Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Мельникова, Свойства d -полугрупп Лионса
и обобщенная корректность задачи Коши, *Функци.
анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 23–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa472>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:38:20

УДК 517.955.4

Свойства d -полугрупп Лионса и обобщенная корректность задачи Коши*

© 1997. И. В. МЕЛЬНИКОВА

§ 1. Введение

В последнее время большой интерес, связанный с их широким применением, вызывают некорректные краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений. Среди них особое место занимает задача Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = x, \quad A: D(A) \subset X \rightarrow X, \quad (1)$$

в банаховом пространстве X с оператором A , не являющимся генератором сильно непрерывной полугруппы. Современный подход к решению этой задачи состоит в построении различных семейств ограниченных операторов: регуляризаторов, интегрированных полугрупп, C -полугрупп (локальных и глобальных). С помощью таких полугрупп на некотором подмножестве из $D(A)$ ($D(A^n)$ для интегрированных полугрупп и $CD(A)$ для C -полугрупп) строится решение задачи, устойчивое относительно изменения x по некоторой более сильной норме, чем норма исходного пространства (см. [4, 8, 10, 12, 15, 16] и др.). Обзор [2] посвящен полугрупповым методам решения задач Коши — задачи (1) и вырожденной задачи

$$Bu'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = x, \quad \ker B \neq \{0\}. \quad (2)$$

Регуляризаторы позволяют строить приближенное решение задачи (зависящее от параметра погрешности начальных данных и параметра регуляризации), устойчивое в X . В [3, 14] установлена связь между полугрупповыми методами и методами регуляризации некорректной задачи Коши. Показано, что широкий класс регуляризаторов совпадает с C -полугруппами, зависящими от параметра регуляризации.

Настоящая работа посвящена другому подходу к решению классически некорректных задач: указаны условия на оператор A , при которых для любого x из X существует единственное и устойчивое решение задачи (1) в пространстве абстрактных распределений.

Распределение $U \in \mathcal{D}'_0(X)$ является (обобщенным) решением задачи (1), если

$$\langle U, \varphi' \rangle + A \langle U, \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi \rangle x, \quad x \in X, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad (3)$$

или (что эквивалентно)

$$P * U = \delta \otimes x, \quad P := \delta' \otimes I - \delta \otimes A \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X_A, X)), \quad (4)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №95-01-00283.

где

$$\langle \delta' \otimes I, \varphi \rangle := \langle \delta', \varphi \rangle I, \quad \langle \delta \otimes A, \varphi \rangle := \langle \delta, \varphi \rangle A, \quad \langle \delta \otimes x, \varphi \rangle := \langle \delta, \varphi \rangle x,$$

$\mathcal{D}$ — пространство основных функций, $\mathcal{D}'(X) := \mathcal{L}(\mathcal{D}, X)$ — пространство абстрактных распределений, $\mathcal{D}'_0(X)$ — подпространство распределений с носителем в $\mathbb{R}_+$, $X_A := \{D(A), \|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|\}$.

Для любого классического решения задачи (1) распределение $U = H(t)u(t)$ ($H(t)$ — функция Хевисайда) является решением уравнений (3), (4). Впервые понятие решения и корректности абстрактной задачи Коши в смысле распределений было введено Лионсом [13]: вместо операторов решения $T(t)$ ($T(t)x := u(t)$), порождающих полугруппы с различными свойствами в банаховом пространстве X , введена полугруппа-распределение $Q \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X))$, удовлетворяющая «полугрупповому» соотношению

$$(i) \quad \langle Q, \varphi * \psi \rangle = \langle Q, \varphi \rangle \langle Q, \psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_0.$$

Доказано, что существование полугруппы-распределения эквивалентно существованию решения уравнений

$$P * Q = \delta \otimes I, \quad Q * P = \delta \otimes J, \quad (5)$$

где I и J — единичные операторы на X и X_A соответственно, а A — генератор полугруппы. Чазарайн доказал, что существование решения уравнений (5) эквивалентно существованию единственного решения уравнения (4) [6]. В [11, 17, 18, 20, 9] дана характеристика оператора, порождающего обобщенно-корректную задачу в терминах его резольвенты (обобщенной резольвенты, асимптотической резольвенты).

Однако только после появления теории интегрированных полугрупп стала понятна суть всех этих связей и характеристик: как известно, структурные теоремы для распределения F гарантируют существование $m \geq 0$ и непрерывной функции $f(t)$, таких, что $F = f^{(m)}$. Для абстрактных распределений эти теоремы тоже имеют место [9]. Так вот, интегрированная полугруппа $V(t)$ и есть та самая непрерывная функция, существование которой для полугруппы-распределения Q гарантируют структурные теоремы. В частности, для экспоненциально ограниченной Q существует экспоненциально ограниченная интегрированная полугруппа, а для $Q \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X, X_A))$ существует локальная интегрированная полугруппа [1, 14]. В [19] связь между локальными интегрированными полугруппами и полугруппами-распределениями была установлена через существование эквинепрерывной полугруппы в пространстве Фреше $Y := \{\bigcap D(A^k), \|x\|_k = \|A^k x\|\}$.

В настоящей работе указаны условия, эквивалентные обобщенной корректности задачи Коши. Дано конструктивное доказательство связи между существованием некоторой локальной интегрированной полугруппы, существованием полугруппы-распределения и существованием локальной интегрированной полугруппы $\{V(t), 0 \leq t < T\}$ для любого $T < \infty$. Доказано, что существование любой из этих полугрупп эквивалентно обобщенной корректности задачи Коши с генератором полугруппы в качестве оператора A .

§2. Задача Коши в пространстве распределений. Свойства d-полугрупп

Пусть X — банахово пространство и $\mathcal{D}(\mathcal{D}_0, \mathcal{E}, \mathcal{E}_0)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с компактными носителями (с компактными носителями в $\mathbb{R}_+$, с произвольными носителями, с носителями в $\mathbb{R}_+$). Для значений распределений U на функциях φ из этих пространств будем пользоваться обозначениями $U(\varphi)$ или $\langle U, \varphi \rangle$. Подобно доказательству того факта, что любой линейный непрерывный оператор является ограниченным, для абстрактных распределений можно установить такой результат:

ЛЕММА 1. Пусть $U \in \mathcal{D}'(X)$ и K — компактное множество в $\mathbb{R}$. Тогда существуют $p \geq 0$, $c > 0$, такие, что

$$\|U(\varphi)\| \leq c \|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\text{supp } \varphi \subset K), \quad \text{где } \|\varphi\|_p := \sup_{0 \leq j \leq p, t \in K} |\varphi^{(j)}(t)|.$$

Пусть $\mathcal{D}^p(K)$ — банахово пространство p раз непрерывно дифференцируемых функций с носителями в компактном множестве K и с нормой $\|\cdot\|_p$.

ЛЕММА 2. Для любых $\varphi \in \mathcal{D}^p(K)$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $\psi \in \mathcal{D}$, такая, что

$$\text{supp } \psi \subseteq K_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} : \text{dist}(t, K) \leq \varepsilon\} \quad \text{и} \quad \|\varphi - \psi\|_p \leq \varepsilon.$$

Эти леммы означают, что любое распределение из $\mathcal{D}'(X)$ локально можно продолжить на пространство достаточно гладких функций. На этом основана следующая «структурная»

ТЕОРЕМА [9]. Пусть $U \in \mathcal{D}'(X)$ и Ω — открытое ограниченное множество из $\mathbb{R}$. Тогда существует $m > 0$ и непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow X$, такие, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ с носителем в Ω

$$U(\varphi) = f^{(m)}(\varphi).$$

Если $U = 0$ на $(-\infty, a)$, то $f(t) = 0$ для $t < a$.

На основе этой теоремы определяется операция свертки, необходимая для постановки обобщенной задачи Коши. Пусть X, Y — банаховы пространства; тогда для $U \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X, Y))$, $V \in \mathcal{D}'_0(X)$

$$\langle (U * V), \varphi \rangle := \langle (f * g)^{(m+p)}, \varphi \rangle,$$

где функции f и g определяются структурной теоремой: $U(\varphi) = f^{(m)}(\varphi)$, $V(\varphi) = g^{(p)}(\varphi)$. При этом свертка $U * V \in \mathcal{D}'_0(Y)$ не зависит от выбора m, p, f, g .

Пусть A — линейный замкнутый плотно определенный в банаховом пространстве X оператор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $U \in \mathcal{D}'_0(X_A)$ называется решением задачи Коши (1) в смысле распределений (обобщенным решением), если оно является решением уравнения (4). Задача Коши называется корректной в смысле распределений (обобщенно корректной), если для любого $x \in X$ существует единственное решение уравнения (4) и для любой последовательности $x_n \rightarrow 0$ соответствующие U_n сходятся к 0 в пространстве $\mathcal{D}'_0(X_A)$.

Нетрудно проверить, что если $u(t)$ — классическое решение задачи (1), то распределение

$$U(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(t) u(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

является решением уравнения (4). Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(t) u'(t) dt &= -\varphi(0)x - \int_0^\infty \varphi'(t) u(t) dt = -(\delta \otimes x)(\varphi) + U'(\varphi), \\ \int_0^\infty \varphi(t) u'(t) dt &= A \int_0^\infty \varphi(t) u(t) dt = AU(\varphi). \end{aligned}$$

Учитывая определение оператора P , получим

$$\begin{aligned} \langle P * U, \varphi \rangle &= \langle (\delta' \otimes I) * U, \varphi \rangle - \langle (\delta \otimes A) * U, \varphi \rangle \\ &= \langle U', \varphi \rangle - \langle AU, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes x, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Подобно случаю равномерно корректной задачи Коши, решение обобщенно-корректной задачи Коши связано с полугруппой операторов решения. В случае уравнения (4) это полугруппа-распределение, введенная Лионсом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем распределение $Q \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X))$ *полугруппой-распределением* (d-полугруппой), если

- (i) $\langle Q, \varphi * \psi \rangle = \langle Q, \varphi \rangle \langle Q, \psi \rangle$ для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_0$;
- (ii) для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_0$ $Q(\varphi)x = 0 \implies x = 0$;

d-полугруппа называется *регулярной*, если

- (iii) для любого $y = Q(\varphi)x$ ($\varphi \in \mathcal{D}_0$, $x \in X$) распределение Qy — это непрерывная функция $f(t)$, такая, что $f(t) = 0$ для $t < 0$ и $f(0) = y$;

d-полугруппа *имеет плотную область значений*, если

- (iv) множество $\{Q(\varphi)x : x \in X, \varphi \in \mathcal{D}_0\}$ плотно в X .

В [13] d-полугруппой названо распределение $Q \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X))$, удовлетворяющее условиям (i)–(iv).

Генератор A d-полугруппы определяется следующим образом: $A := \overline{Q(-\delta')}$. Чтобы обосновать это определение, для распределений z с компактным носителем на полуоси определяется оператор $Q(z)$: пусть $z \in \mathcal{E}'_0$ ($\mathcal{E}'_0$ — подпространство распределений из $\mathcal{E}'$ с носителями в $\mathbb{R}_+$) и $\delta_n \in \mathcal{D}_0$ — произвольная δ -образная последовательность, тогда

$$\begin{aligned} D(Q(z)) &:= \{x : Q(\delta_n)x \rightarrow x \text{ и существует } y, \text{ такой, что } Q(z * \delta_n)x \rightarrow y\}, \\ Q(z)x &:= y. \end{aligned}$$

Установим свойства введенных таким образом d-полугрупп. На основе этих свойств в основной теореме будет доказано, что распределение $U := Qx$ является единственным обобщенным решением задачи (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $z \in \mathcal{E}'_0$ и Q есть d-полугруппа с плотной областью значений. Тогда $Q(z)$ обладает следующими свойствами:

(Q1) $Q(\varphi)x \in D(Q(z))$ и $Q(z)Q(\varphi)x = Q(z * \varphi)x$ для любых $\varphi \in \mathcal{D}_0$, $x \in X$;

$$(Q2) \quad \overline{D(Q(z))} = X;$$

$$(Q3) \quad Q(z)Q(\varphi)x = Q(\varphi)Q(z)x \text{ для любых } x \in D(Q(z)), \varphi \in \mathcal{D}_0;$$

$$(Q4) \quad \text{существует замыкание } \overline{Q(z)} \text{ оператора } Q(z) \text{ и } \overline{Q(z)}Q(\varphi)x = Q(z)Q(\varphi)x \text{ для любых } \varphi \in \mathcal{D}_0, x \in X;$$

Если Q — регулярная d-полугруппа, то

$$(Q5) \quad \overline{Q(\psi_+)} = Q(\psi) \text{ для любого } \psi \in \mathcal{D}, \text{ где } \psi_+(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$\psi_+(t) \in \mathcal{E}_0^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Q1) В силу того, что $\delta_n * \varphi \in \mathcal{D}_0$, и в силу свойства (i) имеем

$$Q(\delta_n)Q(\varphi)x = Q(\delta_n * \varphi)x \rightarrow Q(\varphi)x,$$

$$Q(z * \delta_n)Q(\varphi)x = Q(z * \delta_n * \varphi)x \rightarrow Q(z * \varphi)x, \quad x \in X.$$

Отсюда $Q(\varphi)x \in D(Q(z))$ и $Q(z)Q(\varphi)x = Q(z * \varphi)x$.

Из (Q1) и свойства (iv) следует (Q2).

(Q3) Для x, y из определения (11) имеем

$$Q(\varphi)Q(z * \delta_n)x \rightarrow Q(\varphi)y = Q(\varphi)Q(z)x,$$

$$Q(\varphi)Q(z * \delta_n)x = Q(z * \delta_n * \varphi)x \rightarrow Q(z * \varphi)x = Q(z)Q(\varphi)x.$$

(Q4) Известно, что линейный оператор A имеет замыкание, если и только если для любой последовательности $x_n \in D(A)$ из того, что $x_n \rightarrow 0$, $Ax_n \rightarrow y$, следует, что $y = 0$.

Пусть $x_n \in D(Q(z))$, $x_n \rightarrow 0$, $Q(z)x_n \rightarrow y$; тогда

$$Q(\varphi)Q(z)x_n = Q(z * \varphi)x_n \rightarrow Q(\varphi)y, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0;$$

отсюда и из того, что $Q(z * \varphi) \in \mathcal{L}(X)$, получаем $Q(\varphi)y = 0$. Из (ii) следует $y = 0$.

(Q5) Пусть $\psi \in \mathcal{D}$; в силу (Q4) для $\psi_+ \in \mathcal{E}_0^t$ имеем

$$\overline{Q(\psi_+)}Q(\varphi)x = Q(\psi_+)Q(\varphi)x = Q(\psi_+ * \varphi)x, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0, x \in X.$$

Если мы докажем, что $Q(\psi_+)Q(\varphi)x = Q(\psi)Q(\varphi)x$, то с учетом (iv) будет доказано (Q5). В силу регулярности d-полугруппы Q существует непрерывная функция $f(t) \in C(\mathbb{R}, X)$ ($f(t) = 0$, $t < 0$), такая, что

$$\begin{aligned} Q(\psi_+)y &= \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\psi_+ * \delta_n)y = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) dt \int_0^\infty \psi(\tau) \delta_n(t - \tau) y d\tau \\ &= \int_0^\infty f(t) \psi(t) y dt = Q(\psi)y \quad \forall y = Q(\varphi)x, x \in X. \end{aligned}$$

§3. Условия, эквивалентные обобщенной корректности задачи Коши

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [19]. Пусть X — банахово пространство, $n \in \mathbb{N}$, $T < \infty$. Однопараметрическое семейство $\{V(t), 0 \leq t < T\}$ ограниченных в X операторов называется *локальной n раз интегрированной полугруппой*, если выполняются соотношения

- (V1) $\frac{1}{(n-1)!} \int_0^s [(s-r)^{n-1} V(t+r) - (t+s-r)^{n-1} V(r)] dr = V(t)V(s),$
 $s, t, t+s \in [0, T], V(0) = 0;$
 (V2) $V(t)$ сильно непрерывна по $t \in [0, T];$
 (V3) $\forall t \in [0, T] V(t)x = 0 \implies x = 0.$

Генератор полугруппы $V(t)$ определяется как замыкание оператора

$$A_0 x := \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [V^{(n)}(t)x - x], \quad D(A_0) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [V^{(n)}(t)x - x] \right\}.$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть A — линейный замкнутый плотно определенный в X оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (A) Задача Коши (1) является обобщенно корректной;
 (B) A является генератором регулярной d-полугруппы с плотной областью значений;
 (C) A является генератором локальной интегрированной полугруппы;
 (C1) для любого $T > 0$ оператор A является генератором локальной n раз интегрированной полугруппы $\{V(t), t \in [0, T]\}$ ($n = n(T)$);
 (D) существует область

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \frac{k}{\tau} \ln(1 + |\lambda|) + \frac{1}{\tau} \ln \frac{c}{\gamma} \right\} \subset \rho(A)$$

($\tau \in (0, T)$, $c > 0$, $0 < \gamma < 1$, $k = k(n)$), такая, что для некоторого C

$$\|R_A(\lambda)\| \leq C |\lambda|^{k/\operatorname{Re} \lambda}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. (A) $\iff$ (B). Покажем, что из утверждения (B) следует, что

существует $Q \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X, X_A))$, такое, что $P * Q = \delta \otimes I$, $Q * P = \delta \otimes J$. (6)

Отсюда, учитывая доказанную в [6] эквивалентность существования единственного решения уравнения (4) и существования решения уравнений (5), получим обобщенную корректность задачи (1). Пусть Q есть d-полугруппа с плотной областью значений. Для $\psi \in \mathcal{D}$ и функции ψ_+ , введенной в (Q5) предложения 1, имеем $\psi_+ \in \mathcal{E}'_0$ и

$$\delta' * \psi_+ = \psi'_+ + \psi(0) \delta.$$

В силу свойства (Q1) и определения генератора d-полугруппы

$$\begin{aligned} Q(\delta' * \psi_+ * \varphi)x &= Q(\psi'_+ * \varphi)x + \psi(0)Q(\varphi)x, \\ Q(\delta')Q(\psi_+ * \varphi)x &= -AQ(\psi_+ * \varphi)x = -AQ(\psi_+)Q(\varphi)x = Q(\psi_+)Q(\delta' * \varphi)x \\ &= Q(\psi_+)(-A)Q(\varphi)x, \quad \varphi \in \mathcal{D}_0, x \in X, . \end{aligned}$$

Отсюда в силу свойства (Q5)

$$-AQ(\psi)Q(\varphi)x = Q(\psi')Q(\varphi)x + \psi(0)Q(\varphi)x = -Q(\psi)AQ(\varphi)x, \quad (7)$$

т. е. для $y = Q(\varphi)x$ имеют место равенства

$$-AQ(\psi)y - Q(\psi')y = \psi(0)y, \quad (8)$$

$$-Q(\psi)Ay - Q(\psi')y = \psi(0)y. \quad (9)$$

Из того, что область значений d-полугруппы плотна в X , а оператор A является замкнутым, следует, что $Q(\psi)y \in D(A)$ и (8) выполняется для любого $y \in X$. Пусть $\|y_n\| \rightarrow 0$ в равенстве (8); тогда $\|AQ(\psi)y_n\| \rightarrow 0$, а следовательно, $Q(\psi) \in \mathcal{L}(X, X_A)$. Если в (8) $\psi_n \rightarrow 0$ ($\psi_n \in \mathcal{D}$), то $\|Q(\psi'_n)\|$, $\|AQ(\psi_n)\| \rightarrow 0$; значит, $Q \in \mathcal{D}'(\mathcal{L}(X, X_A))$. Учитывая, что $\text{supp } Q \in [0, \infty)$, имеем $Q \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X, X_A))$. Чтобы завершить доказательство, остается показать, что уравнение (9) выполняется для любого $y \in D(A)$. Положим в (7) $x \in D(Q(-\delta'))$, $\varphi_n \rightarrow \delta$. Тогда

$$Q(\varphi_n)x \rightarrow x, \quad Q(\delta' * \varphi_n)x \rightarrow -Ax;$$

отсюда вытекает, что

$$-Q(\psi)Ax = Q(\psi')x + \psi(0)x, \quad x \in D(Q(-\delta')). \quad (10)$$

Из определения генератора d-полугруппы следует, что для любого $y \in D(A)$ существуют $x_n \in D(Q(-\delta'))$, такие, что

$$x_n \rightarrow y, \quad Ax_n \rightarrow Ay;$$

отсюда вытекает, что уравнение (10) имеет место для любого $x \in D(A)$, т. е. (9) имеет место для любого $y \in D(A)$. Итак, d-полугруппа Q является решением уравнений (5), а значит, $U := Qx$ является единственным решением уравнения (4) [6, 1]. Из ограниченности оператора $Q(\varphi)$ следует устойчивость решения: $x_n \rightarrow x \implies U_n \rightarrow U$ в пространстве $\mathcal{D}'_0(X_A)$. Обратно, из корректности задачи Коши следует существование решения уравнений (5) $\langle Q, \varphi \rangle x := \langle U, \varphi \rangle$. Лионсом [13] доказано, что решение уравнений (5) является регулярной невырожденной полугруппой с плотной областью значений.

2. (A) $\iff$ (C) $\iff$ (C1) $\iff$ (D). Сначала докажем (C) $\implies$ (D) $\implies$ (6), а затем (6) $\implies$ (C1).

Пусть A — генератор n раз локальной интегрированной полугруппы $V(t)$, $0 \leq t < T$. Тогда для $\tau \in (0, T)$ определена ограниченная оператор-функция $R(\lambda, \tau)$ — «локальная резольвента» оператора A :

$$R(\lambda, \tau)x := \int_0^\tau \lambda^n e^{-\lambda t} V(t)x dt, \quad x \in X. \quad (11)$$

Для $x \in D(A)$ применим оператор $\lambda - A$ к равенству (11). Учитывая уравнение, которому удовлетворяет $V(t)$,

$$V(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t V(s)Ax ds, \quad x \in D(A), \quad t \in (0, T), \quad (12)$$

и перестановочность $V(t)$ и A на $D(A)$ (см. [19, 2]), интегрируя по частям, получаем равенства

$$\begin{aligned} (\lambda - A)R(\lambda, \tau)x &= \int_0^\tau \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} V(t)x dt - \int_0^\tau \lambda^n e^{-\lambda t} AV(t)x dt \\ &= -\lambda^n e^{-\lambda \tau} V(\tau)x + \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} e^{-\lambda \tau} x + \int_0^\tau \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt x \\ &\equiv (I - G(\lambda))x, \quad x \in D(A), \\ R(\lambda, \tau)(\lambda - A)x &= (I - G(\lambda))x, \quad x \in D(A), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$G(\lambda)x = \lambda^n e^{-\lambda\tau} V(\tau)x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} x$$

и G — ограниченный оператор:

$$\|G(\lambda)x\| \leq c(1 + |\lambda|)^n e^{-\tau \operatorname{Re} \lambda} \|x\|, \quad c = c(\tau, n).$$

В силу ограниченности оператора G , замкнутости A и плотности множества $D(A)$ равенство (13) можно продолжить на все пространство X . Используя полученную для G оценку, найдем область $\Lambda \subset \mathbb{C}$, в которой $\|G(\lambda)\| < 1$. Прологарифмировав неравенство $c(1 + |\lambda|)^n e^{-\tau \operatorname{Re} \lambda} < \gamma < 1$, получим, что в области

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \frac{n}{\tau} \ln(1 + |\lambda|) + \frac{1}{\tau} \ln \frac{c}{\gamma} \right\}$$

имеют место оценки

$$\|G(\lambda)\| < \gamma, \quad \|(I - G(\lambda))^{-1}\| < 1/(1 - \gamma).$$

Отсюда для $\lambda \in \Lambda$ следует существование ограниченного оператора

$$(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, \tau)(I - G(\lambda))^{-1},$$

для которого

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \gamma} \int_0^\tau |\lambda|^n e^{-t \operatorname{Re} \lambda} \|V(t)\| dt \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|V(t)\| \frac{|\lambda|^n (1 - e^{-\tau \operatorname{Re} \lambda})}{(1 - \gamma) \operatorname{Re} \lambda} \leq \frac{C |\lambda|^n}{\operatorname{Re} \lambda}, \end{aligned}$$

т. е. выполняется (D): существует C , такое, что

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{C |\lambda|^n}{\operatorname{Re} \lambda}, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (14)$$

Теперь по резольвенте, удовлетворяющей условию (14), построим решение уравнений (5). Для любого $p \geq 2n + 2$ определим функцию

$$T_p(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda} \lambda^{-p} e^{\lambda t} R_A(\lambda) d\lambda.$$

Функция под интегралом растет не быстрее, чем $|\lambda|^{nt/\tau + n - p}$; следовательно, интеграл определяет непрерывную по $t \in (-\infty, \tau_p)$, где $\tau_p = \tau(p - n - 1)/n$, функцию со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X, X_A)$.

Положим $Q = T_p^{(p)}$ на $(-\infty, \tau_p)$. При таком определении Q не зависит от p ; поэтому для любой функции φ ($\operatorname{supp} \varphi \in (-\infty, \tau)$) можно выбрать τ_p равным τ за счет увеличения p и $\langle Q, \varphi \rangle = \langle T_p^{(p)}, \varphi \rangle$. В силу абстрактной теоремы Коши $T_p(t) = 0$, $t \leq 0$.

Покажем, что Q удовлетворяет уравнениям (5):

$$\begin{aligned}
 \langle Q * P, \varphi \rangle x &= Q'(\varphi) x - Q(\varphi) Ax \\
 &= \frac{(-1)^{p+1}}{2\pi i} \int_0^{\tau_p} \varphi^{(p+1)}(t) \int_{\partial\Lambda} \lambda^{-p} e^{\lambda t} R_A(\lambda) x d\lambda dt \\
 &\quad - \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_0^{\tau_p} \varphi^{(p)}(t) \int_{\partial\Lambda} \lambda^{-p} e^{\lambda t} R_A(\lambda) Ax d\lambda dt \\
 &= \frac{(-1)^p}{2\pi i} \int_0^{\tau_p} \varphi^{(p)}(t) \int_{\partial\Lambda} \lambda^{-p} e^{\lambda t} x d\lambda dt, \\
 \varphi &\in \mathcal{D}, \supp \varphi \subset (-\infty, \tau_p), \quad x \in D(A).
 \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь абстрактной формулой Коши для внутреннего интеграла, получаем

$$\begin{aligned}
 \langle Q * P, \varphi \rangle x &= (-1)^p \int_0^{\tau_p} \varphi^{(p)}(t) \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} dt x \\
 &= \varphi(0) x = \langle \delta \otimes x, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes J, \varphi \rangle x.
 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается выполнение второго из уравнений (5). Таким образом, дано построение распределения $Q \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(X, X_A))$ в импликации (D) $\implies$ (6).

Пусть теперь Q — решение уравнений (5). Положим $K = [-1, T]$. С учетом лемм 1, 2 по распределению Q (обратному к P) строится его продолжение на пространство $\mathcal{D}^p(K)$ и принадлежащая $\mathcal{D}^p(K)$ функция

$$\psi_{t,p}(s) =: \chi(s) \eta(t-s), \quad t \in [0, T],$$

где $\chi(s)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $s \leq -1$ и единице при $s \geq 0$, а $\eta(s)$ — непрерывная функция с носителем в $[0, \infty)$, такая, что $\eta^{(p+2)} = \delta$. Локальная $p+2$ раза интегрированная полугруппа $\{V(t), 0 \leq t < T\}$ строится, подобно первообразной порядка $p+2$ в структурной теореме:

$$V(t) := Q(\psi_{t,p}). \quad (15)$$

Построенная таким образом $V(t)$ — это сильно непрерывная по t оператор-функция со свойствами $V(t) \in \mathcal{L}(X)$ при каждом t , $V(0) = 0$ и (V3) из определения 3. Покажем выполнение «полугруппового» соотношения (V1). В силу леммы 2 существует последовательность $\{\varphi_n\} \in \mathcal{D}$, такая, что

$$\supp \varphi_n \in [-1 - \varepsilon, T + \varepsilon], \quad \|\varphi_n - \psi_{t,p+1}\|_{p+1} \rightarrow 0, \quad t \in [0, T];$$

следовательно,

$$\|\varphi_n - \psi_{t,p+1}\|_p, \|\varphi'_n - \psi'_{t,p+1}\|_p \rightarrow 0.$$

Рассмотрим уравнения (5) с $\varphi = \varphi_n$. Устремляя n к ∞ , получим

$$-\langle Q, \psi'_{t,p+1} \rangle x - A \langle Q, \psi_{t,p+1} \rangle x = \psi_{t,p+1}(0) x, \quad x \in X, \quad (16)$$

$$-\langle Q, \psi'_{t,p+1} \rangle x - \langle Q, \psi_{t,p+1} \rangle Ax = \psi_{t,p+1}(0) x, \quad x \in D(A). \quad (17)$$

В силу того что

$$\psi'_{t,p+1} = \chi'(s) \frac{(t-s)^{p+2}}{(p+2)!} + \chi(s) \eta_p(t-s) \quad \text{и} \quad \text{supp } \chi'(s) \frac{(t-s)^{p+2}}{(p+2)!} \subset [-1, 0],$$

для $V(t)$, определенной равенством (15), имеем

$$V(t) = \langle Q, \psi_{t,p} \rangle = -\langle Q, \psi'_{t,p+1} \rangle = \frac{d}{dt} \langle Q, \psi_{t,p+1} \rangle \quad \text{и} \quad Q(\psi_{t,p+1}) = \int_0^t V(t) dt$$

для любого $t \in [0, T]$. Отсюда и из уравнений (16), (17) следует, что $V(t)$ удовлетворяет уравнению

$$V(t)x = \frac{t^{p+2}}{(p+2)!} + \int_0^t V(s)Ax ds, \quad x \in D(A), \quad t \in [0, T],$$

т. е. уравнению $n = p + 2$ раз интегрированной полугруппы. Отсюда, используя дифференцируемость $V(t)$ на $D(A)$ и полугрупповое соотношение для $V^{(n)}(t)$ на $D(A^n)$, получаем соотношение (V1) из определения 3.

§4. Примеры, замечания

Приведем примеры операторов A , являющихся генераторами k раз интегрированных полугрупп в некоторых банаховых пространствах X и, как следствие, примеры задач Коши (1), являющихся корректными в обобщенном смысле на X и k -корректными на $D(A^{k+1})$, т. е.

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\| = \sup_{t \in [0, T]} \|V^{(k)}(t)x\| \leq C\|x\|_{A^k}, \quad x \in D(A^{k+1}) \quad [2, 10, 19].$$

$$1. \quad Ax := \begin{pmatrix} -h & -f \\ 0 & -h \end{pmatrix} x,$$

$$D(A) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in L_p(\mathbb{R}) \times L_p(\mathbb{R}) : hx_1 + fx_2, hx_2 \in L_p(\mathbb{R}) \right\},$$

где $h(s) = 1 + s^2$, $f(s) = s^{2\gamma}$, $\gamma > 0$, в пространстве $X := \{L_p(\mathbb{R}) \times L_p(\mathbb{R}), \|x\|_X = \|x_1\|_p + \|x_2\|_p\}$. Для оператора решения $U(t)x = e^{-th} \begin{pmatrix} 1 & -tf \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ имеют место оценки

$$\|U(t)\| = \max_{s \in \mathbb{R}} [t|s|^{2\gamma} e^{-t(1+s^2)}] = \gamma^\gamma t^{1-\gamma} e^{-t(1+\gamma/t)} = O(t^{1-\gamma}), \quad t \rightarrow 0.$$

При $\gamma \leq 1$ семейство операторов $U(t)$ образует в X сильно непрерывную полугруппу с генератором A . При $1 < \gamma \leq 2$ семейство операторов

$$V(t)x = \int_0^t U(s)x ds = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 - e^{-ht} & tfe^{-ht} + (e^{-ht} - 1)f/h \\ 0 & 1 - e^{-ht} \end{pmatrix} x$$

удовлетворяет условиям (V1)–(V3) и образует 1 раз интегрированную полугруппу. Полугруппа-распределение в этом случае представляет собой регуляризацию расходящегося интеграла от оператор-функции $U(t)$, имеющей особенность в нуле.

2. $Ax := \{a_m x_m\}_{m=1}^\infty$, $a_m = m/T + i(\exp^2(m)/m^2 - m^2/T^2)^{1/2}$, $D(A) = \{x \in l_2 : Ax \in l_2\}$, является генератором локальной $(t < nT)$ n раз интегрированной полугруппы в пространстве $X = l_2$

$$\begin{aligned} V(t)x &= \left\{ \int_0^\infty \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{a_m s} x_m ds \right\}_{m=1}^\infty \\ &= \left\{ \left[a_m^{-n} e^{a_m t} - \sum_{p=1}^n (a_m)^{-p} \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} \right] x_m \right\}. \end{aligned}$$

Тот же оператор A с $a_m = m + i(\exp^2(m^2) - m^2)^{1/2}$ является генератором глобальной (но не экспоненциально ограниченной) полугруппы в $X = l_2$.

3. $A := i\Delta$ является в $X = L_p(Q)$, $Q \subset \mathbb{R}^N$, генератором n раз интегрированной группы при $n > N|1/2 - 1/p|/2$ [5]. Для уравнения Шрёдингера с оператором $i\partial^2/\partial x^2$ операторы решения образуют сильно непрерывную полугруппу в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и только интегрированную полугруппу в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $p \neq 2$ [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 1 относительно связи между параметрами k в утверждении (D) и n в утверждении (C1). В доказательстве теоремы из существования n раз интегрированной полугруппы $\{V(t), 0 \leq t < T\}$ получена оценка на резольвенту генератора (14) с $k = n$, а из оценки (14) получено существование непрерывной функции $T_p(t)$, являющейся первообразной от d-полугруппы Q лишь порядка $p \geq 2n + 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В примере 1 полугруппа операторов решения задачи (1) имеет в нуле особенность порядка $\alpha = \gamma - 1$. Как следует из основной теоремы, эта полугруппа может быть «регуляризована» с помощью полугруппы-распределения. В работе [7] рассмотрена K -сверточная задача Коши

$$dv(t)/dt = Av(t) + K(t)x, \quad v(0) = 0, \quad x \in X, \quad (18)$$

ассоциированная с задачей (1). Решение этой задачи $v(t) = (u * K)(t)$ названо $K(t)$ -обобщенным решением задачи (1). Уравнение (18) включает в себя как частный случай уравнение для интегрированных полугрупп и C -полугрупп. В [7] показано, что для некоторого класса полугрупп с особенностью в нуле более высокого порядка, чем степенной, регуляризация может быть осуществлена с помощью ультрараспределений. Для генераторов таких полугрупп положительная полуось должна состоять из регулярных точек. В рассматриваемый класс уравнений не входят уравнения типа обратной теплопроводности. Задача Коши для таких уравнений имеет обобщенные решения в пространствах новых обобщенных функций, введенных В. К. Ивановым [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельникова И. В., Альшанский М. А. Обобщенная корректность задачи Коши и интегрированные полугруппы. Докл. РАН, **343**, №4, 448–451 (1995).

2. Мельникова И. В., Альшанский М. А. Корректность задачи Коши в банаховом пространстве: регулярный и вырожденный случаи. Итоги науки и техники. Соврем. матем. и ее прил. Анализ-9, ВИНТИ, **27**, (1995), с. 5–64.
3. Мельникова И. В., Филингов А. И. Интегрированные и C -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач. УМН, **49**, №6, 111–150 (1994).
4. Arendt W. Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems. Israel J. Math., **59**, 327–352 (1987).
5. Arendt W. Sobolev Imbeddings and Integrated Semigroups. Lect. Notes Pure Appl. Math., **135**, Marsel Dekker, New York, 1991.
6. Chazarain J. Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problems mixtes. J. Funct. Anal., **7**, 386–446 (1971).
7. Cioranescu I., Lumer G. Regularizations of evolution equations via kernels $K(t)$, K -evolution operators and convoluted semigroups, generation theorems. LSU Seminar Notes in Funct. Anal. and PDES 1993–1994, Louisiana State Univ., Baton Rouge, (1994), p. 45–52.
8. Davies E. B., Pang M. M. The Cauchy problem and a generalization of the Hille–Yosida theorem. Proc. London Math. Soc., **55**, 181–208 (1987).
9. Fattorini H. O. The Cauchy Problem. Reading. Addison-Wesley, Mass., 1983.
10. Kellerman H., Hieber M. Integrated semigroups. J. Funct. Anal., **84**, 160–180 (1989).
11. Komura T. Semigroups of operators in locally convex spaces. J. Funct. Anal., **2**, 258–296 (1968).
12. de Laubenfels R. C -semigroups and the Cauchy problem. J. Funct. Anal., **111**, 44–61 (1993).
13. Lions J.-L. Les semi-groupes distributions. Portug. Math., **19**, No. 3–4, 141–161 (1960).
14. Melnikova I. V. General theory of ill-posed Cauchy problem. J. Inverse Ill-Posed Probl., **3**, No. 2, 149–171 (1995).
15. Miyadera I. C -semigroups and semigroups of linear operators. Semigroup forum, 133–143 (1990).
16. Neubrander F. Integrated semigroups and their application to the abstract Cauchy problem. Pacif. J. Math., **135**, 111–157 (1988).
17. Oharu S. Semigroups of linear operators in a Banach space. Publ. Res. Inst. Math. Sci., **27**, 205–260 (1971).
18. Sova M. Concerning the characterization of generators of distribution semigroups. Cas. Pestov. Mat., **105**, No. 4, 329–340 (1980).
19. Tanaka N., Okazawa N. Local C -semigroups and local integrated semigroups. Proc. London Math. Soc., **61**, No. 3, 63–90 (1990).
20. Ushijima T. Some properties of regular distribution semigroups. Proc. Jpn. Acad., **45**, 224–227 (1969).