Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, Многопараметрический интерполяционный функтор и пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 79–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:55:49

— подмножество нестационарных для b' элементов. Если $\#(N \cap N') = 1$, то рассмотрим перестановку $b'' = (b')^{-1}bb'$. Тогда $c = b^{-1}b''$ является 3-циклом, и мы можем использовать лемму 3 для описания подгруппы $K = \langle a, c \rangle \subseteq H$. В частности, если n — простое число, то K , а значит, и H полна.

Приложение к теории групп монодромии плоских деревьев [3]. Пусть T — плоское дерево с n ребрами, вершины которого раскрашены в два цвета — белый и черный — так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Определим перестановки ребер a и b : вращение вокруг белых вершин против часовой стрелки — перестановка a , вращение вокруг черных вершин против часовой стрелки — перестановка b . Отметим, что ab есть n -цикл. Подгруппа $H = \langle a, b \rangle \subseteq S_n$ называется группой монодромии дерева T . Если T имеет 2 черные вершины валентности 2, а остальные черные вершины имеют валентность 1, то H порождена n -циклом и $(2, 2)$ -циклом. Тогда из теоремы вытекает, что T либо общее, либо редуцируемое (т.е. имеющее морфизм как плоское дерево в дерево с меньшим числом ребер) (см. [3]), либо (с точностью до зеркального отражения)

$$T = ((())((()))((()))), \quad \text{либо} \quad T = ((())((()))((()))), \quad \text{либо} \quad T = ((())((()))((()))).$$

Приложение к теории Галуа. Пусть p — неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ровно две пары комплексно-сопряженных корней (остальные корни вещественные). Тогда если степень многочлена p проста и больше семи, то его группа Галуа полна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. Наука, М., 1976.
2. Janusz G. J. L'Enseign. Math., **38**, 41–53 (1992).
3. Кочетков Ю. Ю. УМН, **50**, 163–164 (1995).

Московский государственный институт
электроники и математики

Поступило в редакцию
1 декабря 1995 г.

УДК 517.5

Многопараметрический интерполяционный функтор и пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$

© 1997. Е. Д. НУРСУЛТАНОВ

1. Метод вещественной интерполяции, имеющий своим истоком фундаментальную теорему Марцинкевича, введен Лионсом и Петре в [1, 2]. Этот метод описывается функтором

$$\Phi_{\theta q}(\varphi) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \varphi(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

В [3] Петре заметил, что при широких условиях на функционал Φ данный функтор определяет интерполяционный метод с многими свойствами вещественного метода. Центральным результатом в этом направлении является теорема о

реитерации [4, 5]:

$$(\bar{A}_{\Phi_1}, \bar{A}_{\Phi_2})_F = \bar{A}_{F(\Phi_1, \Phi_2)}, \quad (1)$$

показывающая, что задача интерполяции пары A_{Φ_1} , A_{Φ_2} сводится к интерполяции параметров Φ_1 и Φ_2 (см. [4]).

В данной заметке вводится функтор $\Phi_{\theta \vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, порождающий многопараметрическое пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$. Изучаются интерполяционные свойства этих пространств, которые, согласно (1), решают проблему реитерации для соответствующего метода. Предложенный метод многопараметрической интерполяции позволяет описать более тонкие шкалы пространств Бесова $B_{p\vec{q}}^\alpha$ и уточнить теорему о билинейной интерполяции.

Выражения вида $(\sum_k |\xi_k|^q)^{1/q}$, $(\int_\Omega |f|^q d\mu)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимаются как $\sup_k |\xi_k|$, $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ соответственно.

2. Пусть $0 < \theta < 1$ и $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — вектор с координатами, удовлетворяющими условию $1 \leq q_i \leq \infty$, $i = 1, \dots, n$, причем если $q_i = \infty$, то и $q_j = \infty$ для всех $j \geq i$. Такие векторы назовем допустимыми.

Определим функционал

$$\Phi_{\theta q_1}(\varphi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^*(\varphi))^{q_1} \right)^{1/q_1},$$

где $\{\xi_k^*(\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности

$$\xi_k(\varphi) = \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} |\varphi(t)|^{1/(1-\theta)} dt \right)^{1-\theta}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\Phi_{\theta q_1, q_2, \dots, q_{n-1}}(\varphi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^*(\varphi))^{q_{n-1}} \right)^{1/q_{n-1}}. \quad (2)$$

Тогда функционал $\Phi_{\theta q_1, \dots, q_n}$ определяется следующим образом:

$$\Phi_{\theta \vec{q}} = \Phi_{\theta q_1, \dots, q_n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k^*(\varphi))^{q_n} \right)^{1/q_n},$$

где $\{\eta_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности

$$\eta_k(\varphi) = \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k} (\xi_m^*(\varphi))^{q_{n-1}} \right)^{1/q_{n-1}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

с ξ_k^* из представления (2).

Областью определения данного функционала будет множество всех измеримых на $(0, \infty)$ функций, для которых $\Phi_{\theta \vec{q}}(\varphi) < \infty$.

Пусть (Ω, μ) — пространство с положительной мерой. Для μ -измеримой функции f введем функцию распределения $m(\sigma, f)$ по формуле $m(\sigma, f) = \mu\{x :$

$|f(x)| > \sigma\}$. Функция $f^*(t) = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \leq t\}$ называется невозрастающей перестановкой функции f . Многопараметрическое пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}(\Omega)$ определяется как класс всех измеримых на Ω функций, для которых при $1 - \theta = 1/p$

$$\|f\|_{L_{p\vec{q}}(\Omega)} = \Phi_{\theta\vec{q}}(f^*) < \infty.$$

Имеют место следующие свойства:

1°. Если $r = \min\{i : q_i \neq d_i, i = 1, \dots, n\}$ и $q_r < d_r$, то $L_{p\vec{q}} \hookrightarrow L_{p\vec{d}}$.

2°. Если $\mu(\Omega) < \infty$ и $p \leq r$, то $L_{r\vec{d}} \hookrightarrow L_{p\vec{q}}$.

3°. Неравенство Гёльдера. Если $\vec{p}, \vec{q}$ — допустимые векторы, то

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_{p\vec{q}}} \|g\|_{L_{p'\vec{q}'}} ,$$

где $1/p + 1/p' = 1/q_i + 1/q'_i = 1$.

4°. Неравенство Юнга (обобщенное). Пусть $\vec{q}_i$ — допустимые векторы, $\vec{1} \leq \vec{q}_i \leq \vec{\infty}$, $i = 1, 2, 3$, и $1 \leq s, p, r \leq \infty$. Тогда

$$\|f * g\|_{L_{s\vec{q}_1}} \leq c \|f\|_{L_{p\vec{q}_2}} \|g\|_{L_{r\vec{q}_3}},$$

где $1 + 1/s = 1/p + 1/r$ и $1/\vec{q}_1 = 1/\vec{q}_2 + 1/\vec{q}_3$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ и $\vec{q}, \vec{q}_0, \vec{q}_1$ — допустимые векторы. Тогда $(L_{p_0\vec{q}_0}, L_{p_1\vec{q}_1})_{\theta\vec{q}} = L_{p\vec{q}}$, где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\vec{q}_0 = (q_1, \dots, q_{r-1}, q_r^0, \dots, q_n^0)$, $\vec{d} = (d_1, \dots, d_m)$, $\vec{q}_1 = (q_1, \dots, q_{r-1}, q_r^1, \dots, q_n^1)$ — допустимые векторы и $q_r^0 \neq q_r^1$. Тогда

$$(L_{p\vec{q}_0}, L_{p\vec{q}_1})_{\theta\vec{d}} = L_{p\vec{q}},$$

где $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{r-1}, q_r, d_1, \dots, d_m)$, $1/q_r = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$.

3. Пусть $\bar{A} = (A_0, A_1)$ — совместимая пара нормированных пространств [1] и $K(t, a) = K(t, a, \bar{A}) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$ — функционал Петре. Определим пространство $\bar{A}_{\theta\vec{q}}$ как множество элементов a из $\Sigma(\bar{A})$, для которых

$$\|a\|_{\bar{A}_{\theta\vec{q}}} = \Phi_{\theta\vec{q}}(K(t, a)/t) < \infty.$$

Заметим, что в случае $\vec{q} = (q, \dots, q)$ $\bar{A}_{\theta\vec{q}}$ совпадает с пространством $A_{\theta q}$, полученным путем применения вещественного метода.

ТЕОРЕМА 3. (а) Пространство $\bar{A}_{\theta\vec{q}}$ является промежуточным относительно пары $\bar{A} = (A_0, A_1)$, т. е. $\Delta(\bar{A}) \subset \bar{A}_{\theta\vec{q}} \subset \Sigma(\bar{A})$.

(б) Если T — линейный оператор, $T: (A_0, A_1) \rightarrow (B_0, B_1)$, то $T: \bar{A}_{\theta\vec{q}} \rightarrow \bar{B}_{\theta\vec{q}}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\bar{A} = (A_0, A_1)$ — совместимая пара.

(а) Если $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\vec{d} = (d_1, \dots, d_n)$ — допустимые векторы, $r = \min\{i : q_i \neq d_i, i = 1, \dots, n\}$ и $q_r < d_r$, то $\bar{A}_{\theta\vec{q}} \subset \bar{A}_{\theta\vec{d}}$.

(6) Если $\Delta(\bar{A})$ плотно в A_0 и A_1 и $\bar{1} \leq \bar{q} < \infty$, $0 < \theta < 1$, то $(A_0, A_1)_{\theta \bar{q}}^* = (A_0^*, A_1^*)_{\theta \bar{q}'}$, где $1/q_i + 1/q'_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 5 (о реитерации). Пусть $\bar{A} = (A_0, A_1)$ — совместимая банахова пара, $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{d}$ — допустимые векторы, $r = \min\{i : q_i^0 \neq q_i^1, i = 1, \dots, n\}$. Тогда при $\bar{q} = (q_1^0, \dots, q_{r-1}^0, q_r, d_1, \dots, d_m)$, $1/q_r = (1 - \eta)/q_r^0 + \eta/q_r^1$

$$(\bar{A}_{\theta \bar{q}_0}, \bar{A}_{\theta \bar{q}_1})_{\eta \bar{d}} = \bar{A}_{\theta \bar{q}}.$$

Если $\theta_0 \neq \theta_1$ и $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$, то

$$(\bar{A}_{\theta_0 \bar{q}_0}, \bar{A}_{\theta_1 \bar{q}_1})_{\eta \bar{d}} = \bar{A}_{\theta \bar{d}}.$$

ТЕОРЕМА 6 (о билинейной интерполяции). Пусть T — билинейный оператор, $T: (A_0, A_1) \times (B_0, B_1) \rightarrow (C_0, C_1)$. Тогда $T: \bar{A}_{\theta p \bar{d}} \times \bar{B}_{\theta r \infty} \rightarrow \bar{C}_{\theta q \bar{d}}$ и, в частности, $T: \bar{A}_{\theta p} \times \bar{B}_{\theta r \infty} \rightarrow \bar{C}_{\theta q}$. Здесь $1 + 1/q = 1/p + 1/r$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$.

Автор выражает глубокую признательность В. И. Овчинникову за полезные обсуждения результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lions J.-L. I–III, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13**, 389–403 (1959); Ibid, **14**, 317–331 (1960); J. Math. Pures Appl., **42**, 195–203 (1963).
2. Lions J.-L., Peetre J. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **19**, 5–68 (1964).
3. Peetre J. Lecture Notes, Brasilia, 1963 [Notas de Matematica, Vol. 39, 1968, pp. 1–68].
4. Дмитриев В. И., Овчинников В. И. ДАН СССР, **246**, №4, 794–797 (1979).
5. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. ДАН СССР, **256**, №1, 14–17 (1981).

Институт прикладной математики
НАН Республики Казахстан

Поступило в редакцию
6 июня 1995 г.
В переработанном виде
27 марта 1996 г.

УДК 512.7+514.14

Замечание о полиноме Гильберта сферического многообразия*

© 1997. А. Ю. Окуньков

Красивая формула для степени сферического многообразия была получена Б. Я. Казарновским [7] (в частном случае) и М. Брионом [4] (в общем случае). Эта формула обобщает теорему Кушниренко [8] (см. также, например, [11] и [1]). Для нормального сферического многообразия Брион вычислил весь полином Гильберта. Мы сформулируем эти результаты в следующей форме.

* Автор благодарен Международному научному фонду и Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку