Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Драгович, Решения уравнения Янга и алгебраические кривые рода, большего 1, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 70–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:51:41

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, М., 1978. 2. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **90**, 1967. 3. Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M. Internat. J. Bifurcation and Chaos, **3**, No. 4, 803–842 (1993). 4. Богданов Р. И. Локальная орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости. Изд-во МГУ, 1993. 5. Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю. УМН, **46**, №1, 3–40 (1991).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Институт ядерной физики

Поступило в редакцию
7 июня 1995 г.

УДК 517.9+513.015.7

Решения уравнения Янга и алгебраические кривые рода, большего 1

© 1997. В. И. ДРАГОВИЧ

В конце восьмидесятых годов Бакстер и др. (см. [1]), исследуя так называемую модель Поттса, нашли решения уравнения Янга

$$RLL' = L'LR \quad (1)$$

и уравнения Янга–Бакстера

$$R^{12}(\Theta_1) R^{13}(\Theta_2) R^{23}(\Theta_3) = R^{23}(\Theta_3) R^{13}(\Theta_2) R^{12}(\Theta_1) \quad (2)$$

со спектральным параметром, который параметризован кривой рода, большего 1. Доказано, что такие решения не удовлетворяют условию $\Theta_3 = \Theta_2 - \Theta_1$, и поэтому казалось, что они никак не связаны с уже известными решениями.

Но В. В. Бажанов и Ю. Г. Строганов нашли следующую связь (см. [2]). Они решали уравнение (1), где в качестве (4×4) -матрицы R была взята R -матрица шестивершинной модели $R = R_{XXZ}$, и искали неизвестные $(2n \times 2n)$ -матрицы L и L' . (Дополнительно был задан вид матриц L и L' : $L(x) = xL_+ + x^{-1}L_-$.) Затем они рассматривали уравнение (1) с полученными таким образом матрицами L и L' как уравнение с неизвестной $(n^2 \times n^2)$ -матрицей R . Выяснилось, что в качестве решения появляется именно R -матрица модели Поттса.

В этой работе мы исследуем общие решения уравнения (1), где R — матрица размера $n^2 \times n^2$, а L и L' — матрицы размера $2n \times 2n$. Полученные матрицы будут иметь спектральные кривые рода, большего 1, с нетривиальной группой автоморфизмов. Напомним, что в случае модели Поттса появляется кривая Ферма, которая, как известно, имеет нетривиальную группу автоморфизмов.

1. Спектральные кривые. Алгебро-геометрическая параметризация четномерных матриц, основанная на понятии вакуумных векторов и связанных с

ними спектральных кривых, была предложена Кричевером (см. [3]). Любую четномерную матрицу L размера $2n \times 2n$ можно рассматривать как (2×2) -матрицу, элементы которой являются $(n \times n)$ -матрицами. Другими словами, L рассматривается как отображение $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$. Греческими символами будем обозначать блок, а латинскими — место в блоке. Назовем *вакуумными векторами* элементы пространства $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$ вида $X \otimes U$, которые L отображает в элементы того же вида $Y \otimes V$, т. е. $L(X \otimes U) = Y \otimes V$.

Вакуумные векторы параметризуются кривой Γ , которая задана уравнением

$$P(u, v) = \det(L_j^i(u, v)) = 0,$$

где $L_j^i = \tilde{V}^\beta L_{j\beta}^{i\alpha} U_\alpha$, $\tilde{V} = (1, -v)$, $X_n = U_2 = Y_n = V_2 = 1$ и $U_1 = u$, $V_1 = v$. Кривая Γ называется *спектральной кривой* матрицы L .

ЛЕММА 1. В общем случае род кривой Γ будет равен $(n-1)^2$. Вектор-функции X и Y имеют дивизоры степени $n^2 - n$, а U и V имеют дивизоры степени n , причем

$$D_X + D_U \sim D_Y + D_V.$$

Верно и обратное.

ЛЕММА 2. Пусть Γ — кривая рода $(n-1)^2$, пусть X , Y и U , V — заданные на ней вектор-функции с дивизорами степеней $n^2 - n$ и n соответственно, и пусть $D_X + D_U \sim D_Y + D_V$. Тогда существует однозначно, с точностью до умножения на константу, определенная матрица L размера $2n \times 2n$, такая, что

$$L(X \otimes U) = h(Y \otimes V),$$

где h — функция с дивизором нулей $D_Y + D_V$ и дивизором полюсов $D_X + D_U$, возникающая из условия нормировки.

2. Уравнение Янга с $(2n \times 2n)$ -, $(2n \times 2n)$ - и $(n^2 \times n^2)$ -матрицами. Рассмотрим уравнение Янга

$$L_{p\beta}^{ik\gamma} L_{q\gamma}^{l\alpha} R_{kl}^{ij} = R_{pq}^{kl} L_{k\beta}^{i\gamma} L_{l\gamma}^{j\alpha}, \quad (3)$$

где латинские индексы принадлежат множеству $\{1, \dots, n\}$, а греческие — множеству $\{1, 2\}$. Пусть $P(u, v) = 0$ и $P^1(u, v) = 0$ — уравнения кривых Γ и Γ^1 , которые являются спектральными для матриц L и L^1 . Абсолютно так же, как это было показано Кричевером в случае (4×4) -матриц, можно доказать, что для любого n из (3) следует, что соответствия $P(u, v) = 0$, $P^1(u^1, v^1) = 0$ коммутируют в смысле композиции. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} L_{p\beta}^{ik\gamma} L_{q\gamma}^{l\alpha} R_{kl}^{ij} (R^{-1}(X^1(v, w) \otimes X(u, v)) \otimes U) \\ = h(u, v) h_1(v, w) (Y^1(v, w) \otimes Y(u, v) \otimes W), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R_{pq}^{kl} L_{k\beta}^{i\gamma} L_{l\gamma}^{j\alpha} (X(\tilde{v}, w) \otimes X^1(u, \tilde{v}) \otimes U) \\ = h_1(u, \tilde{v}) h(\tilde{v}, w) R(Y(\tilde{v}, w) \otimes Y^1(u, \tilde{v})) \otimes W, \end{aligned} \quad (5)$$

В первом уравнении u, v, w удовлетворяли равенствам $P(u, v) = 0, P^1(v, w) = 0$, а во втором $u, \tilde{v}, w$ удовлетворяли $P^1(u, \tilde{v}) = 0, P(\tilde{v}, w) = 0$.

Так мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Равенства $P(u, v) = 0$ и $P^1(u^1, v^1) = 0$ задают коммутирующие в смысле композиции соответствия.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Матрица R размера $n^2 \times n^2$ имеет вакуумные векторы.*

Заметим, что в случае $n > 2$ в общем положении существование вакуумных векторов невозможно. В этом можно убедиться при рассмотрении вложения Сегре.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть задана кривая Γ рода $(n-1)^2$ и четыре n -компонентные вектор-функции X, U, Y, V с дивизорами степени $n^2 - n$, для которых $D_X + D_U \sim D_Y + D_V$. Тогда, с точностью до умножения на константу, однозначно определена матрица R размера $n^2 \times n^2$, такая, что имеет место равенство*

$$R(X \otimes U) = h(Y \otimes V).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = D_X + D_U$. Из теоремы Римана–Роха имеем

$$\dim L(D) = 2(n^2 - n) - (n-1)^2 + 1 = n^2.$$

Таким образом, координатные функции произведений $X \otimes U$ и $Y \otimes V$ составляют два базиса пространства $L(D)$, и мы определяем единственную матрицу перехода от одного базиса к другому, а это как раз матрица L , которую мы искали.

Тот факт, что равенства $P(u, v) = 0$ и $P^1(u^1, v^1) = 0$ коммутируют, дает две параметризации спектральной кривой Γ матрицы L : $P^1(u, \tilde{v}) = 0$ и $P^1(v, w) = 0$, которые определяют морфизм кривой $\Gamma: (u, \tilde{v}) \mapsto (v, w)$. Таким образом, мы получаем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. *Спектральная кривая Γ матрицы L , которая удовлетворяет уравнению Янга, имеет нетривиальную группу автоморфизмов.*

Нас интересует случай $n > 2$, т.е. $g(\Gamma) \geq 4$. Известно (см. [4]), что в случае кривых рода g , большего 4, существует только конечное число таких кривых с нетривиальной группой автоморфизмов, род которых ограничен числом $84(g-1)$. Результат теоремы 1, конечно, согласуется с моделью Поттса. Кривая, которая в этом случае возникает, является кривой Ферма и имеет нетривиальную группу автоморфизмов.

Из равенств (4) и (5) имеем следующие представления вакуумных векторов R -матрицы решения уравнения Янга (3) с данными матрицами L и L' размера $2n \times 2n$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X и X^1, Y и Y^1 суть n -компонентные вектор-функции на кривой Γ рода $(n-1)^2$, которые участвуют в представлении вакуумных векторов матриц L и L' размера $2n \times 2n$. Тогда если матрица R размера $n^2 \times n^2$ является решением уравнения (3), то она имеет следующие вакуумные представления:*

$$RX \cdot g_1 \otimes X^1 = X^1 \cdot g_2 \otimes X, \quad RY \cdot g_1 \otimes Y^1 = Y^1 \cdot g_2 \otimes Y,$$

где $g_1, g_2 \in \text{Aut } \Gamma$.

Построение решений в описанной алгебро-геометрической ситуации является предметом дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность Б. А. Дубровину и А. П. Веселову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baxter J., Perk J. H. H., Yang H. A.* Phys. Lett. A, **128**, No. 3, 4 (1988).
2. *Bazhanov V. V., Stroganov Yu. G.* Chiral Potts Model as a Descendant of the Six-Vertex Model. Preprint, 1989.
3. *Кричевер И. М.* Функц. анализ и его прил., **15**, 22–35 (1981).
4. *Гриффитс П., Харрис И.* Принципы алгебраической геометрии. Мир, М., 1978.

Математический институт,
Кнез Михайлова 35, 11000 Белград, Югославия

Поступило в редакцию
15 августа 1995 г.

УДК 514.853

Особенности контакта окружностей с поверхностями и флаги*

© 1997. В. М. ЗАКАЛЮКИН

Дискриминанты групп, порожденных отражениями, появляются в качестве бифуркационных диаграмм в различных классификационных задачах теории особенностей. Еще одна достаточно естественная задача такого типа, по-видимому, не изученная ранее, связана с особенностями контакта окружностей в трехмерном евклидовом пространстве с заданной поверхностью общего положения [1]. Она находит приложения, например, в компьютерной графике [2] и вкладывается в более общую задачу классификации особенностей контакта подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ с выбранным в этом пространстве полным или неполным флагом аффинных подпространств. Оказывается, что классы таких особенностей тесно связаны с краевыми особенностями, особенностями функций на многообразиях с углами [3], особенностями проектирований на прямую полных пересечений [4], уплощениями кривых [5] и т.д.

1. Пусть S^2 — некоторая сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, и пусть M_S^3 — трехмерное многообразие всех окружностей (включая окружности нулевого радиуса), лежащих на сфере S . Заметим, что M_S^3 диффеоморфно пространству, полученному из шара B , ограниченного сферой S , σ -раздутием его центра. Действительно, отображение, сопоставляющее окружности ее центр, является диффеоморфизмом вне множества больших кругов, диффеоморфного $\mathbb{R}P^2$ и отображаемого в центр шара B .

Пусть Γ — некоторая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Бифуркационным множеством $D(\Gamma, S) \subset M_S^3$ назовем множество окружностей, не трансверсальных Γ . Особенности бифуркационных множеств $D(\Gamma, S)$ опишем с помощью следующей конструкции. На пространстве пар $(f, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ гладких функций, заданных

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 96-01-00710 и INTAS 4373.