Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Спирин, Об одном классе бесконечномерных весовых $sl(3)$ -модулей, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 88–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 05:50:59

Используя формулу

$$f_1(z_0(u)) = z_0(u) + J(u), \quad (6)$$

находим, что $x = x_{0i}(u) + J(u)$ в точке $u = u(x)$ и функция J голоморфна. Тем самым обратное включение доказано.

В случае $u(x) = 0$ из приведенных выше рассуждений следует, что левая и правая окрестности нуля принадлежат $\mathbb{C}_\sigma$; отсюда заключаем, что и $0 \in \mathbb{C}_\sigma$. Снова используя формулу (6), получаем, что функция $z_0(u)$ голоморфно продолжается в окрестность нуля. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в предыдущем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В. А., Пастур Л. А. Матем. сб. **72** (114), №4, 507–536 (1967).
2. Voiculescu D. J. Funct. Anal., **66**, 323–346 (1986).
3. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. ИЛ, М., 1963.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
30 ноября 1995 г.

УДК 519.46

Об одном классе бесконечномерных весовых $sl(3)$ -модулей

© 1997. С. А. Спирин

Пусть $\{e_i, f_i, h_i\}$, $i = 1, 2$, — стандартный набор образующих алгебры Ли $sl(3) = sl(3, \mathbb{C})$. Будем говорить, что весовой $sl(3)$ -модуль V принадлежит категории E_λ , где λ — вес, если 1) множество всех весов модуля V есть $\lambda + \Pi$, где Π — решетка, порожденная корнями, и 2) элементы e_2 и f_1 действуют на V обратимыми операторами. В работе [1] описана ассоциативная алгебра $Q(sl(3))$, такая, что для любого λ категория E_λ эквивалентна категории $Q(sl(3))\text{-mod}$.

В настоящей работе для каждого натурального d описано семейство d -мерных $Q(sl(3))$ -модулей $\{Y_{d,\nu}\}_{\nu \in \mathbb{C}}$ и для каждого веса λ — соответствующее семейство $sl(3)$ -модулей $\{V_{d,\nu,\lambda}\}$ из категории E_λ . Доказано, что всякий конечномерный неприводимый $Q(sl(3))$ -модуль изоморфен одному из модулей $Y_{d,\nu}$. Из этого, в частности, следует, что всякий неприводимый $sl(3)$ -модуль без кручения и с конечномерными весовыми подпространствами изоморфен одному из модулей $V_{d,\nu,\lambda}$. Кроме того, оказывается, что любой конечномерный неприводимый $sl(3)$ -модуль изоморфен подфактору какого-либо из $V_{d,\nu,\lambda}$.

1. $Q(sl(3))$ есть ассоциативная алгебра с единицей, четырьмя образующими x_0, x_1, y_0, y_1 и соотношениями

$$\begin{aligned} x_0 y_0 - y_0 x_0 &= x_1 y_0 + y_1 x_0, & x_1 y_1 - y_1 x_1 &= x_1 + y_1, \\ y_0 x_1 - x_1 y_0 &= -y_1 x_1 - x_0, & x_0 y_1 - y_1 x_0 &= x_1 y_1 + y_0, \\ x_0 x_1 - x_1 x_0 &= -x_1^2 + x_0, & y_0 y_1 - y_1 y_0 &= y_1^2 - y_0. \end{aligned}$$

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{C}$. Определим $Q(sl(3))$ -модуль $Y_{d,\nu}$ как линейное пространство с базисом $\{u_i\}$, $i = 1, \dots, d$, и действием алгебры $Q(sl(3))$, заданным следующими формулами:

$$\begin{aligned} x_1 u_i &= (\nu - i) u_i, & y_1 u_i &= (-\nu + i) u_i + (i - 1) u_{i-1}, \\ x_0 u_i &= (\nu - i)^2 u_i + (d - i)(d' - i) u_{i+1}, \\ y_0 u_i &= (i - 1)(\nu - i) u_{i-1} + (\nu^2 + (4\nu - 1)i - 2i^2 - (d + 1)(d' + 1)) u_i \\ &\quad - (d - i)(d' - i) u_{i+1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $d' = 3\nu - d - 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Формулы (1) корректно определяют представление алгебры $Q(sl(3))$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{C}$, $d' = 3\nu - d - 2$. Тогда если d' — натуральное число, меньшее d , то $Y_{d,\nu}$ содержит подмодуль, изоморфный $Y_{d',\nu}$. В противном случае $Y_{d,\nu}$ неприводим.*

ТЕОРЕМА. *Любое неприводимое конечномерное представление алгебры $Q(sl(3))$ изоморфно одному из представлений $Y_{d,\nu}$.*

2. Далее мы рассматриваем алгебру Ли $sl(3) = sl(3, \mathbb{C})$. Пусть R — ее система корней, $H \subset sl(3)$ — подалгебра Картана и $\Pi \subset H^*$ — решетка, порожденная корнями. Через α , β будем обозначать простые корни алгебры $sl(3)$: для $h \in H$ имеем $[h, e_1] = \alpha(h)e_1$, $[h, e_2] = \beta(h)e_2$.

Пусть W — произвольное представление алгебры $Q(sl(3))$, и пусть $\lambda \in H^*$. Построим по этим данным $sl(3)$ -модуль $E(W, \lambda)$. Пусть $M = \lambda + \Pi \subset H^*$, и для каждого $\mu \in M$ положим $V_\mu \cong W$. Зафиксируем изоморфизмы $\phi_\mu: V_\mu \rightarrow W$. Положим $E(W, \lambda) = \bigoplus_{\mu \in M} V_\mu$ и зададим действие алгебры Ли $sl(3)$ на этом пространстве следующими формулами (всюду $v \in V_\mu$):

$$\begin{aligned} h.v &= \mu(h)v \quad (h \in H), & f_1.v &= \phi_{\mu-\alpha}^{-1} \phi_\mu v, & e_2.v &= \phi_{\mu+\beta}^{-1} \phi_\mu v, \\ e_1.v &= \phi_{\mu+\alpha}^{-1} (x_0 + nx_1) \phi_\mu v + (mn - m^2) \phi_{\mu+\alpha}^{-1} \phi_\mu v, \\ f_2.v &= \phi_{\mu-\beta}^{-1} (y_0 + my_1) \phi_\mu v + (mn - n^2) \phi_{\mu-\beta}^{-1} \phi_\mu v, \end{aligned} \quad (2)$$

где m и n — такие числа, что $\mu + (\alpha - \beta)/3 = m\alpha + n\beta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Формулы (2) корректно определяют $sl(3)$ -модуль.*

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Из результатов работы [1] следует, что всякий весовой $sl(3)$ -модуль, в котором f_1 и e_2 действуют обратимыми операторами, изоморфен $E(W, \lambda)$ для некоторых $Q(sl(3))$ -модуля W и веса λ . Назовем, следуя [2], весовой $sl(3)$ -модуль модулем без кручения, если на нем все корневые элементы действуют обратимыми операторами. Получаем, что любой $sl(3)$ -модуль без кручения изоморфен некоторому $E(W, \lambda)$.

2) Имеем $E(W, \lambda) \cong E(W, \lambda')$, если $\lambda' - \lambda \in \Pi$.

Положим $V_{d,\nu,\lambda} = E(Y_{d,\nu}, \lambda)$. Базисом модуля $V_{d,\nu,\lambda}$ может служить, например, семейство $\{u_i^{(m,n)} = \phi_\mu^{-1} u_i\}$ (m , n и μ связаны так же, как и в (2)). Здесь $m \in t_0 + \mathbb{Z}$, $n \in n_0 + \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, d$, а t_0 и n_0 — комплексные числа,

определяемые равенством $\lambda + (\alpha - \beta)/3 = m_0\alpha + n_0\beta$. Действие образующих алгебры $sl(3)$ на базисе $u_i^{(m,n)}$ нетрудно выписать, используя формулы (1) и (2).

Заметим, что числа m_0 и n_0 можно рассматривать как параметры семейства $V_{d,\nu,\lambda}$, заменяющие λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $d' = 3\nu - 2 - d \notin \{1, \dots, d-1\}$ (т. е. $Y_{d,\nu}$ неприводим). В этом случае модуль $V_{d,\nu,\lambda}$ приводим тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $\nu + m_0$, $\nu - n_0$, $\nu - m_0 + n_0$ является целым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть все три числа $\nu + m_0$, $\nu - n_0$ и $\nu - m_0 + n_0$ целые (в этом случае $\lambda(h_1)$, $\lambda(h_2)$ и d' также будут целыми), и пусть $d' \notin \{0, \dots, d\}$. Тогда ряд Жордана–Гельдера модуля $V_{d,\nu,\lambda}$ содержит единственный конечномерный композиционный фактор, старший вес μ которого задается следующими формулами:

- (i) если $d' < 0$, то $\mu(h_1) = d - 1$, $\mu(h_2) = -d' - 1$;
- (ii) если $d' > d$, то $\mu(h_1) = d' - d - 1$, $\mu(h_2) = d - 1$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого конечномерного неприводимого $sl(3)$ -модуля V и любого его веса λ найдутся два различных набора параметров d и ν , таких, что V изоморфен подфактору в $V_{d,\nu,\lambda}$.

3. Легко видеть, что неприводимые модули $V_{d,\nu,\lambda}$ — это в точности все неприводимые $sl(3)$ -модули без кручения с весами конечной кратности. Классификация таких модулей содержится в [2]. Согласно этой классификации, такие модули нумеруются тремя комплексными нецелыми числами a_1 , a_2 , a_3 и целым неотрицательным числом P . Эти параметры выражаются через наши следующим образом:

$$P = d - 1, \quad a_1 = \nu + m_0 - 2, \quad a_2 = \nu - m_0 + n_0 - 1, \quad a_3 = \nu - n_0 - 2.$$

Объясним связь нашего метода с методом, использованным в [2]. Обозначим через C централизатор подалгебры $U(H)$ в $U(sl(3))$. Пусть $\lambda \in H^*$; тогда положим $C(\lambda) = C/I(\lambda)$, где $I(\lambda)$ — идеал в C , порожденный элементами $h - \lambda(h)\mathbb{I}$, $h \in H$. Если V есть $sl(3)$ -модуль и λ — его вес, то $C(\lambda)$ действует на весовом подпространстве V_λ . В работе [2] для классификации $sl(3)$ -модулей исследуются представления алгебр $C(\lambda)$. Алгебра $C(\lambda)$ вкладывается в $Q(sl(3))$ для любого λ (по формулам, вытекающим из формул (2)). При этом если V есть $sl(3)$ -модуль без кручения, то представление алгебры $C(\lambda)$ на V_λ всегда однозначно продолжается до представления алгебры $Q(sl(3))$ на том же пространстве.

Автор выражает благодарность рецензенту за указание на работу [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Спирин С. А. Функциональный анализ и его прил., **27**, вып. 1, 88–91 (1993).
2. Britten D. J., Lemire F. W., Futorny V. M. Comm. Algebra, **23** (2), 467–510 (1995).

Институт физико-химической биологии
им. А. Н. Белозерского
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
5 декабря 1994 г.