Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Плахов, Предельное поведение спектра в одном классе больших случайных матриц, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:19:47

В силу (3) равенство (2) есть простая переформулировка (1).

Определение многогранника $\Delta(X)$ можно сделать менее формальным. Можно указать процедуру построения выпуклых многогранников по любым неприводимым проективным многообразиям [9]. При этом многогранники $\Delta(\lambda)$ будут отвечать многообразиям флагов группы G [10].

Я благодарен М. Бриону, В. А. Гинзбургу, Б. Я. Казарновскому, Г. И. Олшанскому и А. Г. Хованскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Atiyah M. F.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **26**, No. 2, 121–133 (1983).
2. *Berenstein A., Zelevinski A.* J. Geom. Phys., **5**, No. 3 (1989).
3. *Brion M.* In: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin. Lect. Notes in Math., Vol. 1296, Springer-Verlag, 1987.
4. *Brion M.* Duke Math. J., **58**, 397–424 (1989).
5. *Guillemin V., Sternberg S.* Invent. Math., **67**, No. 3, 515–538 (1982).
6. *Heckmann G. J.* Invent. Math., **67**, 333–356 (1982).
7. *Казарновский Б. Я.* Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 4 (1987).
8. *Kouchnirenko A.* Invent. Math., **32**, 1–31 (1976).
9. *Okounkov A.* Invent. Math., **125**, 405–411 (1996).
10. *Okounkov A.* to appear in A. A. Kirillov anniversary volume, Adv. Sov. Math., Am. Math. Soc.
11. *Хованский А. Г.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 4, 57–63 (1992).

Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: okounkov@ippi.ac.msk.su

Поступило в редакцию
25 декабря 1995 г.

УДК 517.53/.578, 517.95/.957

Предельное поведение спектра в одном классе больших случайных матриц*

© 1997. А. Ю. ПЛАХОВ

1. Уравнение Марченко–Пастура. В статье В. А. Марченко и Л. А. Пастура [1] рассматривается случайный самосопряженный оператор в $\mathbb{C}^N$ вида $A_N = A_{0N} + \sum_{n=1}^m \tau_n(\cdot, q^n) q^n$, где τ_n — действительные независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $\sigma(\tau)$, случайные векторы q^n независимы и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, а оператор A_{0N} неслучаен. Далее, с помощью формулы $\nu_N(\lambda) = \{\text{число собственных значений } A_N, \text{ меньших, чем } \lambda\}/N$ определяется нормированная спектральная функция оператора A_N . Марченко и Пастур доказали, что если (i) $\lim_{N \rightarrow \infty} (m/N) = c$ и (ii) последовательность нормированных спектральных функций операторов A_{0N} сходится к некоторой монотонно неубывающей функции $\nu_0(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности, то $\nu_N(\lambda)$ сходится по вероятности к неслучайной неубывающей функции $\nu(\lambda)$ во всех ее точках непрерывности и преобразование Стильтеса этой функции, $u(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - z)^{-1} d\nu(\lambda)$, может быть найдено следующим образом.

* Эта работа выполнена при частичной поддержке фондов INTAS, грант RFBR 95418, RFFI-DFG, грант 96-01-000436.

Обозначим через $u(z, t)$ решение дифференциального уравнения в частных производных

$$\partial u(z, t)/\partial t + c\tau(t)(1 + \tau(t)u(z, t))^{-1} \partial u(z, t)/\partial z = 0 \quad (1)$$

с начальным условием $u(z, 0) = u_0(z)$, где $\tau(t) = \inf_{\tau} \{ \tau : \sigma(\tau) \geq t \}$, $u_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - z)^{-1} d\nu_0(\lambda)$. Тогда $u(z) = u(z, 1)$.

Отметим, что уравнение подобного вида возникает также при изучении безгранично делимых мер в некоммутативной теории вероятностей (см., например, [2]).

Марченко и Пастур [1] предложили также следующее простое правило, позволяющее отыскать все интервалы действительной оси, дополнительные к спектру, т. е. интервалы, на которых функция $\nu(\lambda)$ постоянна.

Пусть $I_0 = \bigcup_i I_{0i} \subset \mathbb{R}$ — объединение максимальных интервалов постоянства функции ν_0 . На каждом интервале I_{0i} функция $u_0(z)$ действительнoзначна и монотонно возрастает; следовательно, существует обратная к ней функция $x_{0i}(u)$. Введем функцию $x_i(u) = x_{0i}(u) + J(u)$, определенную на множестве $u_0(I_{0i}) \cap \mathbb{C}_\sigma$, и обозначим через U_i множество точек u , для которых $x'_i(u) > 0$; здесь $J(u) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(1 + \tau u)^{-1} d\sigma(\tau)$, а $\mathbb{C}_\sigma$ обозначает область голоморфности функции $J(u)$. Наконец, обозначим через I объединение интервалов постоянства функции $\nu(\lambda)$.

Правило состоит в следующем: $I = \bigcup_i x_i(U_i)$.

В настоящей работе дается решение уравнения (1) и приводится схема доказательства правила Марченко–Пастура.

2. Решение уравнения Марченко–Пастура. Введем функцию $f_t(w) = w + J_t(u_0(w))$, где $J_t(u) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(1 + \tau u)^{-1} d\sigma_t(\tau)$, $\sigma_t(\tau) = \min \{ \sigma(\tau), t \}$. Мы покажем здесь, что

(I) существует и единственна функция $f_t^{-1}: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$, такая, что $f_t(f_t^{-1}(z)) \equiv z$; здесь $\mathbb{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$;

(II) $u(z, t) = u_0(f_t^{-1}(z))$.

Набросок доказательства утверждений (I) и (II). Для функций $u_0(w)$ и $J_t(u)$ справедливы следующие асимптотические оценки:

(а) $u_0(w) = o(1)$, $w \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} w \geq v(|w|)$; (б) $u_0(w) = -w^{-1}(1 + o(1))$, $w \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} w \geq |w|v(|w|)$; (в) $\varrho(w) \leq 2|w|(1 + o(1))$, $w \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} w > 0$, где $\varrho(w) = 2 \operatorname{Im} w (|w| \operatorname{Im} u_0(w))^{-1}$; (г) $J_t(u) = o(1/|u|)$, $u \rightarrow 0$, $\operatorname{Im} u > |2u|v(1/|2u|)$, с некоторой функцией $v(r) = o(1)$, $r \rightarrow \infty$. Из оценок (б) и (г) выводим, что

$$J_t(u_0(w)) \leq \alpha(|w|), \quad w \rightarrow \infty, \operatorname{Im} w \geq |w|v(|w|), \quad (2)$$

где $\alpha(r) = o(r)$, $r \rightarrow +\infty$.

Кроме того, имеют место соотношения

$$c \left| \operatorname{Re} \int_{|\phi(\tau, w)| \geq \varrho(w)} \phi(\tau, w) d\sigma_t(\tau) \right| \leq -|w|(2 \operatorname{Im} w)^{-1} \operatorname{Im} J_t(u_0(w)), \quad (3)$$

$$\left| \operatorname{Re} \int_{|\phi(\tau, w)| < \varrho(w)} \phi(\tau, w) d\sigma_t(\tau) \right| = o(|w|), \quad w \rightarrow \infty, \operatorname{Im} w \geq v(|w|), \quad (4)$$

где $\phi(\tau, w) = \tau(1 + \tau u_0(w))^{-1}$; последнее соотношение выводится с использованием оценок (а) и (в). Из формул (3) и (4) следует, что

$$|\operatorname{Re} J_t(u_0(w))| \leq -|w|(2 \operatorname{Im} w)^{-1} \operatorname{Im} J_t(u_0(w)) + \alpha_1(|w|) \quad (5)$$

при $w \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} w \geq v(|w|)$, где $\alpha_1(r) = o(r)$, $r \rightarrow +\infty$.

Используя неравенства (2) и (5), получаем, что когда w совершает обход в положительном направлении вдоль границы области $B_R = \{w \in \mathbb{C}^+ : |w| < R, y > v(R)\}$, функция $f_t(w)$ совершает ровно один оборот вокруг области G_R , ограниченной сверху дугой окружности $|z| = R - \alpha(R)$, а снизу — прямыми $\operatorname{Im} z = v(R)$, $\operatorname{Re} z = \pm[(2v(R))^{-1} \operatorname{Im} z + R/2 - \alpha_2(R)]$, где $\alpha_2(R) = \alpha_1(R) + Rv^2(R)$. Согласно принципу аргумента, для любого $z \in G_R$ имеется единственное значение $w \in B_R$, для которого $f_t(w) = z$. Поскольку любая точка из $\mathbb{C}^+$ принадлежит всем областям G_R и B_R , начиная с некоторого R , мы заключаем, что каждое значение $z \in \mathbb{C}^+$ имеет единственный прообраз $w = f_t^{-1}(z) \in \mathbb{C}^+$. Проверка того, что функция $u_0(f_t^{-1}(z))$ является решением уравнения (1), не составляет труда.

3. Схема доказательства правила Марченко–Пастура. Мы докажем здесь равенство $\bigcup_i \{(x_i(u), u) : u \in U_i\} = \{(x, u(x)) : x \in I\}$; правило Марченко–Пастура является его очевидным следствием.

Доказательство прямого включения несложно и использует равенство $x_i(u) = f_1(x_{0i}(u))$, а также то обстоятельство, что функция, обратная к $x_i(u)$, непрерывно продолжается до функции $u_0(f_1^{-1}(z)) = u(z)$ на верхней полукрестности любой точки $x_i(u)$, $u \in U_i$.

При доказательстве обратного включения нам понадобится следующая лемма, доказательство которой мы здесь опускаем.

ЛЕММА. Пусть $\nu_0(w_2) - \nu_0(w_1) > 0$. Тогда существует значение $w \in [w_1, w_2]$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любого $y > 0$ либо $\operatorname{Im} u_0(w + iy) \geq \delta$, либо $|\operatorname{Re} u_0(w + iy)| < \varepsilon$.

Пусть $x \in I$; тогда функция u конформно отображает некоторую верхнюю полукрестность $\mathcal{U}_+(x)$ на верхнюю полукрестность $\mathcal{U}_+(u(x))$. Следовательно, функция u_0 конформно отображает область $f^{-1}(\mathcal{U}_+(x))$ на $\mathcal{U}_+(u(x))$; обозначим через z_0 обратную к ней функцию.

Рассмотрим сначала случай, когда $u(x) \neq 0$. Выберем в $\mathcal{U}_+(u(x))$ последовательности $\{u'_n\}$ и $\{u''_n\}$, сходящиеся соответственно к действительным точкам u' , u'' , таким, что $u'u'' > 0$ и $u' < u(x) < u''$, причем пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} z_0(u'_n) = w'$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_0(u''_n) = w''$ существуют и различны. Возможность такого выбора следует из теоремы Фату (см., например, [3]). Легко видеть, что w' и w'' действительны. Функция ν_0 постоянна на (w', w'') , так как в противном случае с использованием леммы заключаем, что при некотором $w \in (w', w'')$ и при достаточно больших n кривая $\{u_0(w + iy), y > 0\}$ не пересекает отрезков $[u'_n, u''_n]$, в то время как их образы при отображении z_0 пересекаются. Следовательно, (w', w'') принадлежит некоторому интервалу I_{0i} и функция $z_0(u)$ голоморфно продолжается на интервал (u', u'') и совпадает на нем с $x_{0i}(u)$.

Далее, функция $f_1(z_0(u))$, обратная к $u(z)$, голоморфно продолжается в окрестность точки $u(x)$ и имеет в этой точке положительную производную.

Используя формулу

$$f_1(z_0(u)) = z_0(u) + J(u), \quad (6)$$

находим, что $x = x_{0i}(u) + J(u)$ в точке $u = u(x)$ и функция J голоморфна. Тем самым обратное включение доказано.

В случае $u(x) = 0$ из приведенных выше рассуждений следует, что левая и правая окрестности нуля принадлежат $\mathbb{C}_\sigma$; отсюда заключаем, что и $0 \in \mathbb{C}_\sigma$. Снова используя формулу (6), получаем, что функция $z_0(u)$ голоморфно продолжается в окрестность нуля. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в предыдущем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В. А., Пастур Л. А. Матем. сб. **72** (114), №4, 507–536 (1967).
2. Voiculescu D. J. Funct. Anal., **66**, 323–346 (1986).
3. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. ИЛ, М., 1963.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
30 ноября 1995 г.

УДК 519.46

Об одном классе бесконечномерных весовых $sl(3)$ -модулей

© 1997. С. А. Спирин

Пусть $\{e_i, f_i, h_i\}$, $i = 1, 2$, — стандартный набор образующих алгебры Ли $sl(3) = sl(3, \mathbb{C})$. Будем говорить, что весовой $sl(3)$ -модуль V принадлежит категории E_λ , где λ — вес, если 1) множество всех весов модуля V есть $\lambda + \Pi$, где Π — решетка, порожденная корнями, и 2) элементы e_2 и f_1 действуют на V обратимыми операторами. В работе [1] описана ассоциативная алгебра $Q(sl(3))$, такая, что для любого λ категория E_λ эквивалентна категории $Q(sl(3))\text{-mod}$.

В настоящей работе для каждого натурального d описано семейство d -мерных $Q(sl(3))$ -модулей $\{Y_{d,\nu}\}_{\nu \in \mathbb{C}}$ и для каждого веса λ — соответствующее семейство $sl(3)$ -модулей $\{V_{d,\nu,\lambda}\}$ из категории E_λ . Доказано, что всякий конечномерный неприводимый $Q(sl(3))$ -модуль изоморфен одному из модулей $Y_{d,\nu}$. Из этого, в частности, следует, что всякий неприводимый $sl(3)$ -модуль без кручения и с конечномерными весовыми подпространствами изоморфен одному из модулей $V_{d,\nu,\lambda}$. Кроме того, оказывается, что любой конечномерный неприводимый $sl(3)$ -модуль изоморфен подфактору какого-либо из $V_{d,\nu,\lambda}$.

1. $Q(sl(3))$ есть ассоциативная алгебра с единицей, четырьмя образующими x_0, x_1, y_0, y_1 и соотношениями

$$\begin{aligned} x_0 y_0 - y_0 x_0 &= x_1 y_0 + y_1 x_0, & x_1 y_1 - y_1 x_1 &= x_1 + y_1, \\ y_0 x_1 - x_1 y_0 &= -y_1 x_1 - x_0, & x_0 y_1 - y_1 x_0 &= x_1 y_1 + y_0, \\ x_0 x_1 - x_1 x_0 &= -x_1^2 + x_0, & y_0 y_1 - y_1 y_0 &= y_1^2 - y_0. \end{aligned}$$