Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шадрин, Некоторые соотношения на двойные числа Гурвица, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:07:08

В заключение отметим, что постоянная γ_β представляет собой естественное обобщение постоянной Эйлера $\gamma = \gamma_1$. Это можно увидеть, явно выписывая определяющий ряд или замечая, что $\gamma_\beta = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(\beta k)$. Из изложенных выше результатов следует также, что

$$\gamma_\beta = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \ln z \Gamma_\beta(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\tilde{R}_\beta(-z, 0) - \frac{1}{z} \right),$$

в согласии с классическим случаем и независимо от функционального уравнения. С другой стороны, для произвольного β уже неверно, что постоянная γ_β совпадает с неособой частью соответствующей дзета-функции $\zeta_\beta(s, 0)$ при $s = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Choi J., Quine J. R.* Rocky Mountain J. Math., **26**, 719–729 (1996).
2. *Gilkey P. B.* Invariance theorems, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem. Studies in Adv. Math. CRC Press, 1995.
3. *Morpurgo C.* Duke Math. J., **114**, 477–573 (2002).
4. *Mulholland H. P.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **24**, 280–289 (1928).
5. *Sarnak P.* Comm. Math. Phys., **110**, 113–120 (1987).
6. *Schuster R.* Z. Anal. Anwendungen, **11**, 229–236 (1992).
7. *Spreafico M.* Rocky Mountain J. Math., **33**, 1499–1512 (2003).
8. *Vardi I.* SIAM J. Math. Anal., **19**, 493–507 (1988).
9. *Voros A.* Comm. Math. Phys., **110**, 439–465 (1987).

ICMC, Universidade de São Paulo,
CEP 13560-970 São Carols, Brazil
e-mail: mauros@icmc.usp.br

Поступило в редакцию
23 апреля 2003 г.

УДК 512.772.5+517.546.3

Некоторые соотношения на двойные числа Гурвица*

© 2005. С. В. ШАДРИН

1. В этой заметке мы формулируем некоторые новые соотношения на двойные числа Гурвица. Эти соотношения приходят из теории пересечений на пространстве модулей кривых и являются прямым обобщением результатов, анонсированных в [3] и доказанных в [4].

Числа Гурвица, которые мы здесь изучаем, — это основной объект исследования в работе [2]. Мы рекомендуем работу [2], в частности, как хороший обзор по двойным числам Гурвица, содержащий наиболее полный набор ссылок по данной тематике.

2. Напомним определение чисел Гурвица. Зафиксируем целые числа $g \geq 0$, $n \geq 1$ и два неупорядоченных разбиения числа n на целые положительные слагаемые, $n = a_1 + \dots + a_p = b_1 + \dots + b_q$. Рассмотрим пространство $\mathbb{CP}^1$ с отмеченными точками $0, \infty$ и еще $2g + p + q - 2$ точками $z_1, \dots, z_{2g+p+q-2}$.

Множество мероморфных функций $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ степени n , определенных на кривых C рода g и таких, что $(f) = -\sum_{i=1}^p a_i x_i + \sum_{j=1}^q b_j y_j$ (x_i, y_j —

*Работа частично поддержана грантами РФФИ-01-01-00660, РФФИ-02-01-22004 и НШ-1972.2002.1.

попарно различные точки кривой C) и $z_1, \dots, z_{2g+p+q-2}$ — простые критические значения функции f , конечно. Здесь через (f) , как обычно, обозначен дивизор функции f .

Число таких функций называется числом Гурвица и обозначается через $H_g(a_1, \dots, a_p | b_1, \dots, b_q)$. При этом подсчете каждая функция $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ учитывается с весом $1/|\text{aut}(f)|$. Например, $H_g(2|2) = 1/2$ при любом g , поскольку существует ровно одна гиперэллиптическая кривая E и функция f степени 2 на ней с фиксированным набором $2g+2$ простых точек ветвления, причем порядок группы автоморфизмов функции f равен двум.

Мы будем рассматривать только числа вида $H_g(n | b_1, \dots, b_q)$. Для удобства введем следующее обозначение:

$$\hat{H}_{g,n}(b_1, \dots, b_q) := \frac{|\text{aut}(b_1, \dots, b_q)|}{n^{2g+q-2}(2g+q-1)!} H_g(n | b_1, \dots, b_q).$$

3. Сформулируем нашу основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых $g \geq 0$, $n \geq 1$ и $b_1, \dots, b_q$, $b_1 + \dots + b_q = n$, справедливо следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \binom{g}{0} \hat{H}_{g,n}(b_1, \dots, b_q) - \binom{g}{1} \hat{H}_{g,n+1}(b_1, \dots, b_q, 1) \\ + \dots + (-1)^g \binom{g}{g} \hat{H}_{g,n+g}(b_1, \dots, b_q, \underbrace{1, \dots, 1}_g) = \frac{(-1)^g}{24^g}. \end{aligned}$$

Проверим эту теорему в частном случае. Пусть $g = 2$. Тогда, согласно формуле из [2],

$$\hat{H}_{2,n}(b_1, \dots, b_q) = \frac{1}{24^2} \left(\frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{5} B \right), \quad (1)$$

где $A = -1 + b_1^2 + \dots + b_q^2$, $B = -1 + b_1^4 + \dots + b_q^4$.

Таким образом, в этом частном случае наша теорема сводится к следующей формуле:

$$\left(\frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{5} B \right) - 2 \left(\frac{1}{2} (A+1)^2 - \frac{1}{5} (B+1) \right) + \left(\frac{1}{2} (A+2)^2 - \frac{1}{5} (B+2) \right) = 1,$$

что нетрудно проверить прямым вычислением.

Формулы, аналогичные соотношению (1), существуют для произвольного рода g , см. [2] и [5]. Однако нам не известны никакие геометрические следствия комбинаторной структуры этих формул.

4. Объясним, как получается такое соотношение на числа Гурвица.

Рассмотрим пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g,q+1}$ модулей кривых рода g с $q+1$ отмеченными точками. Пусть L_1 — линейное расслоение над $\overline{\mathcal{M}}_{g,q+1}$ со слоем $T_{x_1}^* C$ в точке $(C, x_1, \dots, x_{q+1}) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,q+1}$. Обозначим $c_1(L_1)$ через ψ_1 .

Рассмотрим подмногообразие $V_g^\circ(b_1, \dots, b_q) \subset \mathcal{M}_{g,q+1}$, состоящее из гладких кривых $(C, x_1, \dots, x_{q+1})$, таких, что $-(\sum_{i=1}^q b_i)x_1 + b_1x_2 + \dots + b_qx_{q+1}$ — это дивизор мероморфной функции. Обозначим замыкание подмногообразия $V_g^\circ(b_1, \dots, b_q)$ в $\overline{\mathcal{M}}_{g,q+1}$ через $V_g(b_1, \dots, b_q)$.

Теорема 1 непосредственно вытекает из следующих двух соотношений на пересечения на пространстве модулей кривых.

ЛЕММА 1. Для любых положительных $b_1, \dots, b_q$

$$\frac{(-1)^g}{24^g} = (-1)^g g! \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,3}} \psi_1^{3g} = \binom{g}{0} \int_{V_g(b_1, \dots, b_q)} \psi_1^{2g+q-2} - \binom{g}{1} \int_{V_g(b_1, \dots, b_q, 1)} \psi_1^{2g+q-1} + \dots + (-1)^g \binom{g}{g} \int_{V_g(b_1, \dots, b_q, 1, \dots, 1)} \psi_1^{3g+q-2}.$$

ЛЕММА 2. Для любых положительных $b_1, \dots, b_q$

$$\widehat{H}_{g,n}(b_1, \dots, b_q) = \int_{V_g(b_1, \dots, b_q)} \psi_1^{2g+q-2}.$$

Лемма 1 — это небольшое обобщение аналогичного утверждения из [3, 4], а лемма 2 — это теорема, доказанная в [4].

5. Производящая функция для рассматриваемых здесь чисел Гурвица удовлетворяет дифференциальному уравнению типа «cut-and-join» (см. аналогичные уравнения для других чисел Гурвица в [1, 6]).

Рассмотрим функцию $F(\theta, x_1, x_2, \dots)$, определенную равенством

$$F(\theta, x_1, x_2, \dots) = \sum_{g \geq 0} \sum_{(b_1, \dots, b_q)} H_g(n | b_1, \dots, b_q) \frac{\theta^{(2g+q-1)}}{(2g+q-1)!} x_{b_1} \cdots x_{b_q}.$$

ТЕОРЕМА 2. Функция $F = F(\theta, x_1, x_2, \dots)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \sum_{i, j \geq 1} \left(i j x_{i+j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + (i+j) x_i x_j \frac{\partial F}{\partial x_{i+j}} \right).$$

Вообще говоря, эта теорема более или менее очевидна просто из геометрии разветвленных накрытий и, несомненно, имеет такое же простое комбинаторное доказательство, как аналогичная теорема в [1]. Однако эта теорема также следует непосредственно из соотношений на пересечения, полученных в [4].

В самом деле, эту теорему можно переписать как соотношение на числа Гурвица в следующем виде:

$$\begin{aligned} H'_g(n | b_1, \dots, b_q) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{b_i^{(1)} + b_i^{(2)} = b_i} b_i^{(1)} b_i^{(2)} H'_{g-1}(n | b_1, \dots, \hat{b}_i, \dots, b_q, b_i^{(1)}, b_i^{(2)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (b_i + b_j) H'_g(n | b_1, \dots, \hat{b}_i, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_q, b_i + b_j), \end{aligned} \quad (2)$$

где через $H'_g(n | b_1, \dots, b_q)$ мы обозначаем

$$H_g(n | b_1, \dots, b_q) \cdot |\text{aut}(b_1, \dots, b_q)| = \widehat{H}_{g,n}(b_1, \dots, b_q) \cdot n^{2g+q-2} (2g+q-1)!.$$

Пользуясь леммой 2, мы можем переписать соотношение (2) как соотношение на интегралы $\int_{V_g(b_1, \dots, b_q)} \psi_1^{2g+q-2}$. То, что мы при этом получим, будет в точности частным случаем теоремы 12.2 из [4].

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** Goulden I. P., Jackson D. M., Vainshtein A. Ann. Comb., **4**, 27–46 (2000). **2.** Goulden I. P., Jackson D. M., Vakil R. arXiv: math.AG/0309440. **3.** Шадрин С. В. УМН, **58**, вып. 1, 197–198 (2003). **4.** Shadrin S. V. Internat. Math. Res. Notices, No. 38, 2051–2094 (2003). **5.** Shapiro B., Shapiro M., Vainshtein A. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 180 (34), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 219–227. **6.** Zvonkine D. arXiv: math.AG/0304251.

Независимый московский университет
Стокгольмский университет
email: shadrin@mccme.ru

Поступило в редакцию
6 октября 2003 г.