Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. З. Шапиро, Нормальные формы зонтика Уитни относительно контактной группы, сохраняющей конус, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 2, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:33:36

УДК 517.9+519.46

Нормальные формы зонтика Уитни относительно контактной группы, сохраняющей конус

© 1997. Б. З. ШАПИРО

1. Результаты. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ — стратифицированное подмногообразие, содержащее начало координат. Обозначим через $\mathcal{K}$ контактную группу, т.е. элементы группы $\mathcal{K}$ — это диффеоморфизмы произведения $(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n, 0)$, сохраняющие (а) проекцию на $\mathbb{R}^l$ (индуцирующие диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^l$) и (в) подпространство $(\mathbb{R}^l \times 0)$, см. [2]. Назовем два ростка отображений $f_1, f_2: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ $\mathcal{K}$ -эквивалентными, если существует такой диффеоморфизм пространства $(\mathbb{R}^l, 0)$ и росток отображения $M: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$, что $f_1(x) = M(x)f_2(g(x))$. Наконец, пусть $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ обозначает подгруппу в $\mathcal{K}$, состоящую из диффеоморфизмов $h \in \mathcal{K}$, таких, что $h(\mathbb{R}^l \times \mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^l \times \mathcal{S}$.

Цель этой заметки — классифицировать ростки отображений $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ относительно контактной группы $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$, где $\mathcal{C}$ — обычный конус с вершиной в нуле, и мы дополнительно предполагаем, что образ отображения f — зонтик Уитни. Заметим, что нормальные формы взаимного расположения зонтика Уитни и гладкого ростка гиперповерхности в $\mathbb{R}^3$ относительно право-левой и контактной эквивалентности изучались в работе [4]. Важные общие свойства контактной группы $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$, где $\mathcal{S}$ — произвольное стратифицированное подмногообразие, рассмотрены в [3].

Напомним, что любой зонтик Уитни $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ определяет полный флаг Fl в касательном пространстве к $\mathbb{R}^3$ в начале координат, см. рис. 1 и [1]. Прямая l этого флага является касательным пространством к образу f в 0, а плоскость L флага (взятая с кратностью 2) совпадает с касательным конусом к зонтику в 0. Назовем односвязные компоненты дополнения к фиксированному квадратичному конусу $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ гиперболическими, а односвязную компоненту — негиперболической.

Рис. 1. Стандартный зонтик Уитни

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Существует шесть орбит действия группы GL_3 на множестве пар $(Fl, \mathcal{C})$:

- 1) прямая l проходит через гиперболические компоненты $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$ (общее положение);
- 2) прямая l проходит через негиперболическую компоненту и плоскость L пересекает $\mathcal{C}$ по паре прямых (общее положение);
- 3) прямая l лежит в негиперболической компоненте и плоскость L не пересекает $\mathcal{C}$ вне 0 (общее положение);

- 4) прямая l лежит в негиперболической компоненте и L касается $\mathcal{C}$ ($\text{codim} = 1$);
- 5) прямая l лежит на $\mathcal{C}$ и L пересекает $\mathcal{C}$ по паре прямых, одна из которых совпадает с l ($\text{codim} = 1$);
- 6) прямая l лежит на $\mathcal{C}$ и L касается $\mathcal{C}$ вдоль l ($\text{codim} = 2$).

Теперь мы можем привести список нормальных форм ростков отображений f относительно контактной группы $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, где $\mathcal{C}$ — квадратичный конус, заданный уравнением $Q: y_1 y_2 - y_3^2 = 0$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Росток отображения $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, образ которого является зонтиком Уитни и такой, что f^*Q имеет изолированную особенность в нуле, приводится группой $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ к одной из следующих нормальных форм в соответствии с классификацией пар $(Fl, \mathcal{C})$. (Напомним, что $Q = y_1 y_2 - y_3^2$ задает конус $\mathcal{C}$.)

- 1) $f: y_1 = x_1, y_2 = x_1 + x_2^2, y_3 = 0$ (здесь $f^*Q \simeq A_3^-$);
- 2) $f: y_1 = x_1, y_2 = -x_1 + x_2^2, y_3 = 0$ (здесь $f^*Q \simeq A_3^-$);
- 3) $f: y_1 = x_1, y_2 = -x_1, y_3 = x_2^2$ (здесь $f^*Q \simeq A_3^+$);
- 4) $f_k: y_1 = x_1, y_2 = -x_1 + 2x_2^2 \mp x_2^{k-1}, y_3 = x_2^2, k \geq 4$ (здесь $f_k^*Q \simeq A_k^{\pm}$);
- 5) $f_k: y_1 = x_1, y_2 = x_2^2 \pm x_1^{k-2}, y_3 = 0, k \geq 4$ (здесь $f^*Q \simeq D_k^{\pm}$);
- 6) $f_5: y_1 = x_1, y_2 = x_1 x_2, y_3 = x_2^2$ (здесь $f^*Q \simeq D_5$).

Обратите внимание, что во всех случаях, кроме 6), образом 2-струи отображения f является не зонтик Уитни, а более простая гиперповерхность с изолированной особенностью. Это проявление того обстоятельства, что $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ -эквивалентность является довольно грубой и не сохраняет даже стабильного типа отображения f . (В приведенной выше классификации в скобках указан тип ростка функции f^*Q в соответствии со стандартной классификацией особенностей ростков функций, см. [1].)

Ниже приведена диаграмма примыканий особенностей отображения f . (Жирные цифры на рис. 2 соответствуют одному из шести случаев основной теоремы.)

Рис. 2. Примыкания орбит $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ -действия

Эта заметка продолжает классификацию ростков гладких иммерсий в $\mathbb{R}^n$ относительно группы $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, начатую в [5]. Здесь изучен первый нетривиальный иррегулярный случай, т.е. случай когда образ отображения f особый. Автор благодарен В. Горюнову за ряд полезных обсуждений и упрощений первоначальных вычислений.

2. Доказательства. Начнем доказательство теоремы со следующего замечания: 1-струя отображения $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ ранга 1 приводится действием группы $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, где конус $\mathcal{C}$ задан уравнением $y_1 y_2 - y_3^2 = 0$, к одному из трех видов (a) $(x_1, x_1, 0)$, (b) $(x_1, -x_1, 0)$ или (c) $(x_1, 0, 0)$.

Действительно, прямая, проходящая через 0, приводится к одному из этих трех видов линейной группой, сохраняющей $\mathcal{C}$.

ЛЕММА. (А) 2-струя любого отображения $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ ранга 1 приводится действием $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ к одной из следующих форм: 1) $(x_1, x_1 + x_2^2, 0)$; 2) $(x_1, -x_1 + x_2^2, 0)$; 3) $(x_1, -x_1, x_2^2)$; 4) $(x_1, -x_1 + 2x_2^2, x_2^2)$; 5) $(x_1, x_2^2 \pm x_1^2, 0)$; 5') $(x_1, x_2^2, 0)$; 6) (x_1, x_1x_2, x_2^2) ; 7) (x_1, x_1^2, x_2^2) ; 8) $(x_1, 0, x_2^2)$; 9) $(x_1, x_1^2, 0)$; 10) $(x_1, x_1, 0)$; 11) $(x_1, -x_1, 0)$; 12) $(x_1, 0, 0)$.

(В) Последние шесть из приведенных форм не могут возникнуть, если образ f — зонтик Уитни.

Доказательства этой леммы и теоремы основаны на стандартной технике приведения к нормальной форме, описанной в [1] и для нашего частного случая в [5]. Основная идея — рассмотреть $\mathcal{O}_x$ -модуль $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ векторных полей, касательных к орбите $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(f)$ в точке f , и вычислить младшие струи некоторого базиса модуля $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$, зависящие от соответствующих младших струй отображения f . Согласно [5], алгебра Ли группы $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ имеет базис, состоящий из шести векторных полей, а именно $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$ и еще четырех полей, касательных к $\mathcal{C}$. Одно из этих полей — это эйлерово поле $(y_1 \partial/\partial y_1, y_2 \partial/\partial y_2, y_3 \partial/\partial y_3)$, а остальные три — эти 2-миноры матрицы $\begin{pmatrix} \partial/\partial y_1 & \partial/\partial y_2 & \partial/\partial y_3 \\ Q_{y_1} & Q_{y_2} & Q_{y_3} \end{pmatrix}$, где $Q = y_1y_2 - y_3^2$ и $Q_{y_i} = \partial Q/\partial y_i$. Чтобы получить базис модуля $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$, надо применить указанные шесть полей к f .

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ. Часть (А). Выписывая векторные поля, можно непосредственно увидеть, что если 1-струя отображения f имеет тип (а) или (b), то можно устранить все члены разложения отображения f степени > 1 , которые делятся на x_1 . Кроме того, можно считать, что координата y_1 равна x_1 . Следовательно, для 1-струй типа (а) и (b) достаточно рассмотреть 2-струи вида $(x_1, \pm x_1 + \alpha x_2^2, \beta x_2^2)$.

Если $\beta = 0$ и $\alpha \neq 0$, то можно произвести нормировку, положив $\alpha = 1$, и получить нормальные формы 1) и 2). (Обратите внимание, что 2-струи $(x_1, x_1 + x_2^2, 0)$ и $(x_1, x_1 - x_2^2, 0)$ $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ -эквивалентны, причем эквивалентность осуществляется при помощи линейного преобразования вида $(y'_1 = y_2, y'_2 = y_1, y'_3 = y_3)$.)

Если $\beta \neq 0$, то можно произвести нормировку, положив $\beta = 1$. В этом случае после некоторых преобразований базиса полей получим для 1-струй отображения f типа (b) касательное поле вида $(0, (\alpha - 2)x_2^2, 0)$. Это означает, что при $\alpha \neq 2$ член αx_2^2 координаты y_2 можно устранить, что приводит к нормальным формам 3) и 4). Наконец, случай $\alpha = \beta = 0$ приводит к нормальным формам 9) и 10).

Рассмотрим теперь 1-струю отображения f вида (с). В этом случае можно по-прежнему устранить все члены, делящиеся на x_1 в координате y_3 . Таким образом, достаточно рассмотреть 2-струи отображения f вида $(x_1, \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + \gamma x_2^2, \delta x_2^2)$. Изучая базис векторных полей модуля $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$, получаем, что при $\gamma \neq 0$ можно устранить член δx_2^2 в координате y_3 и положить $\gamma = 1$. Значит, достаточно рассмотреть 2-струю отображения f вида $(x_1, \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2 + x_2^2, 0)$. Дополняя до полных квадратов и нормируя α в координате y_2 , получаем нормальные формы 5) и 5').

Если $\gamma = 0$ и $\delta \neq 0$, то можно положить $\delta = 1$ и изучать 2-струю отображения f вида $(x_1, \alpha x_1^2 + \beta x_1x_2, x_2^2)$. Случай $\alpha \neq 0$ и $\beta = 0$ приводит к

нормальной форме 7). При $\alpha = \beta = 0$ получаем 8). Если $\beta \neq 0$, то замена $\bar{x}_2 = \beta x_2 + \alpha x_1$ приводит к 2-струе вида $(x_1, x_1 x_2, P)$, где P — некоторый полином степени 2. После устранения всех его членов, делящихся на x_1 , получаем нормальную форму 6). Наконец, если все члены второго порядка равны нулю, то имеем 11).

Часть (В). Осталось показать, почему последние шесть нормальных форм не возникают, если образ отображения f — зонтик Уитни. Действительно, касательный конус к зонтику в его вершине имеет вид $h_L^2 = 0$, где h_L — линейная форма, задающая плоскость L ассоциированного полного флага, см. рис. 1. Легко показать, что для любого ϕ , лежащего в орбите $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(f)$, касательный конус к ϕ в вершине по-прежнему является квадратом линейной формы, если образ отображения f — зонтик Уитни. Это условие не выполнено для нормальных форм 9)–12).

Предположим теперь, что образ отображения f — зонтик Уитни и его 2-струя $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ -эквивалентна нормальным формам 7) или 8). Тогда ассоциированный флаг $Fl = (l, L)$ имеет следующий вид: l совпадает с осью y_1 , а L — с плоскостью $y_2 = 0$. Однако 2-струя любого отображения f , задающего зонтик Уитни и имеющего такой ассоциированный флаг, имеет вид $y_1 = a_1 x_1 + a_{11} x_1^2$, $a_1 \neq 0$, $y_2 = b_1 x_1 + b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2$, $b_{12} \neq 0$, $y_3 = c_1 x_1 + c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2$, $c_{22} \neq 0$. В процессе описанной выше редукции такая 2-струя приводится к виду $y_1 = x_1$, $y_2 = b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2$, $b_{12} \neq 0$, $y_3 = c_{22} x_2^2$, $c_{22} \neq 0$. Поскольку $b_{12} \neq 0$, мы получаем нормальную форму 6). Таким образом, нормальные формы 7) и 8) исключены из рассмотрения. $\square$

Напомним, что k -струя отображения f называется $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ -достаточной, если любое отображение вида $f + \varepsilon$ лежит в орбите $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(f)$ при условии, что ε содержит только члены степени $\geq k + 1$. (Подробности и критерий достаточности см. в [5] и [3].)

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. 2-струя отображения f является достаточной в случаях 1), 2), 3) и 6), поскольку ростки f^*Q , определенные этими 2-струями, являются простыми особенностями. В случае 4) достаточно рассмотреть только выписанную серию отображений f_k , поскольку можно устранить все члены, делящиеся на x_1 , в координатах y_2 и y_3 и все члены вида x_2^l , $l \geq 3$, в координате y_3 . Отображения f_k попарно неэквивалентны. Наконец, для 2-струй вида 5) и 5') можно устранить все члены, делящиеся на x_1 , и все члены порядка ≥ 3 , делящиеся на x_2 , в координате y_3 . Это приводит в точности к указанным сериям, члены которых попарно неэквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. т. 1. Наука, М., 1982.
2. Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности I. Локальная и глобальная теория. Итоги науки и техники. Современ. проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 6.
3. Danon J. A-equivalence and the equivalence of sections of images and discriminants. Lecture Notes in Math., Vol. 1462, 1989, pp. 93–121.
4. Mond D. Proc. London Math. Soc., **50**, 333–369 (1985).
5. Shapiro B. Z. Math. Scand., **77**, No. 1, 19–44 (1995).