$ выполняется неравенство

$$D^*D > a \sum_k a_k^2 P_k^* P_k > a \left(\int_{C(\Psi)} R d\gamma_i(R) \right)^* \left(\int_{C(\Psi)} R d\gamma_i(R) \right)$$

(γ_i — некоторая нормированная мера на централизаторе). Следовательно,

$$J^*(D^*D \otimes I \otimes I)J > a J^* \left(\left(\int_{C(\Psi)} R d\gamma_i(R) \right)^* \left(\int_{C(\Psi)} R d\gamma_i(R) \right) \otimes I \otimes I \right) J,$$

причем последний оператор, что несложно доказать, будет нетривиальным. Так как

$$J^*(S_i \otimes I \otimes I)J \rightarrow J^*(D^*D \otimes I \otimes I)J \neq \Theta,$$

для достаточно больших i имеем

$$J^*(S_i \otimes I \otimes I)J \neq \Theta.$$

По лемме 3.3

$$J = (S_i \otimes I \otimes I)JR.$$

Так как слабое замыкание степеней автоморфизма S_i содержит оператор Θ , то для некоторого оператора Q из слабого замыкания множества $\{R^n : n > 0\}$ получим соотношение

$$J = (\Theta \otimes I \otimes I)JQ = J\Theta,$$

т. е. оператор J тривиален. $\square$

§4. Некоторые расширения, сохраняющие тензорную простоту

Если косое произведение имеет вид $R(x, y) = (S(x), T^{n(x)}(y))$, где T есть бернуллиевский сдвиг, то кроме очевидного S -фактора преобразование R обладает непрерывным семейством факторов. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ есть σ -алгебра, инвариантная относительно T ; тогда $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ инвариантна относительно R . Для бернуллиевского T можно указать непрерывное семейство разбиений $\{\xi_h : h \in (0, h(T))\}$, где ξ_h — образующее разбиение для фактора с энтропией, равной h . Отметим, что энтропия тензорно простого преобразования R равна

нулю (см. [7]), а последнее выполнено, когда $\int n(x) d\mu = 0$ и энтропия автоморфизма S равна нулю. Сказанное выше и следующая теорема позволяют строить тензорно простые системы с непрерывными семействами факторов.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть R, T — перемешивающие преобразования, где R есть косое произведение над S следующего вида:

$$R(x, y) = (S(s), T^{n(x)}(y)), \quad \int n(x) d\mu = 0.$$

(а) Если S принадлежит классу $S(p-1, p)$, то R также принадлежит классу $S(p-1, p)$;

(б) если S перемешивает с кратностью k , то R также перемешивает с кратностью k .

Теорема 4.1 вытекает из следующего утверждения (см. также доказательство предложения 2.2).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathcal{C}: X^n \rightarrow M(n-1, n)$. Если $(S, T^{f(x)})$ — перемешивающее косое произведение, где T — перемешивающее преобразование и $\int f d\mu = 0$, то уравнение

$$\mathcal{C}(S(x_1), \dots, S(x_n)) \equiv (T^{f(x_1)} \otimes \dots \otimes T^{f(x_n)}) \mathcal{C}(x_1, \dots, x_n)$$

имеет единственное решение $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_n) \equiv \mu^n$.

Доказательство проведем после вспомогательных утверждений.

Цилиндрическим каскадом называем отображение $(S, f): (X \times \mathbb{Z}) \rightarrow (X \times \mathbb{Z})$, определенное соотношением

$$(S, f)(x, a) = (S(x), a + f(x)) \quad \forall x \in X, \forall a \in \mathbb{Z},$$

где S — преобразование множества X , а $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$ — некоторая функция.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть S есть эргодическое преобразование и для функции $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$ выполнено условие $\int f(x) d\mu = 0$. Тогда

(а) цилиндрический каскад $(S, f): (X \times \mathbb{Z}) \rightarrow (X \times \mathbb{Z})$ является консервативной системой;

(б) для почти каждого $x \in X$ найдется бесконечная последовательность натуральных чисел $\{q_i(x)\}$, такая, что $q_0(x) = 0$, $q_i(x) < q_{i+1}(x)$ и для любого i

$$\sum_{n=0}^{q_i(x)-1} f(S^n(x)) = 0.$$

Доказательство теоремы см. в [10, 2]; п. (б) вытекает непосредственно из (а) и означает, что множество $\{N: \sum_{n=0}^N f(S^n(x)) = 0\}$ бесконечно для почти всех $x \in X$. (Отметим, что теорема, аналогичная п. (б), выполнена для потоков [15].)

ЛЕММА 4.4. Пусть T перемешивает и задана мера $\nu \in M(n, n+1)$. Если хотя бы одна из последовательностей $m_1(i), \dots, m_n(i)$ стремится к бесконечности при $i \rightarrow \infty$, то имеет место сходимость

$$\nu_i := (I \times T^{m_1(i)} \times \dots \times T^{m_n(i)})\nu \rightarrow \mu^{n+1}.$$

Доказательство проведем для случая $n = 2$. Рассмотрим оператор $P: L_2^{\otimes 2} \rightarrow L_2$, такой, что

$$\langle P(A \otimes B), C \rangle = \nu(A \times B \times C).$$

Предположим для определенности, что $m_1(i) \rightarrow \infty$. Нам нужно доказать, что

$$P_i := (T^{m_1(i)} \otimes T^{m_2(i)})P \rightarrow P\Theta \quad (i \rightarrow \infty)$$

(Θ — ортопроектор на пространство констант в $L_2(\mu)$). Для некоторой последовательности i' имеем

$$(T^{m_1(i')} \otimes T^{m_2(i')})P \rightarrow (\Theta \otimes Q)P = (\Theta \otimes \Theta)P,$$

где равенство возникает из-за того, что оператор P внутренний. Предельному оператору $(\Theta \otimes \Theta)P = P\Theta$ отвечает мера μ^3 . Так как мере ν_i соответствует оператор P_i , получим $\nu_{i'} \rightarrow \mu^3$. Отсюда вытекает, что $\nu_i \rightarrow \mu^3$, так как выбор сходящейся подпоследовательности $\nu_{i'}$ был произвольным. $\square$

ЛЕММА 4.5. *Если $(S, T^{f(x)})$ перемешивает, то при $i \rightarrow \infty$ для любого K мера множества $\{x : |F(x, i)| < K\}$ стремится к 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество вида

$$U = X \times \bigcup_{-N < i < N} T^i Y,$$

где $T^i Y$ — непересекающиеся множества, а число N выбрано так, чтобы выполнялось $a - 2(K/N) > 2\tilde{\mu}(U) > 0$. Требуемое множество Y всегда найдется (для построения можно воспользоваться известной леммой Рохлина–Халмоша).

Предположим, что для некоторой последовательности $i' \rightarrow \infty$ будет выполнено неравенство

$$\mu(\{x : |F(x, i')| < K\}) > a > 0.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(U \cap R^i U) > a\tilde{\mu}(U) - 2(K/N) > 2\tilde{\mu}(U)\tilde{\mu}(U),$$

что противоречит свойству перемешивания автоморфизма R . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Для простоты рассмотрим случай $n = 3$. Зададим метрику на множестве $M(2, 3)$. Пусть некоторое семейство $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ всюду плотно в $\mathcal{B}$ и задана биекция $\sigma: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$. Определим расстояние между мерами ν и η следующим образом:

$$\rho(\nu, \eta) = \sum_{i, j, k} 2^{-\sigma(i, j, k)} |\nu(B_i \times B_j \times B_k) - \eta(B_i \times B_j \times B_k)|.$$

Положим

$$F(x, i) = \sum_{n=0}^i f(S^{n-1}(x)).$$

Для всех i

$$\mathcal{C}(S^i(x), S^i(y), S^i(z)) \equiv (T^{F(x, i)} \otimes T^{F(y, i)} \otimes T^{F(z, i)})\mathcal{C}(x, y, z).$$

Из эргодичности $S \otimes S \otimes S$ вытекает, что почти всюду в $X \times X \times X$ либо $\mathcal{C}(x, y, z) \neq \mu^3$, либо $\mathcal{C}(x, y, z) \equiv \mu^3$. Пусть выполнено первое условие; тогда для некоторого $c > 0$ мера тех (x, y, z) , для которых $\rho(\mathcal{C}(x, y, z), \mu^3) > c$, больше, чем c . Для некоторых множества A , $\mu(A) > 0$, и числа $b > 0$ выполнено условие

$$\mu \otimes \mu(\{(y, z) : \rho(\mathcal{C}(x, y, z), \mu^3) > c\}) > b \quad \forall x \in A. \quad (4.1)$$

Заметим, что для почти всех точек из A множество $\{i' : S^{q_{i'}}(x) \in A\}$ бесконечно. Это вытекает из того, что преобразование $U(x) = S^{q_1}(x)$ (при условии, что число $q_1(x) > 0$ выбирается минимальным для всех x) обратимо почти всюду, а следовательно, сохраняет меру и для него выполняется свойство возвращаемости: для почти всех x множество $\{i' : U^{i'}(x) \in A\}$ бесконечно. Приходим к противоречию с предположением (4.1). Действительно, в силу теоремы 4.3 имеем (здесь мы обозначаем i' через i)

$$\mathcal{C}(S^{q_i}(x)(x), S^{q_i}(x)(y), S^{q_i}(x)(z)) \equiv (I \otimes T^{F(y, q_i(x))} \otimes T^{F(z, q_i(x))})\mathcal{C}(x, y, z).$$

Из лемм 4.4 и 4.5 при $x \in A$ получим, что

$$\mu \otimes \mu(\{(y, z) : \rho(\mathcal{C}(S^{q_i}(x)(x), S^{q_i}(x)(y), S^{q_i}(x)(z)), \mu^3) > c\}) \rightarrow 0.$$

Таким образом, для почти всех (x, y, z)

$$\mathcal{C}(S^{q_i}(x)(x), S^{q_i}(x)(y), S^{q_i}(x)(z)) \rightarrow \mu \otimes \mu \otimes \mu;$$

следовательно,

$$\mathcal{C}(x, y, z) \equiv \mu \otimes \mu \otimes \mu. \quad \square$$

Автор благодарен Б. М. Гуревичу, В. И. Оселедцу и А. М. Степину за консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аносов Д. В. Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды МИАН, **90** (1967).
2. Atkinson G. Recurrence of co-cycles and random walks. J. London Math. Soc., **13**, 486–488 (1976).
3. Вершик А. М. Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские процессы. Зап. науч. сем. ЛОМИ, **72**, 26–62 (1977).
4. Glasner E., Host B., Rudolph D. Simple systems and their higher order self-joinings. Israel J. Math., **78**, 131–142 (1992).
5. Гуревич Б. М. Энтропия потока орициклов. ДАН СССР, **136**, №4, 768–770 (1961).
6. Host B. Mixing of all orders and pairwise independent joinings of systems with singular spectrum. Israel J. Math., **76**, 289–298 (1991).
7. del Junco A., Rudolph D. On ergodic action whose self-joinings are graphs. Ergodic Theory Dynamical Systems, **7**, 531–557 (1987).
8. Каток А. Б., Степин А. М. Аппроксимации в эргодической теории. УМН, **22**, вып. 5, 81–106 (1967).
9. King J. Ergodic properties where order 4 implies infinite order. Israel J. Math., **80**, 65–86 (1992).

10. *Крыгин А. Б.* Пример цилиндрического каскада с аномальными метрическими свойствами. Вестник МГУ, сер. 1, №5, 26–32 (1975).
11. *Оселедец В. И.* Две неизоморфные динамические системы с одинаковым простым непрерывным спектром. Функц. анализ и его прил., **5**, вып. 3, 75–79 (1971).
12. *Ratner M.* On Raghunathan's measure conjecture. Ann. Math., **134**, 545–607 (1991).
13. *Старков А. Н.* О кратном перемешивании однородных потоков. ДАН, **333**, 28–31 (1993).
14. *Thouvenot J.-P.* Some properties and applications of joinings in ergodic theory. In: Ergodic Theory and Its Connections with Harmonic Analysis: Proceedings of the Alexandria 1993 Conference, K. E. Petersen and I. A. Salama, eds., LMS Lecture Note Series 205, 1995, pp. 207–235.
15. *Шнейберг И. Я.* Нули интегралов вдоль траекторий эргодических систем. Функц. анализ и его прил., **19**, вып. 2, 92–93 (1985).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
25 января 1996 г.