Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Адрианов, Аналог формулы Харера–Цагира для одноклеточных двукрашенных карт, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 1–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 09:34:53

УДК 515.16+517.9

Аналог формулы Харера–Цагира для одноклеточных двукрашенных карт

© 1997. Н. М. Адрианов

§0. Введение

0.1. Известно несколько конструкций, связывающих топологию пространств модулей алгебраических кривых с объектами комбинаторной природы, см. [1–4]. В частности, построены клеточные разбиения пространств модулей, клетки которых оказываются параметризованными картами на ориентированных поверхностях соответствующего рода (используется также эквивалентное понятие ленточного графа). С помощью подобной конструкции Харером и Цагиром [1] были вычислены эйлеровы характеристики пространств модулей, см. также [5]. Для этого им пришлось перечислить одноклеточные карты рода g с фиксированным числом ребер. Эти результаты для удобства читателя собраны в теореме 4. Исходный метод использовал технику матричных интегралов; позднее в [6] было дано более простое доказательство, основанное на теории характеров симметрических групп. Элементарное доказательство неизвестно до сих пор.

В настоящей работе находится число двукрашенных одноклеточных карт с фиксированным числом ребер и вершин обоих цветов. Идея перечисления заимствована из [6]. Найден рекуррентное соотношение и производящая функция (см. теорему 2); производящую функцию удастся выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса.

В качестве следствия мы показываем, что для достаточно большого числа ребер доля двураскрашиваемых одноклеточных карт рода g среди всех одноклеточных карт рода g равна примерно $(1/4)^g$. В §4 приведены явные формулы для одноклеточных карт рода $g \leq 3$.

0.2. Одноклеточные карты рода 0 являются деревьями на сфере, которые можно отождествить с помощью стереографической проекции с деревьями на плоскости. Очевидно, что всякое дерево может быть двураскрашено (см. п. 1.1 ниже). Мы рассматриваем одноклеточные и одноклеточные двукрашенные карты как возможные обобщения плоских деревьев в высших родах. С этой точки зрения числа $\varepsilon_g(N)$ и $B_g(N)$, введенные ниже, обобщают числа Каталана $c_N = (2N)!/(N!(N+1)!)$, которые перечисляют плоские деревья с отмеченным ребром.

Для плоских деревьев имеется более сильный результат Татта (см. [7]), дающий число плоских двукрашенных деревьев с фиксированными валентностями вершин. Представляется заманчивым получить аналогичные формулы для двукрашенных одноклеточных карт произвольного рода.

0.3. Я хочу выразить благодарность А. К. Звонкину, С. К. Ландо и Г. Б. Ша-

бату, которые ввели меня в теорию графов на поверхностях, а также познакомили со многими из цитированных работ.

§1. Основные понятия и используемая техника

1.1. Все необходимые сведения о картах можно найти, например, в обзоре [8]. Мы напомним понятия, используемые в настоящей статье.

Под *картой* мы подразумеваем граф Γ , вложенный в компактную ориентированную поверхность S без края таким образом, что связные компоненты множества $S \setminus \Gamma$, называемые *клетками* карты, гомеоморфны диску. Две карты (S, Γ) и (S', Γ') называются *изоморфными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f: S \rightarrow S'$, такой, что $f(\Gamma) = \Gamma'$.

Карту с единственной клеткой мы называем *одноклеточной картой*. Карта *двукрашена*, если ее вершины покрашены в два цвета (скажем, черный и белый) и каждое ребро соединяет черную и белую вершины.

Одноклеточную двукрашенную карту можно представить как склейку сторон $2N$ -угольника, дающую ориентированную поверхность без края, в соответствии с раскраской его вершин в два цвета. Рисунок 1а) дает пример такой склейки, которая приводит к одноклеточной двукрашенной карте рода 1 (склеиваются стороны, помеченные одинаковыми буквами). Склейка сторон, несогласованная с раскраской, показана на рис. 1б).

Склейки 8-угольника: согласованная и несогласованная с раскраской.

1.2. Обозначим через $B(m, n, N)$ количество одноклеточных двукрашенных карт с N ребрами, одно из которых помечено, m белыми и n черными вершинами.

Уравнение Эйлера для таких карт принимает вид $N + 1 - m - n = 2g$, где g — род карты, так что $B(m, n, N) = 0$, если $N + 1 - m - n < 0$.

1.3. Введем, следуя Цагиру [6], функции

$$\Phi_m(y) = \sum_{k=1}^{\infty} k^m y^{k-1}$$

и определим дифференциальный оператор $D_y = y \partial / \partial y + 1$. Легко проверить, что $D_y \Phi_m(y) = \Phi_{m+1}(y)$. Выполнив замену переменной $Y = 1/(1-y)$, получим $D_y = Y(Y-1) \partial / \partial Y + 1$, откуда, с учетом того, что $\Phi_0 = Y$, видно, что функции Φ_m являются многочленами степени $m+1$ от Y .

1.4. Хорошо известно (и, как указывает Джонс [9], эта идея восходит еще к Гамильтону), что карта может быть задана парой перестановок, см. [8]. Задача перечисления одноклеточных двукрашенных карт с одним отмеченным ребром, таким образом, оказывается эквивалентной задаче вычисления числа пар (a, b) , $a, b \in \mathbf{S}_N$ ($\mathbf{S}_N$ — группа перестановок на N элементах), таких, что число несвязных циклов перестановок a и b равно m и n соответственно, а произведение ab равно фиксированному N -циклу. Основным инструментом является следующая формула [10, Theorem 4.12]:

$$\#\{(a, b, c) \in A \times B \times C \mid abc = 1\} = \frac{|A||B||C|}{|G|} \sum_x \frac{\chi(A)\chi(B)\chi(C)}{\chi(1)}, \quad (1)$$

где A , B и C — классы сопряженности конечной группы G , а сумма берется по всем неприводимым комплексным характеристам этой группы.

1.5. Рассмотрим стандартное представление группы $\mathbf{S}_N$ в $\mathbf{C}^N$, при котором элементы группы действуют перестановками координат, и пусть V — это $(N-1)$ -мерное инвариантное подпространство векторов с нулевой суммой координат. Обозначим через χ_r характер представления группы $\mathbf{S}_N$ в пространстве кососимметричных тензоров $\Lambda^r(V)$. Доказательство следующей леммы можно найти в [6].

ЛЕММА 1. Пусть χ_r , $r = 1, \dots, N$, — характеры группы $\mathbf{S}_N$, указанные выше, χ_0 — главный характер, C — класс сопряженности N -циклов и $\Phi_m(y)$ — введенные выше функции. Тогда

- (i) χ_r — неприводимый характер для любого $r = 0, \dots, N$;
- (ii) если χ — неприводимый характер и $\chi(C) \neq 0$, то $\chi = \chi_r$ для некоторого $r = 0, \dots, N$;

(iii) $\sum_{r=0}^N \chi_r(A)(-T)^r = \frac{1}{1-T} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - T^i)^{n_i(A)}$, где $n_i(A)$ есть число i -циклов в представлении перестановки из класса сопряженности A в виде произведения несвязных циклов;

$$(iv) \sum_{r=0}^N |A| \chi_r(A) \Phi_{n(A)}(y) = N! \binom{N-1}{r} \frac{y^r}{(1-y)^{N+1}}.$$

Из п. (iii) леммы 1 мы заключаем, что $\chi_r(1) = \binom{N-1}{r}$ и $\chi_r(C) = (-1)^r$.

§2. Рекуррентная формула и производящая функция для числа двукрашенных одноклеточных карт

ТЕОРЕМА 2. (i) Для всякого $N \geq 1$

$$\sum_{m,n} B(m, n, N) \Phi_m(y) \Phi_n(z) = N! \frac{(1-yz)^{N-1}}{((1-y)(1-z))^{N+1}};$$

(ii) Числа $B(m, n, N)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соот-

ношению:

$$\begin{aligned} (N+1)B(m, n, N) &= (N-2)(N-1)^2 B(m, n, N-2) \\ &\quad + (2N-1)(B(m-1, n, N-1) + B(m, n-1, N-1)) \\ &\quad - (N-2)(B(m-2, n, N-2) - 2B(m-1, n-1, N-2) \\ &\quad \quad + B(m, n-2, N-2)) \end{aligned}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} B(1, 1, 1) &= B(1, 2, 2) = B(2, 1, 2) = 1, \\ B(m, n, N) &= 0, \quad \text{если } N+1-m-n < 0; \end{aligned}$$

$$(iii) \sum_{N, m, n} \frac{B(m, n, N)}{(N-1)!} x^{N-1} y^{m-1} z^{n-1} = (x+1)^{y+z} {}_2F_1(1+y, 1+z, 2, x^2),$$

где

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) &= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

есть гипергеометрическая функция Гаусса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Число помеченных двукрашенных одноклеточных карт с m белыми и n черными вершинами и N ребрами равняется

$$\begin{aligned} B(m, n, N) &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{A, B: n(A)=m, n(B)=n} \#\{(a, b) \in A \times B \mid ab \in C\} \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{A, B: n(A)=m, n(B)=n} \#\{(a, b, c) \in A \times B \times C \mid abc = 1\} \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{A, B: n(A)=m, n(B)=n} \frac{|A||B|}{N} \sum_{\chi} \frac{\chi(A)\chi(B)\chi(C)}{\chi(1)}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1, мы находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{m, n} B(m, n, N) \Phi_m(y) \Phi_n(z) &= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{A, B} \frac{|A||B|}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(-1)^r}{\binom{N-1}{r}} \chi_r(A) \chi_r(B) \Phi_{n(A)}(y) \Phi_{n(B)}(z) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(-1)^r}{\binom{N-1}{r}} \left(\sum_A |A| \chi_r(A) \Phi_{n(A)}(y) \right) \left(\sum_B |B| \chi_r(B) \Phi_{n(B)}(z) \right) \\ &= N! \sum_{r=0}^{N-1} (-1)^r \binom{N-1}{r} \frac{y^r z^r}{(1-y)^{N+1} (1-z)^{N+1}} \\ &= N! \frac{(1-yz)^{N-1}}{((1-y)(1-z))^{N+1}}. \end{aligned}$$

Пункт (i) теоремы 2 доказан.

Введем функции

$$F_N(y, z) = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{m,n} B(m, n, N) \Phi_m(y) \Phi_n(z) = \frac{N(1-yz)^{N-1}}{((1-y)(1-z))^{N+1}}.$$

Можно проверить, что

$$(N-1)(N+1)F_N(y, z) - (2N-1)(D_y + D_z)F_{N-1}(y, z) + (D_y - D_z)^2 F_{N-2}(y, z) = (N-1)^2 F_{N-2}(y, z). \quad (2)$$

Поскольку функции $\Phi_m(y)$ являются многочленами от $1/(1-y)$ степени $m+1$ и, следовательно, линейно независимы, сравнивая в (2) коэффициенты при $\Phi_m(y)\Phi_n(z)$, мы получаем п. (ii) теоремы 2.

Положим

$$G(x, y, z) = \sum_{N, m, n} \frac{B(m, n, N)}{(N-1)!} x^{N+1} y^{m-1} z^{n-1}.$$

Рекуррентное соотношение из (ii) дает дифференциальное уравнение на производящую функцию G :

$$x(x^2 - 1)G'' + (x^2 + 2ax + 1)G' - (a + b^2x)G = 0, \quad (3)$$

где $a = y + z$, $b = y - z$. Подставляя $G = x^2(x+1)^a H$, мы получаем

$$x(x^2 - 1)H'' + ((5 + 2a)x^2 - 3)H' + ((a + 2)^2 - b^2)xH = 0,$$

частный случай известного дифференциального уравнения (см., например, [11]¹). Решение может быть выражено с помощью гипергеометрической функции Гаусса:

$$H = {}_2F_1(1 + (a+b)/2, 1 + (a-b)/2, 2, x^2).$$

Окончательно мы получаем

$$\begin{aligned} G &= x^2(x+1)^a {}_2F_1(1 + (a+b)/2, 1 + (a-b)/2, 2, x^2) \\ &= x^2(x+1)^{y+z} {}_2F_1(1+y, 1+z, 2, x^2). \quad \square \end{aligned}$$

Пусть $B_g(N)$ — число двукрашенных одноклеточных карт рода g с N ребрами, одно из которых отмечено. Очевидно, что

$$B_g(N) = \sum_{m+n=N+1-2g} B(m, n, N).$$

Суммируя рекуррентную формулу для $B(m, n, N)$ по всем m и n , таким, что $m+n = N+1-2g$, мы получаем такое

СЛЕДСТВИЕ 3. Числа $B_g(N)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(N+1)B_g(N) = 2(2N-1)B_g(N-1) + (N-2)(N-1)^2 B_{g-1}(N-2)$$

и граничным условиям $B_0(1) = 1$, $B_0(2) = 2$, $B_g(N) = 0$, если $g < 0$.

¹Отметим, что в известном справочнике Камке [12] решение этого уравнения приведено с ошибкой.

§3. Сравнение чисел Харера–Цагира и их двуцветных аналогов

Число $\varepsilon_g(N)$, введенное в [1], есть число способов склейки сторон $2N$ -угольника, дающих ориентированную поверхность рода g . Число $\varepsilon_g(N)$ можно интерпретировать как число одноклеточных карт (не только двураскрашиваемых!) с N ребрами и $N+1-2g$ вершинами и одним отмеченным направленным ребром.

Мы собираем результаты, касающиеся $\varepsilon_g(N)$, в следующей теореме. Читателю предлагается сравнить ее с теоремой 2.

ТЕОРЕМА 4. Числа $\varepsilon_g(N)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

- (i) $\sum_{0 \leq g \leq N/2} \varepsilon_g(N) \Phi_{N+1-2g}(x) = (2N-1)!! \frac{(1+x)^N}{(1-x)^{N+2}};$
- (ii) $(N+1)\varepsilon_g(N) = (2N-1)(2\varepsilon_g(N-1) + (N-1)(2N-3)\varepsilon_{g-1}(N-2));$
- (iii) $1 + 2 \sum_{g,N} \frac{\varepsilon_g(N)}{(2N-1)!!} s^{N+1} t^{N+1-2g} = \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^t.$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Чтобы подчеркнуть сходство теорем 1 и 2, мы можем выразить производящую функцию через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$\left(\frac{1+s}{1-s} \right)^t = (1+s)^{2t} \left(\frac{1}{1-s^2} \right)^t = (1+s)^{2t} {}_2F_1(t, \beta, \beta, s^2),$$

где β почти любое, а именно, $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$

2. Положим

$$F_N = \frac{(1+x)^N}{(1-x)^{N+2}};$$

тогда верно следующее тождество:

$$(N+1)F_N = (N-1)F_{N-2} + 2D_x F_{N-1},$$

и соотношение (ii) следует из (i).

СЛЕДСТВИЕ 5. $(a_g) \frac{B_g(N)}{\varepsilon_g(N)} \leq \frac{(N-2)(N-1)}{(2N-3)(2N-1)} \frac{B_{g-1}(N-1)}{\varepsilon_{g-1}(N-1)};$

$$(b_g) \frac{B_g(N)}{\varepsilon_g(N)} \leq \frac{B_g(N+1)}{\varepsilon_g(N+1)};$$

$$(c_g) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B_g(N)}{\varepsilon_g(N)} = \left(\frac{1}{4} \right)^g.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по g . Мы имеем $B_0(N) = \varepsilon_0(N)$, потому что это число помеченных плоских деревьев, т. е. число Каталана c_N (всякое плоское дерево двураскрашиваемо). Таким образом, (b_0) и (c_0) тривиальны. Предположим, что

$$\frac{B_{g-1}(N)}{\varepsilon_{g-1}(N)} \leq \frac{B_{g-1}(N+1)}{\varepsilon_{g-1}(N+1)}$$

для всех $N \geq 2g$. Из рекуррентных соотношений для $B_g(N)$ и $\varepsilon_g(N)$ следует,

что

$$B_g(N) = \frac{(2N)!}{N!(N+1)!} \sum_{m=2g+1}^N P_m, \quad \varepsilon_g(N) = \frac{(2N)!}{N!(N+1)!} \sum_{m=2g+1}^N Q_m,$$

где

$$P_m = \frac{(m-1)!(m-2)!}{(2m-2)!} \frac{(m-2)(m-1)^2}{(m+1)} B_{g-1}(m-2),$$

$$Q_m = \frac{(m-1)!(m-2)!}{(2m-2)!} \frac{(m-1)(2m-3)(2m-1)}{(m+1)} \varepsilon_{g-1}(m-2).$$

Согласно предположению индукции, $P_m/Q_m \leq P_{m+1}/Q_{m+1}$ для всех m , так что

$$\frac{B_g(N)}{\varepsilon_g(N)} = \frac{\sum_{m=2g+1}^N P_m}{\sum_{m=2g+1}^N Q_m} \leq \frac{P_{N+1}}{Q_{N+1}} = \frac{N(N-1)}{(2N+1)(2N-1)} \frac{B_{g-1}(N-1)}{\varepsilon_{g-1}(N-1)}$$

и, следовательно,

$$\frac{B_g(N+1)}{\varepsilon_g(N+1)} = \frac{\sum_{m=2g+1}^N P_m + P_{N+1}}{\sum_{m=2g+1}^N Q_m + Q_{N+1}} \geq \frac{\sum_{m=2g+1}^N P_m}{\sum_{m=2g+1}^N Q_m} = \frac{B_g(N)}{\varepsilon_g(N)}.$$

Ясно, что $B_g(N) \leq \varepsilon_g(N)$, и, значит, существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B_g(N)}{\varepsilon_g(N)} = \lambda_g.$$

Сравнивая формулы для $B_g(N)$ и $\varepsilon_g(N)$, мы получаем $\lambda_g = \lambda_{g-1}/4$. $\square$

§4. Явные формулы для малых родов

Явные формулы для чисел $\varepsilon_g(N)$ при малых значениях g можно найти, например, в [13]. Целью настоящего раздела является получение явных формул для чисел $B_g(N)$ и $B(m, n, N)$ при $g \leq 3$.

Выполним (по аналогии с [13]) следующие подстановки:

$$B(m, n, N) = \frac{(N-1)!^2 (N+1)}{12^g g! (m+2g-1)! (n+2g-1)! (m-1)! (n-1)!} U_g(m, n),$$

$$B_g(N) = \frac{(2N-2g)!}{12^g g! (N-g)! (N-2g-1)!} V_g(N),$$

$$\varepsilon_g(N) = \frac{(2N)!}{12^g g! N! (N-2g)!} W_g(N);$$

тогда рекуррентные соотношения переписываются в виде

$$\begin{aligned}
& (N+1)^2(N-1)^2(N-2)U_g(m, n) \\
& - (2N-1)(N-2)((N-n)(m-1)U_g(m-1, n) \\
& \quad + (N-m)(n-1)U_g(m, n-1)) \\
& + (N-1)((N-n-1)(N-n)(m-2)(m-1)U_g(m-2, n) \\
& - 2(N-m)(N-n)(m-1)(n-1)U_g(m-1, n-1) \\
& + (N-m-1)(N-m)(n-2)(n-1)U_g(m, n-2)) \\
& = 6g(N-1)^3(N-m-1)(N-m)(N-n-1)(N-n)U_{g-1}(m, n), \\
& (N+1)(2N-2g-1)V_g(N) - (2N-1)(N-2g-1)V_g(N-1) \\
& \quad = 6g(N-2)(N-1)^2V_{g-1}(N-2), \\
& (N+1)W_g(N) - (N-2g)W_g(N-1) = 3g(N-1)W_{g-1}(N-2).
\end{aligned}$$

Таблица 1. Число одноклеточных карт
и двукрашенных одноклеточных карт

$g = 0$	$\varepsilon_g(N) = \frac{(2N)!}{N!(N+1)!},$ $B_g(N) = \frac{(2N)!}{N!(N+1)!},$ $B(m, n, N) = \frac{(N-1)!^2}{m!n!(m-1)!(n-1)!}.$
$g = 1$	$\varepsilon_g(N) = \frac{(2N)!}{12N!(N-2)!},$ $B_g(N) = \frac{(2N-2)!}{12(N-1)!(N-3)!},$ $B(m, n, N) = \frac{(N-1)!^2(N+1)}{12(m+1)!(n+1)!(m-1)!(n-1)!}.$
$g = 2$	$\varepsilon_g(N) = \frac{(2N)!(5N-2)}{1440N!(N-4)!},$ $B_g(N) = \frac{(2N-4)!(5N^2-7N+6)}{1440(N-2)!(N-5)!},$ $B(m, n, N) = \frac{(N-1)!^2(N+1)P_3}{1440(m+3)!(n+3)!(m-1)!(n-1)!}.$
$g = 3$	$\varepsilon_g(N) = \frac{(2N)!(35N^2-266N+1146)}{362880N!(N-6)!},$ $B_g(N) = \frac{(2N-6)!(35N^4-182N^3+397N^2-346N+240)}{362880(N-3)!(N-7)!},$ $B(m, n, N) = \frac{(N-1)!^2(N+1)P_6}{362880(m+5)!(n+5)!(m-1)!(n-1)!}.$

Прямой проверкой убеждаемся, что

$$U_0(N) = \frac{1}{mn(m+n-1)}, \quad V_0(N) = \frac{1}{N(N+1)}, \quad W_0(N) = \frac{1}{N+1},$$

а также что при $g \geq 1$ функции $U_g(m, n)$, $V_g(N)$ и $W_g(N)$ являются многочленами степеней $3g-3$, $2g-2$ и $g-1$ соответственно. Методом неопределенных коэффициентов получаем, что $U_1(N) = V_1(N) = W_1(N) = 1$ и т.д.; результаты для $g \leq 3$ приведены в табл. 1, где

$$\begin{aligned} P_3 &= 5mn(m+n) + 13(m^2 + n^2) + 47mn + 86(m+n), \\ P_6 &= 70m^3n^3 + 35m^2n^2(m^2 + n^2) + 1260m^2n^2(m+n) + 273mn(m^3 + n^3) \\ &\quad + 6512mn(m^2 + n^2) + 504(m^4 + n^4) + 54123mn(m+n) + 9978(m^3 + n^3) \\ &\quad + 185554mn + 71842(m^2 + n^2) + 219918(m+n) + 238480. \end{aligned}$$

Приводя формулы для $B(m, n, N)$ для каждого значения g , мы подразумеваем, что аргументы связаны соотношением $N+1-m-n=2g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harer J., Zagier D.* The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Inv. Math.*, **85**, No. 3, 457–485 (1986).
2. *Penner R. C.* The moduli space of a punctured surface and perturbative series. *Bull. Amer. Math. Soc., New Ser.*, **15**, No. 1, 73–77 (1986).
3. *Концевич М.* Теория пересечения на пространстве модулей кривых. *Функц. анализ и его прил.*, **25**, вып. 2, 50–57 (1991).
4. *Looijenga E.* Cellular decompositions of compactified moduli spaces of pointed curves. The moduli space of curves (Texel Island, 1994), *Progr. Math.*, **129**, 369–400 (1995).
5. *Penner R. C.* Perturbative series and the moduli space of punctured surfaces. *J. Diff. Geom.*, **27**, 35–53 (1988).
6. *Zagier D.* On the distribution of the number of cycles of elements in symmetric groups, *Nieuw Arch. Wisk.* (4), **13**, No. 3, 489–495 (1995).
7. *Harary F., Tutte W. T.* The number of plane trees with a given partition, *Mathematika* (London), **11**, No. 2, 99–101 (1964).
8. *Cori R., Machi A.* Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Math.*, **10**, 403–427, 429–447, 449–467 (1992).
9. *Jones G.* Characters and surfaces. Preprint.
10. *Gorenstein D.* Finite groups. 2nd ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1980.
11. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. Наука, М., 1995.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 2-е изд., Физматгиз, М., 1961.
13. *Гурвич В. А., Шабат Г. Б.* Решение уравнения Харера–Цагира. *УМН*, **48**, вып. 1, 159–160 (1993).