Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Окуньков, Замечание о полиноме Гильберта сферического многообразия, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:25:38

(6) Если $\Delta(\bar{A})$ плотно в A_0 и A_1 и $\bar{1} \leq \bar{q} < \infty$, $0 < \theta < 1$, то $(A_0, A_1)_{\theta \bar{q}}^* = (A_0^*, A_1^*)_{\theta \bar{q}'}$, где $1/q_i + 1/q'_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 5 (о реитерации). Пусть $\bar{A} = (A_0, A_1)$ — совместимая банахова пара, $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \bar{d}$ — допустимые векторы, $r = \min\{i : q_i^0 \neq q_i^1, i = 1, \dots, n\}$. Тогда при $\bar{q} = (q_1^0, \dots, q_{r-1}^0, q_r, d_1, \dots, d_m)$, $1/q_r = (1 - \eta)/q_r^0 + \eta/q_r^1$

$$(\bar{A}_{\theta \bar{q}_0}, \bar{A}_{\theta \bar{q}_1})_{\eta \bar{d}} = \bar{A}_{\theta \bar{q}}.$$

Если $\theta_0 \neq \theta_1$ и $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$, то

$$(\bar{A}_{\theta_0 \bar{q}_0}, \bar{A}_{\theta_1 \bar{q}_1})_{\eta \bar{d}} = \bar{A}_{\theta \bar{d}}.$$

ТЕОРЕМА 6 (о билинейной интерполяции). Пусть T — билинейный оператор, $T: (A_0, A_1) \times (B_0, B_1) \rightarrow (C_0, C_1)$. Тогда $T: \bar{A}_{\theta p \bar{d}} \times \bar{B}_{\theta r \infty} \rightarrow \bar{C}_{\theta q \bar{d}}$ и, в частности, $T: \bar{A}_{\theta p} \times \bar{B}_{\theta r \infty} \rightarrow \bar{C}_{\theta q}$. Здесь $1 + 1/q = 1/p + 1/r$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$.

Автор выражает глубокую признательность В. И. Овчинникову за полезные обсуждения результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lions J.-L. I–III, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13**, 389–403 (1959); Ibid, **14**, 317–331 (1960); J. Math. Pures Appl., **42**, 195–203 (1963).
2. Lions J.-L., Peetre J. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **19**, 5–68 (1964).
3. Peetre J. Lecture Notes, Brasilia, 1963 [Notas de Matematica, Vol. 39, 1968, pp. 1–68].
4. Дмитриев В. И., Овчинников В. И. ДАН СССР, **246**, №4, 794–797 (1979).
5. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. ДАН СССР, **256**, №1, 14–17 (1981).

Институт прикладной математики
НАН Республики Казахстан

Поступило в редакцию
6 июня 1995 г.
В переработанном виде
27 марта 1996 г.

УДК 512.7+514.14

Замечание о полиноме Гильберта сферического многообразия*

© 1997. А. Ю. Окуньков

Красивая формула для степени сферического многообразия была получена Б. Я. Казарновским [7] (в частном случае) и М. Брионом [4] (в общем случае). Эта формула обобщает теорему Кушниренко [8] (см. также, например, [11] и [1]). Для нормального сферического многообразия Брион вычислил весь полином Гильберта. Мы сформулируем эти результаты в следующей форме.

* Автор благодарен Международному научному фонду и Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку

Пусть дано представление редуктивной группы G в линейном пространстве V . Пусть X — неприводимое G -инвариантное подмногообразие проективного пространства $\mathbb{P}(V)$. Многообразие X называется *сферическим*, если борелевская подгруппа B группы G имеет на X открытую орбиту.

Пусть P — решетка весов группы G и $L = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ — вещественное линейное пространство, натянутое на P . С многообразием X можно связать некоторый выпуклый многогранник $\Gamma(X) \subset L$. Для этого обозначим через $F[X]$ однородное координатное кольцо многообразия X ; оно градуировано степенью многочленов:

$$F[X] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} F[X]_n.$$

Разложим пространство $F[X]_n$ на неприводимые G -модули:

$$F[X]_n = \bigoplus_{\lambda} m_{\lambda,n} V^{\lambda},$$

где V^{λ} — неприводимый G -модуль со старшим весом λ , а $m_{\lambda,n}$ — его кратность в модуле $F[X]_n$. В случае сферического многообразия X всегда $m_{\lambda,n} \in \{0, 1\}$, иными словами, спектр всегда простой. По определению [3]

$$\Gamma(X) = \text{выпуклая оболочка } \{\lambda/n \mid m_{\lambda,n} \neq 0\}.$$

Легко проверить [3], что это многогранник. Над комплексным полем многогранник $\Gamma(X)$ может быть эквивалентным образом определен как пересечение образа отображения момента с камерой Вейля [3] (см. также [5] и [6]).

Если многообразие X нормально, то, как показал Брион,

$$F[X]_n = \bigoplus_{\lambda \in n\Gamma(X) \cap P'} V^{\lambda},$$

где P' — некоторая подрешетка в P ; ее определение см. в [4]. Следовательно, по формуле Г. Вейля

$$\dim F[X]_n = \sum_{\lambda \in n\Gamma(X) \cap P'} \dim V^{\lambda} = \sum_{\lambda \in n\Gamma(X) \cap P'} \prod_{\alpha > 0} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}, \quad (1)$$

где α пробегает положительные корни $\alpha \in P$, а ρ есть полусумма положительных корней. Из этой формулы вытекает, что

$$\deg X = (\dim X)! \int_{\Gamma(X)} \prod_{\alpha > 0, (\lambda, \alpha) \neq 0} \frac{(\lambda, \alpha)}{(\rho, \alpha)} d\lambda,$$

где мера Лебега $d\lambda$ нормирована так, что объем ячейки решетки P' равен единице. Последняя формула верна и для многообразия X , не являющегося нормальным. Если группа G есть тор, то подынтегральная функция превращается в единицу и получается теорема Кушниренко о степени торического многообразия

$$\deg X = (\dim X)! \operatorname{vol} \Gamma(X).$$

Наше замечание теперь состоит в том, что для любой классической группы G и любого сферического G -многообразия X можно определить в вещественном пространстве $\mathbb{R}^{\dim B}$ размерности $\dim B$ многогранник $\Delta(X)$ и решетку $\tilde{P}$ со следующими свойствами:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если многообразие X нормально, то*

$$\dim F[X]_n = \text{card} \{n \Delta(X) \cap \tilde{P}\}, \quad (2)$$

т. е. полином Гильберта многообразия X совпадает с полиномом Эртарта многогранника $\Delta(X)$. Для любого многообразия X

$$\deg X = (\dim X)! \text{vol } \Delta(X),$$

где объем нормирован так, что объем ячейки $\tilde{P}$ равен единице.

Определение многогранника $\Delta(X)$ чрезвычайно просто. Напомним, что с каждым неприводимым представлением V^λ классической группы G связан многогранник Гельфанда–Цетлина, который мы обозначим через $\Delta(\lambda)$. Для группы $GL(k)$ многогранник $\Delta(\lambda)$ задается неравенствами промежуточности

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \dots & & \lambda_k \\ & x_1 & & x_2 & & \dots & & x_{k-1} \\ & & y_1 & & y_2 & & \dots & \\ & & & \dots & & & & \end{array}$$

где $x_1, x_2, \dots, y_1, \dots$ суть вещественные переменные, а запись

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ & x_1 \end{array}$$

означает, что $\lambda_1 \geq x_1 \geq \lambda_2$. Определение многогранников Гельфанда–Цетлина для ортогональной и симплектической групп см. в [2]. Во всех случаях $\Delta(\lambda)$ лежит в вещественном пространстве той же размерности, что и размерность максимальной унипотентной подгруппы $N \subset G$. Для нас важно следующее свойство многогранника $\Delta(\lambda)$:

$$\dim V^\lambda = \text{число целых точек в } \Delta(\lambda). \quad (3)$$

Определим $\Delta(X)$ как следующее подмножество пространства $L \oplus \mathbb{R}^{\dim N} = \mathbb{R}^{\dim B}$:

$$\Delta(X) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma(X)} (\lambda, \Delta(\lambda)).$$

Поскольку $\Delta(\lambda)$ есть выпуклый многогранник, линейно зависящий от $\lambda \in L$, множество $\Delta(X)$ — выпуклый многогранник. Его можно рассматривать как расслоение над $\Gamma(X)$ со слоем $\Delta(\lambda)$. Наконец, положим

$$\tilde{P} = P' \oplus \mathbb{Z}^{\dim N} \subset L \oplus \mathbb{R}^{\dim N}.$$

В силу (3) равенство (2) есть простая переформулировка (1).

Определение многогранника $\Delta(X)$ можно сделать менее формальным. Можно указать процедуру построения выпуклых многогранников по любым неприводимым проективным многообразиям [9]. При этом многогранники $\Delta(\lambda)$ будут отвечать многообразиям флагов группы G [10].

Я благодарен М. Бриону, В. А. Гинзбургу, Б. Я. Казарновскому, Г. И. Олшанскому и А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Atiyah M. F.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **26**, No. 2, 121–133 (1983).
2. *Berenstein A., Zelevinski A.* J. Geom. Phys., **5**, No. 3 (1989).
3. *Brion M.* In: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin. Lect. Notes in Math., Vol. 1296, Springer-Verlag, 1987.
4. *Brion M.* Duke Math. J., **58**, 397–424 (1989).
5. *Guillemin V., Sternberg S.* Invent. Math., **67**, No. 3, 515–538 (1982).
6. *Heckmann G. J.* Invent. Math., **67**, 333–356 (1982).
7. *Казарновский Б. Я.* Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 4 (1987).
8. *Kouchnirenko A.* Invent. Math., **32**, 1–31 (1976).
9. *Okounkov A.* Invent. Math., **125**, 405–411 (1996).
10. *Okounkov A.* to appear in A. A. Kirillov anniversary volume, Adv. Sov. Math., Am. Math. Soc.
11. *Хованский А. Г.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 4, 57–63 (1992).

Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: okounkov@ippi.ac.msk.su

Поступило в редакцию
25 декабря 1995 г.

УДК 517.53/.578, 517.95/.957

Предельное поведение спектра в одном классе больших случайных матриц*

© 1997. А. Ю. ПЛАХОВ

1. Уравнение Марченко–Пастура. В статье В. А. Марченко и Л. А. Пастура [1] рассматривается случайный самосопряженный оператор в $\mathbb{C}^N$ вида $A_N = A_{0N} + \sum_{n=1}^m \tau_n(\cdot, q^n) q^n$, где τ_n — действительные независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $\sigma(\tau)$, случайные векторы q^n независимы и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, а оператор A_{0N} неслучаен. Далее, с помощью формулы $\nu_N(\lambda) = \{\text{число собственных значений } A_N, \text{ меньших, чем } \lambda\}/N$ определяется нормированная спектральная функция оператора A_N . Марченко и Пастур доказали, что если (i) $\lim_{N \rightarrow \infty} (m/N) = c$ и (ii) последовательность нормированных спектральных функций операторов A_{0N} сходится к некоторой монотонно неубывающей функции $\nu_0(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности, то $\nu_N(\lambda)$ сходится по вероятности к неслучайной неубывающей функции $\nu(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности и преобразование Стильтеса этой функции, $u(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - z)^{-1} d\nu(\lambda)$, может быть найдено следующим образом.

* Эта работа выполнена при частичной поддержке фондов INTAS, грант RFBR 95418, RFFI-DFG, грант 96-01-000436.