Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, Диффузия в несжимаемом случайном потоке, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 10–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:18:02

УДК 517.97

Диффузия в несжимаемом случайном потоке^{*}

© 1997. В. В. Жиков

Памяти Сергея Михайловича Козлова

§1. Введение

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho - b(x) \cdot \nabla \rho, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

в котором $b(x)$ — случайное однородное соленоидальное векторное поле в $\mathbb{R}^d$ с нулевым средним: $\operatorname{div} b(x) = 0$, $\langle b \rangle = 0$.

Примером служит периодическое или почти периодическое соленоидальное поле. В этом случае $\langle b \rangle$ есть обычное среднее периодической или почти периодической функции. Уравнению (1.1) подчиняется плотность распределения броуновской частицы в стационарном потоке жидкости. Основной вопрос связан с асимптотическим поведением плотности $\rho(x, t)$ при большом t . Если роль конвективного члена $b \cdot \nabla \rho$ сводится к замене исходного уравнения «усредненным» уравнением $\partial \rho / \partial t = \operatorname{div}(A^0 \nabla \rho)$, в котором $A^0 > 0$ — постоянная матрица, то говорят о *диффузионном поведении* частицы.

Удобно переписать уравнение (1.1) в терминах матрицы тока. Для этого представим соленоидальный вектор $b(x)$ в виде дивергенции от кососимметрической матрицы:

$$b_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} B_{ij}(x), \quad B_{ij} = -B_{ji}, \quad (1.2)$$

что возможно, если, например, b периодичен, $\langle |b|^2 \rangle < \infty$. Тогда $b \cdot \nabla \rho = \operatorname{div}(B \nabla \rho)$, и мы получаем задачу Коши для дивергентного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \Delta \rho - \operatorname{div}(B \nabla \rho) = \operatorname{div}(\nabla \rho(x) A(x)), \\ \rho|_{t=0} &= \chi, \quad \chi \geq 0, \quad \chi \in L^2, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \chi \, dx = 1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $A(x) = E + B(x)$, E — единичная матрица. Например, в случае $d = 2$

$$b_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}, \quad b_2 = -\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №96-01-00503).

Мы покажем, что если $b(x)$ и $B(x)$ — реализации квадратично интегрируемых случайных однородных полей, то имеет место диффузионное поведение. Соответствующая *центральная предельная теорема* (ц.п.т.) будет получена как следствие подходящих свойств усреднения. Примеры показывают, что условие квадратичной интегрируемости, $\langle |B|^2 \rangle < \infty$, необходимо для конечности матрицы эффективной диффузии и тем более для других свойств усреднения. Здесь нужно принять во внимание следующие факты.

(i) *Несжимаемость потока всегда ведет к увеличению диффузии: $A^0 \geq E$* , см. [1, с. 30; 2, с. 23], а также §2 настоящей работы.

(ii) *Если $\langle |B|^2 \rangle = \infty$, то матрица A^0 может оказаться бесконечной.*

Действительно, рассмотрим двумерный случай, $x = (x_1, x_2)$, и пусть $\alpha = \alpha(x_1)$ зависит только от x_1 . Тогда по формуле Зельдовича [1, с. 23; 2, с. 16]

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \langle \alpha^2 \rangle + 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получим бесконечную эффективную диффузию, если $\langle |\alpha| \rangle < \infty$, $\langle \alpha^2 \rangle = \infty$. Конечно, для периодической функции $\alpha(x_1)$ векторное поле $b(x) = \{0, \partial\alpha/\partial x_1\}$ надо понимать в смысле распределений. Но для почти периодических или случайных $\alpha(x_1)$ построены примеры, когда поле $b(x)$ является гладким, см. [3, 4].

Часто об исходном векторном поле $b(x)$ «забывают» и имеют дело с уравнением (1.3), в котором кососимметрическая матрица $B(x)$ лишь измерима, — тогда говорят о диффузии в *турбулентном* потоке. Если $B(x)$ ограничена на $\mathbb{R}^d$ (будучи периодической, почти периодической или случайной однородной), то все вопросы усреднения и асимптотического поведения хорошо изучены, см. [1, 2, гл. VII]. В приложениях матрица B обычно не является даже локально ограниченной, а лишь квадратично суммируема. В связи с этим в последние годы обсуждается интересная гипотеза о справедливости теории усреднения при одном лишь условии $\langle |B|^2 \rangle < \infty$, см. [5, 6]. «Технические» трудности, возникающие здесь, можно обозначить термином «проблема единственности». Например, не доказана единственность решения задачи Коши (1.3). Далее, эффективная диффузия A^0 определяется с помощью эллиптических уравнений на вероятностном пространстве («задачи на ячейке»). Для них также имеются проблемы с единственностью, так что само понятие эффективной диффузии не определено однозначно.

2. Пусть (Ω, μ) — вероятностное пространство с d -мерной динамической системой $T(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$), обладающей обычными свойствами:

(i) преобразования $T(x): \Omega \rightarrow \Omega$ сохраняют меру μ ,

(ii) для любой μ -измеримой функции $g(\omega)$ на Ω функция $g(T(x)\omega)$ измерима на $\Omega \times \mathbb{R}^d$ (при этом на $\mathbb{R}^d$ задается мера Лебега).

Мы предполагаем, что динамическая система $T(x)$ эргодична и используем эргодическую теорему в следующей форме.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $g \in L^p(\Omega) = L^p(\Omega, d\mu)$, $p \geq 1$. Тогда для μ -почти всех $\omega \in \Omega$ реализация $g(x) = g(T(x)\omega)$ принадлежит $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$g(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \langle g \rangle = \int_{\Omega} g d\mu \quad \text{слабо в } L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

Допустим, что векторное поле $b(x)$ и кососимметрическая матрица $B(x)$, связанные соотношением (1.2), имеют структуру

$$b(x) = b(T(x)\omega), \quad B(x) = B(T(x)\omega), \quad b, B \in L^2(\Omega). \quad (1.4)$$

Само уравнение диффузии (1.3) имеет смысл для почти каждого $\omega \in \Omega$, а начальное значение χ считается не зависящим от ω .

Поясним смысл центральной предельной теоремы. По крайней мере в случае $B \in L^\infty(\Omega)$ очевидно, что для решения $\rho(x, t, \omega)$ уравнения (1.3)

$$\rho \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x, t, \omega) dx = 1 \quad \forall t > 0.$$

Поэтому функцию $\rho(x, t, \omega)$ можно рассматривать как плотность распределения некоторой случайной величины $\eta(t) = \eta(t, \omega)$. *Центральная предельная теорема* — это утверждение о том, что случайная величина

$$\varepsilon \eta(\varepsilon^{-2}t) \quad (t > 0) \quad (1.5)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к гауссовой случайной величине. Очевидно, что плотностью распределения величины (1.5) будет $\varepsilon^{-d} \rho(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega)$.

ТЕОРЕМА 1.1 (центральная предельная теорема в среднем). *Существует постоянная матрица $A^0 > 0$, такая, что для любых $t \geq 0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\varepsilon^{-d} \rho(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega) - K_0(x, t)] \varphi(x) dx \right| d\mu = 0, \quad (1.6)$$

где

$$K_0(x, t) = (\pi t)^{-d/2} (\det A^0)^{-1/2} \exp(-x(A^0)^{-1}x/t)$$

— фундаментальное решение усредненного уравнения.

Теорема 1.1 будет получена в качестве следствия теоремы об L^2 -усреднении.

Положим $A^\varepsilon(x) = E + B^\varepsilon(x)$, $B^\varepsilon(x) = B(T(y)\omega)$, $y = \varepsilon^{-1}x$ и рассмотрим семейство задач Коши

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \Delta u^\varepsilon + \operatorname{div}(B^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon), \quad u^\varepsilon|_{t=0} = \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.2 (об L^2 -усреднении). *Существует постоянная матрица $A^0 > 0$, такая, что для почти всех $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |u^\varepsilon(x, t, \omega) - u^0(x, t)|^2 dx = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (1.8)$$

где $u^0(x, t)$ — решение усредненной задачи Коши $\partial u^0 / \partial t = \operatorname{div}(A^0 \nabla u^0)$, $u|_{t=0} = \varphi$.

Некоторые свойства усреднения были ранее доказаны в [5] при условии, что

$$\langle |b|^{d+\delta} \rangle < \infty, \quad \langle |B|^q \rangle < \infty, \quad \delta > 0, \quad q = d \quad \text{для } d \geq 3, \quad q = 2 + \delta \quad \text{для } d = 2. \quad (1.9)$$

Указанная формулировка теоремы 1.1 не совсем точна. Дело в том, что при выполнении условий (1.4) имеет место единственность матрицы эффективной

диффузии (и в этом смысле все точно), но не доказана единственность решения задачи Коши. Последнее само по себе особых проблем не вызывает. Требуется лишь так выбрать решения $\rho(x, t, \omega)$, чтобы обеспечить измеримость по ω . Это получится, если решение ρ определить как подходящий предел решений задач Коши с B_N вместо B , где $B_N \in L^\infty(\Omega)$ и $B_N \rightarrow B$ в $L^2(\Omega)$ при $N \rightarrow \infty$.

В терминах только матрицы B (без привлечения векторного поля b) удастся сделать немного. А именно если $\langle |B|^q \rangle < \infty$ (q определено в (1.9)), то основные теоремы сохраняются, но с одной оговоркой: усредненная матрица, вообще говоря, *зависит* от указанной выше аппроксимации.

Общий случай $\langle |B|^2 \rangle < \infty$ обсуждается в [6]; развитый в этой работе подход очень интересен, хотя не вполне строго обоснован.

3. В дальнейшем придется часто переходить к пределу под знаком интеграла. Напомним соответствующие факты. Пусть Q — шар в $\mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА. Если последовательность $w^\varepsilon \in L^1(Q)$ равномерно интегрируема и $w^\varepsilon(x) \rightarrow w^0(x)$ п.в. на Q , то $w^\varepsilon \rightarrow w^0$ в $L^1(Q)$.

Известно, что равномерно интегрируемость эквивалентна слабой компактности в $L^1(Q)$.

ЛЕММА 1.3. Пусть $v \in L^2(\Omega)$ и $v_\varepsilon(x) = v(T(y)\omega)$, $y = \varepsilon^{-1}x$. Если последовательность u^ε ограничена в $L^2(Q)$, то произведение $u^\varepsilon v_\varepsilon$ слабо компактно в $L^1(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $|v_\varepsilon|^2$ равномерно интегрируема, так как слабо сходится в $L^1(Q)$ по эргодической теореме. Отсюда

$$\int_K |u^\varepsilon v_\varepsilon| dx \leq \left(\int_K |v_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_Q |u^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_K |v_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \leq \delta,$$

если только мера Лебега $|K|$ достаточно мала.

§2. Вопросы единственности

1. Ключевая проблема в случае неограниченной матрицы B — это единственность решения. Поясним эту проблему сначала на примере задачи Дирихле в шаре Q : $-\operatorname{div}(\nabla u + B\nabla u) = f \in L^2(Q)$, $B \in L^2(Q)$. Скажем, что $u \in H_0^1(Q)$ есть решение этой задачи, если

$$\int_Q (\nabla u \cdot \nabla \varphi + B \nabla u \cdot \nabla \varphi) dx = \int_Q f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q). \quad (2.1)$$

Очевидно, что условие $B \in L^2(Q)$ есть минимальное требование для того, чтобы это интегральное тождество вообще имело смысл. Существование решения устанавливается без всякого труда. Пусть B_N — кососимметричные матрицы, $B_N \in L^\infty(Q)$, $B_N \rightarrow B$ в $L^2(Q)$. Тогда решение u_N существует и благодаря кососимметричности матрицы B_N

$$\int_Q \nabla u_N \cdot \nabla u_N dx = \int_Q f u_N dx \leq \|f\|_{H^{-1}(Q)} \|u_N\|_{H_0^1(Q)}. \quad (2.2)$$

Таким образом, последовательность u_N ограничена в H_0^1 и предельным переходом получаем тождество (2.1). Однако единственность ничем не обеспечена. Кроме того, из (2.2) следует только неравенство

$$\int_Q |\nabla u|^2 dx \leq \int_Q f u dx,$$

причем равенство («энергетическое равенство») остается под вопросом.

Единственность решения удастся доказать только с привлечением векторного поля $b(x)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $b \in L^2(Q)$, $\operatorname{div} b = 0$. Тогда задача Дирихле $\Delta u + b \cdot \nabla u = f$, $u \in H_0^1(Q)$, имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u — решение однородного уравнения. Тогда

$$\int_Q \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_Q b \cdot \nabla u \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q). \quad (2.3)$$

Возьмем срезку

$$\bar{u} = \begin{cases} u, & \text{если } |u| \leq k, \\ \pm k, & \text{если } |u| > k, \end{cases}$$

и воспользуемся доказанным ниже равенством

$$\int_Q b \cdot \nabla u \bar{u} dx = 0. \quad (2.4)$$

Поскольку $b \cdot \nabla u \in L^1(Q)$, в тождестве (2.3) можно взять $\varphi = \bar{u}$. В результате $\int_Q \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx = 0$ и, полагая $k \rightarrow \infty$, получим $\int_Q |\nabla u|^2 dx = 0$, т.е. $u = 0$ в H_0^1 .

Докажем равенство (2.4). Сначала рассмотрим случай $u \geq 0$, и пусть $S = \{x \in Q, u > k\}$. Замечаем, что

$$\begin{aligned} \int_Q b \cdot \nabla \bar{u} \bar{u} dx &= \frac{1}{2} \int_Q b \cdot \nabla (\bar{u}^2) dx = 0 \quad (\text{так как } \bar{u}^2 \in H_0^1), \\ \int_Q b \cdot \nabla u \cdot \bar{u} dx &= \int_Q b \cdot (\nabla u - \nabla \bar{u}) \bar{u} dx \\ &= k \int_S b \cdot (\nabla u - \nabla \bar{u}) dx = k \int_Q b \cdot (\nabla u - \nabla \bar{u}) dx = 0. \end{aligned}$$

Общий случай легко получается отсюда с помощью разложения u на положительную и отрицательную части.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $b \in L^2(Q)$, $\operatorname{div} b = 0$, $b = \operatorname{div} B$, где $B \in L^2(Q)$ — кососимметрическая матрица. Если $u \in H^1(Q)$, $\bar{u}$ — срезка, то

$$\int_Q b \cdot \nabla u \bar{u} \varphi dx = - \int_Q B \nabla u \cdot \nabla \varphi \bar{u} dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $b = \operatorname{div} B$ означает по определению, что

$$\int_Q b \cdot \psi dx = - \int_Q B \cdot \nabla \psi dx \quad \forall \psi \in (C_0^\infty(Q))^d.$$

Поскольку $b, B \in L^2$, это тождество выполнено для $\psi \in (H_0^1)^d$. Считая функцию u гладкой, возьмем $\psi = \nabla u \bar{u} \varphi$. Тогда $\nabla \psi = \nabla u \times \nabla \bar{u} \varphi + \nabla u \times \nabla \varphi \bar{u} + \bar{u} \varphi \nabla^2 u$ и $B \nabla u \cdot \nabla \bar{u} = 0$, $B \cdot \nabla^2 u = 0$ п.в. на Q и, значит, равенство (2.5) имеет место. Путем аппроксимации оно распространяется на $u \in H^1(Q)$.

2. Перейдем к рассмотрению эллиптических уравнений на вероятностном пространстве Ω . Напомним, что вектор $v = v(\omega)$, заданный на Ω , $v \in L^1(\Omega)$, потенциален (соленоидален), если почти все его реализации $v(x) = v(T(x)\omega)$ потенциальны (соленоидальны) в $\mathbb{R}^d$.

Пусть $L_{\text{sol}}^1(\Omega)$ — множество всех соленоидальных векторов из $L^1(\Omega)$, а $\mathcal{V}_{\text{pot}}^p$ — множество всех потенциальных векторов v из $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) с нулевым средним, $\langle v \rangle = 0$.

Известно, что $\mathcal{V}_{\text{pot}}^\infty$ плотно в $\mathcal{V}_{\text{pot}}^2$ и для вектора $g \in L^1(\Omega)$

$$\operatorname{div} g = 0 \quad (\text{т.е. } g \in L_{\text{sol}}^1(\Omega)) \iff \int_{\Omega} g \cdot v \, d\mu = \langle g \cdot v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^\infty. \quad (2.6)$$

Пусть $B \in L^2(\Omega)$. Существование решения задачи

$$v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^2 = V, \quad \operatorname{div}(v + Bv) = \operatorname{div} f, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (2.7)$$

устанавливается без труда, например, аппроксимацией.

Скажем, что для нее имеет место *свойство единственности*, если уравнения $\operatorname{div}(v \pm Bv) = 0$ не имеют нетривиальных решений. Важно, что при условии единственности для задачи (2.7) найдутся «почти-решения» из $\mathcal{V}_{\text{pot}}^\infty$, т.е. для любого $\delta > 0$ существуют $v^\delta \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^\infty$, $f^\delta \in L^2(\Omega)$, такие, что $\operatorname{div}(v^\delta + Bv^\delta) = f^\delta$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|v - v^\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f - f^\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Для доказательства достаточно проверить, что множество $\{v + Bv, v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^\infty\}$ плотно в V^* . Если это не так, то

$$\exists \varphi \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^2, \quad 0 = \langle \varphi \cdot (v + Bv) \rangle = \langle (\varphi - B\varphi) \cdot v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^\infty.$$

Из (2.6) следует, что $\operatorname{div}(\varphi - B\varphi) = 0$, т.е. $\varphi = 0$.

3. Докажем следующее ключевое утверждение.

ЛЕММА 2.3. *Условие (1.4) обеспечивает свойство единственности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^2$, $\operatorname{div}(v + Bv) = 0$. Для типичной точки $\omega \in \Omega$ положим $v(x) = v(T(x)\omega)$, $B(x) = B(T(x)\omega)$. Тогда вектор $v(x)$ потенциален, а вектор $v(x) + B(x)v(x)$ соленоидален в $\mathbb{R}^d$.

Положим $v_\varepsilon(x) = v(\varepsilon^{-1}x)$, $B^\varepsilon(x) = B(\varepsilon^{-1}x)$, $b^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}b(\varepsilon^{-1}x)$. Вектор v_ε потенциален в шаре $Q = \{|x| < 1\}$, $v_\varepsilon \rightharpoonup \langle v \rangle = 0$ слабо в $L^2(Q)$ по эргодической теореме. Поэтому справедливо представление $v_\varepsilon = \nabla w_\varepsilon$, где $w_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H^1(Q)$. В терминах потенциала w_ε имеем $\Delta w_\varepsilon + b^\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon = 0$ в Q . В соответствующем интегральном тождестве можно взять пробную функцию $\varphi \bar{w}_\varepsilon$, где $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, а $\bar{w}_\varepsilon$ — срезка. Тогда, согласно (2.5),

$$\int_Q \varphi \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla \bar{w}_\varepsilon \, dx + \int_Q (\nabla w_\varepsilon + B^\varepsilon \nabla w_\varepsilon) \cdot \nabla \varphi \bar{w}_\varepsilon \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q).$$

Замечаем, что последовательность $B^\varepsilon \nabla w_\varepsilon$ слабо компактна в $L^1(Q)$ (по лемме 1.3), а $|\bar{w}_\varepsilon| \leq k$ по определению срезки. Кроме того, без потери общности

считаем, что $\bar{w}_\varepsilon \rightarrow 0$ п.в. на Q . По теореме Лебега $(\nabla w_\varepsilon + B_\varepsilon \nabla w_\varepsilon) \cdot \nabla \varphi \bar{w}_\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^1(Q)$ и поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \varphi \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla \bar{w}_\varepsilon dx = 0. \quad (2.8)$$

Далее, полагая $L_\varepsilon(k) = \{x \in Q, |w_\varepsilon| > k\}$, имеем

$$\int_Q \varphi \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon dx = \int_Q \varphi \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla \bar{w}_\varepsilon dx + \int_{L_\varepsilon(k)} \varphi \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon dx. \quad (2.9)$$

Поскольку w_ε ограничена в $L^1(Q)$, то $|L_\varepsilon(k)| \leq Ck^{-1}$. Семейство $\nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon$ слабо компактно в $L^1(Q)$; поэтому второй интеграл справа в (2.9) можно сделать сколь угодно малым за счет выбора $k \geq k_0$. Отсюда и из (2.8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \varphi \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q).$$

С другой стороны, по эргодической теореме

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \varphi \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \varphi v_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx = \langle v^2 \rangle \int_Q \varphi dx > 0,$$

если только $\int_Q \varphi dx > 0$. Мы получим, что $\langle v^2 \rangle = 0$. Лемма доказана.

4. Введем теперь собственно задачу на ячейке:

$$v \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^2, \quad \operatorname{div}((\xi + v)A) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad A = E + B. \quad (2.10)$$

Если выполняется условие (1.4), то она однозначно разрешима и решение зависит от ξ линейно. Усредненную матрицу определим равенством $\xi A^0 = \langle (\xi + v)A \rangle$. Для почти-решений имеем

$$v^\delta \in \mathcal{V}_{\text{pot}}^\infty, \quad \operatorname{div}((\xi + A)v^\delta) = \operatorname{div} F^\delta, \quad (2.11)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|v^\delta - v\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|F^\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (2.12)$$

Положим $q^\delta = (\xi + v^\delta)A$. Очевидно, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} q^\delta = (\xi + v)A$ в $L^1(\Omega)$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle q^\delta \rangle = \xi A^0. \quad (2.13)$$

Далее, из (2.11) и (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \langle q^\delta \rangle \cdot \xi &= \langle (\xi + v^\delta)A \cdot \xi \rangle = \langle (\xi + v^\delta)A \cdot (\xi + v^\delta) \rangle - \langle F^\delta \cdot v^\delta \rangle \\ &= \langle (\xi + v^\delta) \cdot (\xi + v^\delta) \rangle - \langle F^\delta \cdot v^\delta \rangle, \\ \xi A^0 \xi &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle q^\delta \rangle \cdot \xi = \langle (\xi + v)(\xi + v) \rangle \geq \xi^2, \end{aligned}$$

т.е. $A^0 \geq E$. Матрица A^0 , вообще говоря, несимметрична, но в усредненном уравнении участвует только симметрическая часть.

5. При выполнении условия (1.4) единственность решения эллиптического уравнения в $\mathbb{R}^d$

$$w \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad -\operatorname{div}(A \nabla w) + \lambda w = f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \lambda > 0, \quad (2.14)$$

не доказана.

Единственность имеет место, если $b \in L^2(\Omega)$, $B \in L^d(\Omega)$. На доказательстве этого факта останавливаться не будем. Указанное условие обеспечивает и единственность решения задачи Коши $\partial u / \partial t = \operatorname{div}(A(x) \nabla u)$, $u|_{t=0} = f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

При этом функцию $u(x, t)$ мы называем решением, если

- (i) $u(\cdot, t)$ слабо непрерывна как функция от $t \geq 0$ со значениями в $L^2(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) $\sup_{t \geq 0} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty$, $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$;
- (iii) преобразование Лапласа

$$w = w(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, t) dt, \quad \lambda > 0$$

(принадлежащее $H^1(\mathbb{R}^d)$ в силу (ii)), есть решение уравнения (2.14).

§3. Усреднение

1. Как и ранее, положим $A^\varepsilon(x) = A(T(y)\omega)$, $y = \varepsilon^{-1}x$, $A = E + B$.

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что для задачи на ячейке выполнено свойство единственности, например, $b \in L^2(\Omega)$, $B \in L^2(\Omega)$. Пусть Q — шар и*

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f^\varepsilon \text{ в } Q, \quad u^\varepsilon \in H^1(Q), \quad f^\varepsilon \in L^2(Q). \quad (3.1)$$

Если $f^\varepsilon \rightharpoonup f$, $u^\varepsilon \rightharpoonup u^0$ слабо в $L^2(Q)$ и $H^1(Q)$, то $-\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f$ в Q .

Доказательство разобьем на несколько шагов. В общих чертах оно следует классической схеме [7, 1, 2].

(i) Последовательность векторов $p^\varepsilon = A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$ слабо компактна в $L^1(Q)$ (по лемме 1.3), и без потери общности можно считать, что $p^\varepsilon \rightharpoonup p^0$ в $L^1(Q)$. Переходом к пределу в (3.1) получим тождество

$$\int_Q p^0 \cdot \nabla h dx = \int_Q f h dx, \quad h \in C_0^\infty(Q), \quad (3.2)$$

и требуется доказать равенство $p^0 = A^0 \nabla u^0$.

(ii) Пусть $v^\delta = v^\delta(\omega)$ — почти-решения задачи (2.10). Положим $v^\delta(x) = v^\delta(T(x))$, $v_\varepsilon^\delta = v^\delta(\varepsilon^{-1}x)$ и введем аналогичные обозначения для других функций на Ω .

Поскольку $v^\delta \in \mathcal{V}_{\text{rot}}^\infty$, то при фиксированном $\delta > 0$ вектор v_ε^δ потенциален в Q , $|v_\varepsilon^\delta| \leq l(\delta)$, $v_\varepsilon^\delta \rightharpoonup 0$ слабо в $L^2(Q)$. Отсюда следует представление

$$v_\varepsilon^\delta = \nabla w^\varepsilon, \quad w^\varepsilon \in W^{1,\infty}(Q), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w^\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} = 0, \quad (3.3)$$

и при этом $\operatorname{div}[(\xi + \nabla w^\varepsilon)A^\varepsilon] = \operatorname{div} F_\varepsilon^\delta$ в Q , $(\xi + \nabla w^\varepsilon)A^\varepsilon = q_\varepsilon^\delta$, где $q^\delta = (\xi + v^\delta)A$.

(iii) Итак, имеем два интегральных тождества

$$\begin{aligned} \int_Q A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla h &= \int_Q f^\varepsilon h dx, \\ \int_Q (\xi + \nabla w^\varepsilon) A^\varepsilon \cdot \nabla h &= \int_Q F_\varepsilon^\delta \cdot \nabla h dx, \quad h \in C_0^\infty(Q). \end{aligned}$$

Возьмем в первом из них $h = \varphi(w^\varepsilon + \xi \cdot x)$, а во втором $h = \varphi u^\varepsilon$, $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Это можно сделать в силу того, что $A^\varepsilon \in L^2(Q)$, $w^\varepsilon \in L^\infty(Q)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \int_Q f^\varepsilon(\xi \cdot x + w^\varepsilon) \varphi \, dx - \int_Q (\xi \cdot x + w^\varepsilon) p^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \\ = \int_Q F_\varepsilon^\delta \cdot \nabla(\varphi u^\varepsilon) \, dx - \int_Q u^\varepsilon q_\varepsilon^\delta \cdot \nabla \varphi \, dx = J_\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.4)$$

и требуется перейти в этом равенстве к пределу сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\delta \rightarrow 0$. Рассмотрим левую часть равенства (3.4). В силу (3.3) к последовательности $(\xi \cdot x + w^\varepsilon) p^\varepsilon \cdot \nabla \varphi$ применима теорема Лебега. Поэтому предел левой части равен

$$J = \int_Q f \xi \cdot x \varphi \, dx - \int_Q \xi \cdot x p^0 \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Кроме того, взяв $h = \varphi \xi \cdot x$ в тождестве (3.2), получим соотношение

$$\int_Q \xi \cdot x p^0 \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_Q p^0 \cdot \xi \varphi \, dx = \int_Q f \xi \cdot x \varphi \, dx,$$

из которого ясно, что

$$J = \int_Q p^0 \cdot \xi \varphi \, dx. \quad (3.5)$$

Изучим теперь предел правой части равенства (3.4). Так как $q^\delta \in L^2(\Omega)$, то $q_\varepsilon^\delta \rightharpoonup \langle q^\delta \rangle$ слабо в $L^2(Q)$. Поскольку $u^\varepsilon \rightarrow u^0$ сильно в $L^2(Q)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon q_\varepsilon^\delta \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0 \langle q^\delta \rangle \cdot \nabla \varphi \, dx. \quad (3.6)$$

Последовательность $\nabla(\varphi u^\varepsilon)$ ограничена в $L^2(Q)$, и по эргодической теореме

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_Q F_\varepsilon^\delta \cdot \nabla(\varphi u^\varepsilon) \, dx \right| \leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q |F_\varepsilon^\delta|^2 \, dx = C |Q| \langle |F^\delta|^2 \rangle.$$

Учитывая (3.6), (2.12), (2.13), заключаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^d} u^0 \langle q \rangle \cdot \nabla \varphi = - \int_Q \xi A^0 \cdot \varphi u^0 = \int_Q A^0 \nabla u^0 \cdot \xi \varphi \, dx.$$

Сравнивая этот результат с (3.5), получим искомое соотношение $p^0 = A^0 \nabla u^0$. Лемма доказана.

2. Перейдем к усреднению задачи Коши

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon), \quad u^\varepsilon|_{t=0} = f^\varepsilon, \quad f^\varepsilon \rightharpoonup f \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^d). \quad (3.7)$$

Ввиду возможной неединственности требуется сначала уточнить, о каких решениях идет речь. При фиксированном $\varepsilon > 0$ мы определим решение с помощью аппроксимаций. Пусть $B_N \in L^\infty(\Omega)$, B_N кососимметричны и $B_N \rightarrow B$ в $L^2(\Omega)$

при $N \rightarrow \infty$. Тогда $B_N(x) \rightarrow B(x)$ в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (для п.в. ω), и возникает аппроксимация задачи (3.7) в виде $\partial u_N^\varepsilon / \partial t = \text{div}(A_N^\varepsilon \nabla u_N^\varepsilon)$, $u_N^\varepsilon|_{t=0} = f^\varepsilon$.

Рассмотрим $u_N^\varepsilon(x, t)$ как функции аргумента $t \geq 0$ со значениями в $L^2(\mathbb{R}^d)$ и докажем, что это семейство *слабо равномерно непрерывно* на $[0, \infty)$.

Действительно, в силу энергетической оценки

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_N^\varepsilon(x, t)|^2 dt + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_N^\varepsilon|^2 dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} |f^\varepsilon|^2 dx \leq l^2 < \infty \quad (3.8)$$

достаточно проверить, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ семейство функций $\alpha_N^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} u_N^\varepsilon \varphi dx$ равномерно непрерывно на $[0, \infty)$. Пусть $\text{supp } \varphi \subset Q$, где Q — шар. Тогда

$$\begin{aligned} |\alpha_N^\varepsilon(t_2) - \alpha_N^\varepsilon(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} A_N^\varepsilon \nabla u_N^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\ &\leq |t_2 - t_1|^{1/2} \sup |\nabla \varphi| \left(\int_Q |A_N^\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_N^\varepsilon|^2 dx dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как $\int_Q |A_N^\varepsilon|^2 dx \leq C_0(Q)$, где C_0 не зависит от ε , N , то

$$|\alpha_N^\varepsilon(t_2) - \alpha_N^\varepsilon(t_1)| \leq l C_1(\varphi, Q) |t_2 - t_1|^{1/2},$$

и утверждение доказано.

Теперь можно определить решение u^ε уравнения (3.7) (при фиксированном ε) как предел подпоследовательности u_N^ε , при $N' \rightarrow \infty$. Очевидно, что решения u^ε останутся слабо равномерно непрерывными на $[0, \infty)$. Займемся предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$. Без потери общности полагаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u^\varepsilon(\cdot, t) \rightharpoonup u^0(\cdot, t) \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^d) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.9)$$

Для преобразований Лапласа w^ε имеем $-\text{div}(A^\varepsilon \nabla w^\varepsilon) + \lambda w^\varepsilon = f^\varepsilon$, а из (3.9) и получающегося из (3.8) энергетического неравенства следует, что

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w^0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u^0(x, t) dt \text{ слабо в } H^1(\mathbb{R}^d).$$

Тогда, согласно лемме 3.1, $-\text{div}(A^0 \nabla w^0) + \lambda w^0 = f$. Отсюда легко заключаем, что *в ситуации задачи (3.7) решения слабо сходятся* (см. (3.9)) *к решению усредненной задачи с предельным начальным значением*.

Задача Коши (1.7) получается из (3.7), когда $f^\varepsilon = \varphi$ не зависит от ε . Покажем, что в этом случае имеет место L^2 -сходимость (1.8). Для этого наряду с (1.7) рассмотрим сопряженную задачу $\partial v^\varepsilon / \partial t = \text{div}(\nabla v^\varepsilon A^\varepsilon)$, $v^\varepsilon|_{t=0} = g^\varepsilon$. Решения этих задач будут связаны формулой Грина

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon(x, t_0) g^\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} v^\varepsilon(x, t_0) \varphi(x) dx, \quad (3.10)$$

если их определить путем одновременной аппроксимации. Положим $g^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t_0) - u^0(x, t_0)$. Согласно предыдущему, $v^\varepsilon(x, t_0) \rightharpoonup 0$ слабо в $L^2(\mathbb{R}^d)$ и из (3.10) получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon(x, t_0) [u^\varepsilon(x, t_0) - u^0(x, t_0)] dx = 0,$$

из которого следует сильная сходимость (1.8).

Итак, для почти каждого $\omega \in \Omega$ мы построили решение $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ задачи Коши (1.7) и доказали теорему об L^2 -усреднении. В случае единственности решения к этому добавить нечего — функция u^ε будет измерима на $\mathbb{R}^d \times \Omega \times [0, \infty)$.

В случае неединственности измеримость по $\omega \in \Omega$ ниоткуда не следует. В связи с этим нужно слегка изменить процесс построения решения.

Снова берем решения $u_N^\varepsilon(x, t, \omega)$ ($\varepsilon > 0$ пока фиксировано), но рассматриваем их как функции аргумента $t \geq 0$ со значениями в $L^2(\mathbb{R}^d \times \Omega)$. Это семейство слабо равномерно непрерывно, и мы определяем u^ε как слабый предел подпоследовательности $u_{N'}^\varepsilon$, при $N' \rightarrow \infty$ для любого $t \geq 0$. Легко понять, что для почти всех $\omega \in \Omega$ семейство $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ слабо равномерно непрерывно в $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Остается проверить, что $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ есть решение предельного уравнения. Для этого берем преобразование Лапласа $w_N^\varepsilon(x, \lambda, \omega)$ и интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} A_N^\varepsilon \nabla w_N^\varepsilon \cdot \nabla \varphi h \, dx \, d\mu + \lambda \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} w_N^\varepsilon \varphi h \, dx \, d\mu = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} f^\varepsilon \varphi h \, dx \, d\mu$$

$$(\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \, h \in L^\infty(\Omega)),$$

в котором нетрудно перейти к пределу при $N' \rightarrow \infty$, используя энергетическую оценку (3.8). В свою очередь, из предельного тождества следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} A^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^d} w^\varepsilon \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi \, dx,$$

т. е. u^ε есть решение уравнения диффузии.

§ 4. Связь между усреднением и диффузионным поведением

В некоторых случаях указанная в заголовке связь устанавливается чрезвычайно просто. Все зависит от того, в какой форме доказаны свойства усреднения. Пусть $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ — решение задачи Коши (1.7) и для п.в. $\omega \in \Omega$ имеет место поточечная сходимость:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq R} |u^\varepsilon(x, t, \omega) - u^0(x, t)| = 0 \quad (\forall t > 0, \, R > 0). \quad (4.1)$$

Плотность $\rho_\varepsilon(x, t, \omega) = \varepsilon^{-d} \rho(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla \rho_\varepsilon A_\varepsilon), \quad \rho_\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon^{-d} \chi(\varepsilon^{-1}x) = \chi_\varepsilon(x).$$

По формуле Грина

$$\int_{\mathbb{R}^d} [\rho_\varepsilon(x, t, \omega) - K_0(x, t)] \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon(x, t, \omega) \chi_\varepsilon(x) \, dx - u^0(0, t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (u^\varepsilon(x, t, \omega) - u^0(x, t)) \chi_\varepsilon(x) \, dx + o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.2)$$

поскольку χ_ε является дельтаобразной последовательностью. Из (4.1) и оценки $|u^\varepsilon(x, t, \omega)| \leq \sup |\varphi|$ ясно, что первое слагаемое в (4.2) также есть $o(1)$. Получаем, что для почти всех ω

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} [\varepsilon^{-d} \rho(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-2}t, \omega) - K_0(x, t)] \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0,$$

т. е. устанавливаем *индивидуальную ц.п.т.* Очевидно, это более сильное утверждение, чем теорема 1.1. Часто L^2 -сходимость (1.8) влечет за собой поточечную сходимость (4.1). Например, это так, если $B \in L^\infty(\Omega)$, поскольку в этом случае решения $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ ($t > 0$) гёльдеровы по x равномерно по ε .

В наших условиях нельзя гарантировать даже *непрерывности* функции $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ по x при *фиксированном* $\varepsilon > 0$, и индивидуальная ц.п.т. под вопросом.

Покажем, что теорема об L^2 -усреднении влечет за собой ц.п.т. в среднем. Положим

$$\Phi_\varepsilon(x, t) = \left(\int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, t, \omega) - u^0(x, t)|^2 d\mu \right)^{1/2},$$

где $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ — решение задачи Коши (1.7).

ЛЕММА 4.1. *Семейство Φ_ε равномерно липшицево на $\mathbb{R}^d$, а именно*

$$|\Phi_\varepsilon(x_1, t) - \Phi_\varepsilon(x_2, t)| \leq l|x_1 - x_2|, \quad l = 2 \sup |\nabla \varphi|. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что решения $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ непрерывны по $x \in \mathbb{R}^d$ и для них справедлив обычный принцип максимума. Введем обозначение $u^\varepsilon(x, t, \omega) = u^\varepsilon(x, t, \omega, \varphi)$ и более широкое семейство решений

$$\bar{u}^\varepsilon(x, y, t, \omega) = u^\varepsilon(x, t, \omega, \varphi_y), \quad \varphi_y(\cdot) = \varphi(\cdot + y),$$

так что $y \in \mathbb{R}^d$ играет роль параметра. Легко проверяется, что

$$u^\varepsilon(x, t, \omega) = \bar{u}^\varepsilon(x, 0, t, \omega) = \bar{u}^\varepsilon(0, x, t, T(-x)\omega).$$

Мера μ инвариантна относительно преобразования $T(x)$ и поэтому

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon^2(x, t) &= \int_{\Omega} |\bar{u}^\varepsilon(0, x, t, T(-x)\omega) - u^0(x, t)|^2 d\mu \\ &= \int_{\Omega} |\bar{u}^\varepsilon(0, x, t, \omega) - u^0(x, t)|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Но $\bar{u}^\varepsilon(0, x_1, t, \omega)$ и $\bar{u}^\varepsilon(0, x_2, t, \omega)$ — это значения в нуле решений одного и того же уравнения с различными начальными значениями. По принципу максимума $|\bar{u}^\varepsilon(0, x_1, t, \omega) - \bar{u}^\varepsilon(0, x_2, t, \omega)| \leq \sup_z |\varphi(z + x_1) - \varphi(z + x_2)| \leq |x_1 - x_2| \sup |\nabla \varphi|$.

Поскольку аналогично оценивается $|u^0(x_1, t) - u^0(x_2, t)|$, то неравенство (4.3) доказано. Остается избавиться от предположения, что решение задачи (1.7) непрерывно по x . Рассмотрим аппроксимирующие решения u_N^ε , для которых указанные свойства непрерывности и принцип максимума, очевидно, выполняются. Для них из (4.3) имеем

$$\|u_N^\varepsilon(x_1, t, \cdot) - u^0(x_1, t)\|_{L^2(\Omega)} - \|u_N^\varepsilon(x_2, t, \cdot) - u^0(x_2, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq l|x_1 - x_2|. \quad (4.4)$$

Обозначим через v_N^ε последовательность выпуклых комбинаций функций u_N^ε , таких, что

$$v_N^\varepsilon(x, t, \omega) \rightarrow u^\varepsilon(x, t, \omega) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ при } N \rightarrow \infty$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ и фиксированных $\varepsilon > 0$, $t > 0$. Важно заметить, что неравенство (4.4) сохраняется, если заменить u_N^ε на v_N^ε . Поэтому и для решения $u^\varepsilon(x, t, \omega)$ оно выполнено (для почти всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$). Лемма доказана.

Теперь из L^2 -сходимости (1.8) по теореме Лебега следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} |u^\varepsilon(x, t, \omega) - u^0(x, t)|^2 dx d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_\varepsilon^2(x, t) dx = 0, \quad t \geq 0,$$

и это вместе с оценкой (4.3) означает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(x, t) = 0 \quad \text{равномерно на компактах из } \mathbb{R}^d. \quad (4.5)$$

Из (4.2) (с точностью до $o(1)$) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\rho_\varepsilon(x, t, \omega) - K_0(x, t)] \varphi(x) dx \right| d\mu \\ & \leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} |u^\varepsilon(x, t, \omega) - u^0(x, t)| \chi_\varepsilon(x) dx d\mu \\ & \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u^\varepsilon(x, t, \omega) - u^0(x, t)|^2 \chi_\varepsilon(x) dx \right)^{1/2} d\mu \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_\varepsilon^2(x, t) \chi_\varepsilon(x) dx \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу (4.5) и оценки $0 \leq \Phi_\varepsilon \leq 2 \sup |\varphi|$. Теорема 1.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М., 1993
2. Jikov V., Koslov S., Oleinik O. Homogenization of differential operators and integral functionals. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
3. Matheron G., de Marsity G. Is transport in porous media always diffusive? A counterexample. Water Resource Res., **16**, 901–917 (1980).
4. Жиков В. В. Замечания к проблеме остаточной диффузии. УМН, **44**, №6, 155–156 (1989).
5. Avelaneda M., Majda A. J. An integral representation and bounds on the effective diffusivity in passive advection by laminar and turbulent flows. Commun. Math. Phys., **138**, 339–391 (1991).
6. Fannjiang A., Papanicolaou G. C. Diffusion in turbulence, Probability Theory and Related Fields, No. 105, 279–334 (1996).
7. Tartar L. Homogénéisation. Cours Peccot au Collège de France, Paris, 1977.