Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Молчанов, Разделение серий для гипербо-
лоидов, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31,
выпуск 3, 35–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa473>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 12:39:47

УДК 517.98

Разделение серий для гиперboloидов*

© 1997. В. Ф. Молчанов

В [2] была предложена некоторая программа для построения гармонического анализа на однородных многообразиях G/H (так называемая программа Гельфанда–Гиндикина). Первый этап этой программы состоит в разложении пространства $L^2(G/H)$ на подпространства L_j , в каждом из которых действуют неприводимые унитарные представления одной серии. Следующие шаги должны дать естественное описание функций из L_j (например, как граничных значений функций, голоморфных на некоторых комплексных многообразиях) и т. д.

В настоящей статье мы решаем задачу о разделении серий для вещественных гиперboloидов $X = SO_0(p, q)/SO_0(p, q - 1)$. Как известно (см. [4, 7, 14, 15] и др.), в разложении квазирегулярного представления на гиперboloиде участвуют неприводимые унитарные представления двух серий: непрерывной и дискретной. Поэтому достаточно указать проектор на подпространство в $L^2(X)$, в котором действует одна из этих серий. Мы даем явные формулы для проектора на подпространство $L_d^2(X)$, в котором действует дискретная серия. В случае $q = 2$ гиперboloид X является границей Шилова некоторых комплексных многообразий, а дискретная серия распадается на две серии: аналитическую и антианалитическую. В работе [12] мы получили проекторы на каждую из этих серий, а также соответствующие ядра Коши–Сеге. Для полноты мы приводим в настоящей работе формулы также и для этих проекторов.

Заметим, что и в общем случае (q произвольно) дискретная серия связана с некоторой аналитичностью, см. формулы (1.1) и (3.4), (3.3) для проектора и для сферических функций.

Задача о разложении серий для гиперboloидов рассматривалась в работе С. Гиндикина [10], в ней получен — в другой форме — проектор на дискретную серию в случае нечетного n ($n = p + q$). Как видно из настоящей статьи, см. также [12], в этом круге вопросов случай нечетного n проще, чем случай четного n ; метод из [10] годится только для нечетного n .

§1. Разделение серий для гиперboloидов

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана билинейная форма

$$[x, y] = -x_1y_1 - \cdots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \cdots + x_ny_n,$$

---

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-01-01603-а, а также Международного научного фонда и Правительства России, грант JC7100. Часть этой работы выполнена автором во время пребывания в Институте Миттаг-Леффлера (Дьюрскольм, Швеция, январь–февраль 1996 г.)

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ — векторы из $\mathbb{R}^n$, $n = p + q$, $p \geq 1$, $q \geq 2$. Гиперboloид X в $\mathbb{R}^n$, определяемый уравнением

$$[x, x] = 1,$$

является однородным пространством G/H , где $G = SO_0(p, q)$ — связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих форму $[x, y]$, а $H = SO_0(p, q - 1)$ — стационарная подгруппа точки

$$x^0 = (0, \dots, 0, 1).$$

Пусть $L^2(X)$ обозначает пространство L^2 на X относительно G -инвариантной меры $dx = |x_1|^{-1} dx_2 \dots dx_n$. Пусть U — представление группы G в $L^2(X)$ сдвигами (квазирегулярное представление):

$$(U(g)f)(x) = f(xg)$$

(мы будем считать, что G действует на X справа).

Как мы уже говорили выше, представление U разлагается по неприводимым унитарным представлениям непрерывной и (относительной) дискретной серий. Эта дискретная серия есть в точности первая дискретная серия представлений группы G , связанных с конусом, см. [5]. Пусть $L_d^2(X)$ обозначает подпространство в $L^2(X)$, в котором действует дискретная серия.

Для $q = 2$ гиперboloид X имеет структуру симметрического пространства эрмитова типа, см. [11, 13]. В этом случае дискретная серия распадается на две серии: аналитическую и антианалитическую. Соответственно $L_d^2(X)$ распадается на два подпространства $L_{d,+}^2(X)$ и $L_{d,-}^2(X)$.

Пусть E_d — проектор в $L^2(X)$ на $L_d^2(X)$. Для $q = 2$ пусть, кроме того, $E_d^\pm$ — проектор на $L_{d,\pm}^2(X)$, так что $E_d = E_d^+ + E_d^-$. На пространстве Шварца $\mathscr{D}(X)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем оператор E_d задается с помощью ядра $E(x, y)$. Оно представляет собой обобщенную функцию на $X \times X$, инвариантную относительно диагонального действия группы G . Поэтому она вполне определяется функцией $E(x^0, x)$. Последняя есть обобщенная функция E на X , инвариантная относительно H . Аналогично определяются обобщенные функции $E^\pm$ в случае $q = 2$.

Основной результат настоящей статьи заключается в теоремах 1.1, 1.2, которые дают явные формулы для E , $E^\pm$. Мы используем обобщенные функции на прямой из [3]: $x_\pm^\lambda$, $(x \pm i0)^\lambda$, $\delta(x)$ (дельта-функция).

ТЕОРЕМА 1.1. *Обобщенная функция E есть*

$$\sum_{\pm} e^{\pm i\pi(q-2)/2} L(x_n \pm i0), \quad (1.1)$$

где для нечетного n

$$L(z) = c_n(z-1)^{-(n-1)/2}, \quad (1.2)$$

$$c_n = (2\pi)^{(-n-1)/2} \Gamma((n-1)/2), \quad (1.3)$$

а для четного n

$$L(z) = c_n(z-1)^{-(n-1)/2}(z+1)^{-(n-3)/2}A(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (1.4)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2} \Gamma(n/2); \quad (1.5)$$

здесь $A(z) = A_{(n-4)/2}(z)$, а $A_m(z)$ — следующий многочлен степени m от z :

$$A_m(z) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} \binom{m}{k} \binom{k}{[k/2]} z^{m-k}, \quad (1.6)$$

$[a]$ есть целая часть числа a .

ТЕОРЕМА 1.2. Для $q = 2$ обобщенные функции $E^\pm$ имеют следующий вид:

$$E^\pm(x) = L(x_n \pm i0 \cdot x_{n-1}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} L(x_n \pm i\varepsilon x_{n-1}), \quad (1.7)$$

где $L(z)$ имеет тот же вид, что и выше.

Положим для краткости

$$\nu = (n - 3)/2. \quad (1.8)$$

Как следует из [3], явные выражения для E , $E^\pm$ можно записать в несколько иной форме. А именно, E есть аналитическое продолжение по μ в точку $\mu = \nu$ следующей обобщенной функции, зависящей от комплексного параметра μ :

$$2c_n \left\{ \cos \frac{q-2}{2} \pi \cdot (x_n - 1)_+^{-\mu-1} + \cos \left(\frac{q}{2} - \mu \right) \pi \cdot (x_n - 1)_-^{-\mu-1} \right\}, \quad (1.9)$$

если n нечетно, и

$$2c_n \left\{ \cos \frac{q-2}{2} \pi \cdot (x_n - 1)_+^{-\mu-1} (x_n + 1)_+^{-\mu} + \cos \left(\frac{q}{2} - \mu \right) \pi \cdot (x_n - 1)_-^{-\mu-1} (x_n + 1)_+^{-\mu} \right. \\ \left. + \cos \left(\frac{q}{2} - 2\mu \right) \pi \cdot (x_n - 1)_-^{-\mu-1} (x_n + 1)_-^{-\mu} \right\} A(x_n), \quad (1.10)$$

если n четно. Это позволяет, в частности, найти носитель обобщенной функции E :

$(p, q) \bmod 2$	$\text{supp } E$
$(0, 1)$	$x_n = 1$
$(1, 0)$	X
$(0, 0)$	$ x_n \geq 1$
$(1, 1)$	$ x_n \leq 1$

Мы видим, что в случае $(p, q) \equiv (0, 1)$ (здесь и дальше знак сравнения означает сравнение по модулю 2) обобщенная функция E сосредоточена на многообразии меньшей размерности — на конусе $x_n = 1$ (он состоит из особых орбит подгруппы H на X).

Для $q = 2$ обобщенные функции $E^\pm$ суть аналитическое продолжение по μ в точку $\mu = \nu$ следующих обобщенных функций, зависящих от комплексного параметра μ :

$$c_n \{ (x_n - 1)_+^{-\mu-1} - \cos \pi \mu \cdot (x_n - 1)_-^{-\mu-1} Y(-x_n - 1) \\ - [e^{\mp i\pi \mu} Y(x_{n-1}) + e^{\pm i\pi \mu} Y(-x_{n-1})] (x_n - 1)_-^{-\mu-1} Y(x_n + 1) \}, \quad (1.11)$$

если n нечетно, и

$$c_n \{ (x_n - 1)_+^{-\mu-1} (x_n + 1)_+^{-\mu} - [e^{\mp i\pi\mu} Y(x_{n-1}) + e^{\pm i\pi\mu} Y(-x_{n-1})] (x_n - 1)_-^{-\mu-1} (x_n + 1)_+^{-\mu} - \cos 2\mu\pi (x_n - 1)_-^{-\mu-1} (x_n + 1)_-^{-\mu} \} A(x_n), \quad (1.12)$$

если n четно, где $Y(t)$ — функция Хевисайда ($Y(t) = 1$ для $t > 0$, $Y(t) = 0$ для $t < 0$). Носитель обеих функций $E^\pm$ есть весь гиперboloид X . Отметим, что для $q = 2$ сечение гиперboloида X плоскостью $x_n = c$ для $|c| < 1$ состоит из двух H -орбит: $\pm x_{n-1} \geq \sqrt{1 - c^2}$. Это объясняет появление x_{n-1} в формулах (1.7), (1.11), (1.12).

Для $q = 2$ запишем еще разность проекторов:

$$Q_d = E_d^+ - E_d^-$$

(это аналог преобразования Гильберта). Пусть Q — соответствующая обобщенная функция. Тогда (см. [12]), если n нечетно, то

$$Q = 2ic_n \sin \mu\pi \cdot (x_n - 1)_-^{-\mu-1} Y(x_n + 1) [Y(x_{n-1}) - Y(-x_{n-1})] |_{\mu=\nu}, \quad (1.13)$$

а если n четно, то

$$Q = 2ic_n \sin \mu\pi \cdot (x_n - 1)_-^{-\mu-1} (x_n + 1)_+^{-\mu} A(x_n) [Y(x_{n-1}) - Y(-x_{n-1})] |_{\mu=\nu}. \quad (1.14)$$

Носитель обобщенной функции Q для нечетного n есть множество $x_n = 1$, а для четного n — множество $|x_n| \leq 1$. Особенно приятно оператор Q_d выглядит для $n = 3$ ($p = 1$, $q = 2$) (см. [10]):

$$(Q_d f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x + te_x^-) \frac{dt}{t} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x + te_x^+) \frac{dt}{t} \right\}, \quad (1.15)$$

где $e_x^\pm$ — направляющие векторы двух прямолинейных образующих гиперboloида X , проходящих через точку x , такие, что их первая координата равна 1 и векторы x , e_x^+ , e_x^- образуют правую тройку. Таким образом, оператор $2\pi i Q_d$ есть разность интегралов по прямолинейным образующим, проходящим через данную точку, взятых по мере, инвариантной относительно стационарной подгруппы этой точки.

Остальная часть статьи посвящена доказательству теоремы 1.1. Теорема 1.2, а также формулы (1.13), (1.14) доказаны в работе [12].

§2. Усреднение

Усреднение M сопоставляет каждой функции $f \in \mathcal{D}(X)$ функцию $(Mf)(c)$ на $\mathbb{R}$, определенную следующим образом:

$$(Mf)(c) = \int_X f(x) \delta(x_n - c) dx.$$

Это отображение сводится к усреднению функций в $\mathbb{R}^{n-1}$ по поверхностям уровня квадратичной формы сигнатуры $(p, q - 1)$, см. [3, 16]. Определим функ-

цию $\theta(c)$ формулой

$$\theta(c) = \begin{cases} (c-1)_+^\nu, & q \equiv 1, \\ (c-1)_-^\nu, & (p, q) \equiv (0, 0), \\ (c-1)^\nu \ln |c-1|, & (p, q) \equiv (1, 0). \end{cases}$$

Образ $\mathfrak{M}$ отображения M состоит из функций $h(c)$ на $\mathbb{R}$, которые можно представить в виде (см. [9])

$$h(c) = u(c) + \theta(c)v(c) + \theta(-c)w(c),$$

где u, v, w — функции из $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, причем $\text{supp } v \subset (-1, \infty)$, $\text{supp } w \subset (-\infty, 1)$. Можно так ввести топологию в $\mathfrak{M}$, что отображение $M: \mathscr{D}(X) \rightarrow \mathfrak{M}$ станет непрерывным, см., например, [16]. Сопряженное отображение M' есть линейный гомеоморфизм сопряженного пространства $\mathfrak{M}'$ в пространство обобщенных функций на X , инвариантных относительно H (для $p > 1$, $q > 2$ это есть отображение «на»).

Пусть $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$ — подпространства в $\mathfrak{M}$, состоящие из функций h с носителями в $(-1, \infty)$, $(-\infty, 1)$ соответственно.

Мы можем записать значение обобщенной функции E на f , т.е. значение $(E_d f)(x^0)$, с помощью Mf . Для этого надо в функциях (1.9), (1.10) взять c вместо x_n , умножить их на $(Mf)(c)$, проинтегрировать при $\text{Re } \mu < 1$ по всей оси ($c \in \mathbb{R}$) и продолжить в точку $\mu = \nu$.

Предъявим некоторые функционалы из $\mathfrak{M}'$, которые нам потребуются для описания сферических функций в §3.

Рассмотрим следующие функции комплексного переменного z , зависящие от двух комплексных параметров σ, μ и выражающиеся через функции Лежандра первого и второго рода (см. [1, гл. 3]):

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma\mu}(z) &= (z^2 - 1)^{-\mu/2} P_{\sigma+\mu}^\mu(z), \\ \psi_{\sigma\mu}(z) &= e^{-i\mu\pi} (z^2 - 1)^{-\mu/2} Q_{\sigma+\mu}^\mu(z), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. На разрезе $(-\infty, 1]$ определим эти функции как полусумму предельных значений сверху и снизу. Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 y}{dz^2} + (2\mu + 2)z \frac{dy}{dz} = \sigma(\sigma + 2\mu + 1)y. \quad (2.2)$$

Отметим, что при $\mu = \nu$ это уравнение с заменой z на c превращается в уравнение для прообразов в $\mathfrak{M}'$ сферических функций на X .

Особые точки $c = \pm 1$ уравнения (2.2) разбивают $\mathbb{R}$ на три интервала: $I_1 = (1, \infty)$, $I_2 = (-1, 1)$, $I_3 = (-\infty, -1)$.

Для функции $f(c)$ на $\mathbb{R}$ положим $\hat{f}(c) = f(-c)$.

Нам потребуются некоторые соотношения на I_2 , они выводятся из [1, 3.4(14), (15)]:

$$\varphi_{\sigma\mu}(c) = \cos(\sigma + 2\mu)\pi \cdot \hat{\varphi}_{\sigma\mu}(c) - \frac{2}{\pi} \sin(\sigma + 2\mu)\pi \cdot \hat{\psi}_{\sigma\mu}(c), \quad (2.3)$$

$$\psi_{\sigma\mu}(c) = -\frac{\pi}{2} \sin(\sigma + 2\mu)\pi \cdot \hat{\varphi}_{\sigma\mu}(c) - \cos(\sigma + 2\mu)\pi \cdot \hat{\psi}_{\sigma\mu}(c). \quad (2.4)$$

Пусть F — одна из функций $\varphi_{\sigma\mu}$, $\psi_{\sigma\mu}$, $\widehat{\varphi}_{\sigma\mu}$, $\widehat{\psi}_{\sigma\mu}$. Для $j = 1, 2, 3$ определим функционал $F^{(j)}$ из $\mathfrak{M}'$ с помощью интеграла:

$$(F^{(j)}, h) = \int_{I_j} F(c) h(c) dc, \quad h \in \mathfrak{M}.$$

Интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re} \mu < 1$, а на остальные μ функционал $F^{(j)}$ продолжается по аналитичности до мероморфной функции — с возможными полюсами в точках $\mu = 1, 2, \dots$ и $\mu = \nu + 1, \nu + 2, \dots$. Сумму $F^{(i)} + F^{(j)}$ будем обозначать $F^{(ij)}$. Нас специально интересует значение $\mu = \nu$. Если ν не целое (т.е. n четно), то все эти функционалы регулярны (не имеют особенностей) в точке $\mu = \nu$. Если ν целое (т.е. n нечетно), то $\varphi_{\sigma\mu}^{(2)}$, $\widehat{\varphi}_{\sigma\mu}^{(2)}$ регулярны в точке $\mu = \nu$, а $\psi_{\sigma\mu}^{(j)}$, $\widehat{\psi}_{\sigma\mu}^{(j)}$ — нет, но суммы $\psi_{\sigma\mu}^{(12)}$ и $\widehat{\psi}_{\sigma\mu}^{(23)}$ регулярны в точке $\mu = \nu$ на подпространствах $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ соответственно.

Определим еще функционалы $\psi_{\sigma\mu}^{\pm}$ из $\mathfrak{M}'$ с помощью предельного перехода:

$$(\psi_{\sigma\mu}^{\pm}, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\sigma\mu}(c \pm i\varepsilon) h(c) dc. \quad (2.5)$$

С помощью [1, 3.4(8), 3.3(12)] мы можем выразить предельные значения $\psi_{\sigma\mu}(c \pm i0)$ через $\psi_{\sigma\mu}(c), \dots$. Отсюда мы получаем выражения функционалов $\psi_{\sigma\mu}^{\pm}$ через функционалы $\psi_{\sigma\mu}^{(j)}, \dots$:

$$\psi_{\sigma\mu}^{\pm} = \psi_{\sigma\mu}^{(12)} + e^{\mp i\pi(\sigma+2\mu+1)} \widehat{\psi}_{\sigma\mu}^{(3)} \mp \frac{i\pi}{2} \varphi_{\sigma\mu}^{(2)} \quad (2.6)$$

$$= \psi_{\sigma\mu}^{(1)} + e^{\mp i\pi(\sigma+2\mu+1)} \widehat{\psi}_{\sigma\mu}^{(23)} \mp \frac{i\pi}{2} \widehat{\varphi}_{\sigma\mu}^{(2)} \quad (2.7)$$

(выражение (2.7) получается из (2.6) с помощью (2.3), (2.4)). Отсюда видно, что функционалы $\psi_{\sigma\mu}^{\pm}$ не имеют особенностей при $\mu = \nu$, — в самом деле, как было сказано в предыдущем абзаце, функционалы в правых частях (2.6), (2.7) не имеют особенностей при $\mu = \nu$ на $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$ соответственно.

§3. Сферические функции дискретной серии

Один из вариантов формулы Планшереля для гиперboloида X состоит в том, что дельта-функция δ на X , сосредоточенная в точке x^0 , разлагается (в смысле обобщенных функций) по сферическим функциям, отвечающим неприводимым унитарным представлениям группы G . Сферические функции на X были определены и вычислены в [6]; см. также [7, 9] (это обобщенные функции на X , инвариантные относительно H и собственные для оператора Лапласа–Бельтрами). Если в упомянутой формуле мы соберем вместе слагаемые, отвечающие представлениям дискретной серии, мы как раз получим разложение обобщенной функции E из §1. Согласно, например, [7] и [9, §30], эта дискретная часть формулы Планшереля имеет вид

$$E = a \sum_{r=-[\nu]}^{\infty} (2r + n - 2) E_r, \quad (3.1)$$

где суммирование происходит по целым $r > (2 - n)/2$,

$$a = 2(2\pi)^{(-n-1)/2}, \quad (3.2)$$

а обобщенные функции E_r (сферические функции дискретной серии) явно указаны. В теореме 3.1 будет указан удобный для нас здесь явный вид функций E_r . (При $q = 2$ обобщенные функции E_r распадаются в сумму $E_r^+ + E_r^-$ сферических функций, отвечающих представлениям аналитической и антианалитической серий.)

Рассмотрим следующие функционалы из $\mathfrak{M}'$:

$$V_r = \frac{1}{2} \sum_{\pm} e^{\pm i\pi(q-2)/2} \psi_{r\nu}^{\pm}. \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Сферические функции E_r дискретной серии ($r \in \mathbb{Z}$, $r > (2 - n)/2$) выражаются следующим образом:*

$$E_r = M' V_r. \quad (3.4)$$

Для $r \geq 0$ теорема доказана в [7]; для $r < 0$ она доказывается аналогично.

Напишем подробные выражения для E_r через $\psi_{r\nu}^{(j)}, \dots$. Для этого подставим в (3.3) выражения (2.6), (2.7) с $\mu = \nu$ и получим

$$E_r = M' \left\{ \cos \frac{q-2}{2} \pi [\psi_{r\nu}^{(12)} + (-1)^{r+n} \widehat{\psi}_{r\nu}^{(3)}] + \frac{\pi}{2} \sin \frac{q-2}{2} \pi \cdot \varphi_{r\nu}^{(2)} \right\} \quad (3.5)$$

$$= M' \left\{ \cos \frac{q-2}{2} \pi [\psi_{r\nu}^{(1)} + (-1)^{r+n} \widehat{\psi}_{r\nu}^{(23)}] + \frac{\pi}{2} \sin \frac{q-2}{2} \pi \cdot \widehat{\varphi}_{r\nu}^{(2)} \right\}. \quad (3.6)$$

Выражения (3.5), (3.6) удобны на $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$ соответственно.

§ 4. Доказательство теоремы 1.1

Начнем с формулы 3.8(3) из [1], которая в наших обозначениях принимает вид

$$(2\sigma + 2\mu + 1) \psi_{\sigma\mu}(z) = \psi_{\sigma-2, \mu+1}(z) - \psi_{\sigma, \mu+1}(z).$$

Положим здесь $\sigma = r \in \mathbb{Z}$, $\mu = \nu$, см. (1.8), и просуммируем по $-\lfloor \nu \rfloor \leq r \leq N$:

$$\sum_{r=-\lfloor \nu \rfloor}^N (2r + n - 2) \psi_{r\nu}(z) = \Psi(z) - \psi_{N-1, \nu+1}(z) - \psi_{N, \nu+1}(z), \quad (4.1)$$

где

$$\Psi(z) = \psi_{-\nu-2, \nu+1}(z) + \psi_{-\nu-1, \nu+1}(z), \quad n \text{ нечетно}, \quad (4.2)$$

$$\Psi(z) = \psi_{-\nu-3/2, \nu+1}(z) + \psi_{-\nu-1/2, \nu+1}(z), \quad n \text{ четно}. \quad (4.3)$$

Предельные значения этой функции $\Psi(z)$ на $\mathbb{R}$ сверху и снизу дают два функционала $\Psi^{\pm}$ из $\mathfrak{M}'$, ср. (2.5). Положив $z = c \pm i0$ в (4.1), умножив на $e^{\pm i\pi(q-2)/2}$ и просуммировав по $\pm$, мы получим в силу (3.3) равенство функционалов:

$$\sum_{r=-\lfloor \nu \rfloor}^N (2r + n - 2) V_r = W - V_{N-1} - V_N, \quad (4.4)$$

где

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\pm} e^{\pm i\pi(q-2)/2} \Psi^{\pm}. \quad (4.5)$$

В [7] доказано, что $V_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому, переходя к пределу в (4.4) при $N \rightarrow \infty$, мы получим

$$\sum_{r=-[\nu]}^{\infty} (2r + n - 2) V_r = W. \quad (4.6)$$

Сопоставляя (4.6), (3.1), (3.4), находим

$$E = aM'W, \quad (4.7)$$

где a дается формулой (3.2). Таким образом, в силу (4.5) остается вычислить $\Psi(z)$.

Пусть сначала n нечетно (ν целое). Запишем функции ψ из (4.2) через функции Лежандра (см. (2.1)):

$$\begin{aligned} \psi_{-\nu-2, \nu+1}(z) &= e^{-i(\nu+1)\pi} (z^2 - 1)^{-(\nu+1)/2} Q_{-1}^{\nu+1}(z), \\ \psi_{-\nu-1, \nu+1}(z) &= e^{-i(\nu+1)\pi} (z^2 - 1)^{-(\nu+1)/2} Q_0^{\nu+1}(z). \end{aligned}$$

Эти функции Лежандра мы вычисляем с помощью формул 3.2(35), (32) из [1] соответственно, после чего по (4.2) мы получаем

$$\Psi(z) = \Gamma(\nu + 1)(z - 1)^{\nu+1}.$$

Стало быть, по (4.5)

$$W = \frac{1}{2} \Gamma(\nu + 1) \sum_{\pm} e^{\pm i\pi(q-2)/2} (c - 1 \pm i0)^{-\nu-1}.$$

Вместе с (4.7) это дает формулы (1.1)–(1.3).

Пусть теперь n четно (ν полуцелое). Запишем функции ψ из (4.3) через функции Лежандра:

$$\begin{aligned} \psi_{-\nu-3/2, \nu+1}(z) &= e^{-i(\nu+1)\pi} (z^2 - 1)^{-(\nu+1)/2} Q_{-1/2}^{\nu+1}(z), \\ \psi_{-\nu-1/2, \nu+1}(z) &= e^{-i(\nu+1)\pi} (z^2 - 1)^{-(\nu+1)/2} Q_{1/2}^{\nu+1}(z). \end{aligned}$$

Применив к первой из них формулу 3.8(7) из [1], а ко второй — формулу 3.8(8) из [1], мы получим

$$\Psi(z) = e^{-i\nu\pi} (z^2 - 1)^{-(\nu+2)/2} (z + 1) \{ (\nu - 1/2) Q_{1/2}^{\nu}(z) + (\nu + 1/2) Q_{-1/2}^{\nu}(z) \}. \quad (4.8)$$

Положим для краткости $m = (n - 4)/2$, это целое число. Выразив обе функции Лежандра в (4.8) через гипергеометрическую функцию по формуле 3.2(8) из [1], получим

$$\begin{aligned} \Psi(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (z^2 - 1)^{-\nu-1} (z + 1) &\left\{ \frac{m}{2} z^{m-1} F\left(\frac{-m+1}{2}, \frac{-m+2}{2}; 2; z^{-2}\right) \right. \\ &\left. + z^m F\left(\frac{-m}{2}, \frac{-m+1}{2}; 1; z^{-2}\right) \right\}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Функция, стоящая в фигурных скобках в (4.9), есть многочлен от z степени m : гипергеометрические ряды здесь обрываются. Выписывая их коэффициенты, мы убеждаемся в том, что упомянутый многочлен есть в точности $A_m(z)$, см. (1.6), так что

$$\Psi(z) = \sqrt{\pi/2} \Gamma(n/2) (z-1)^{-\nu-1} (z+1)^{-\nu} A_m(z).$$

Стало быть,

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{\pm} e^{\pm i\pi(q-2)/2} (c-1 \pm i0)^{-\nu-1} (c+1 \pm i0)^{-\nu} A_m(c).$$

Вместе с (4.7) это дает (1.1), (1.4), (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (гипергеометрическая функция, функции Лежандра). Наука, М. (1965).
2. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г. Комплексные многообразия, остовы которых — полупростые вещественные группы Ли, и аналитические дискретные серии представлений. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 4, 19–27 (1977).
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М. (1958).
4. Молчанов В. Ф. Аналог формулы Планшереля для гиперboloидов. ДАН СССР, **183**, №2, 288–291 (1968).
5. Молчанов В. Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Матем. сб., **81 (123)**, №3, 358–375 (1970).
6. Молчанов В. Ф. Сферические функции на гиперboloидах. Матем. сб., **99 (141)**, №2, 139–161 (1976).
7. Молчанов В. Ф. Формула Планшереля для гиперboloидов. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **147**, 65–85 (1980).
8. Молчанов В. Ф. Квантование на мнимой плоскости Лобачевского. Функц. анализ и его прил., **14**, №2, 73–74 (1980).
9. Молчанов В. Ф. Гармонический анализ на однородных пространствах. В кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 59, ВИНТИ, М. (1990), с. 5–144.
10. Gindikin S. Conformal analysis on hyperboloids. J. Geom. Phys., **10**, 175–184 (1993).
11. Matsumoto S. Discrete series for an affine symmetric space. Hiroshima Math. J., **11**, 53–79 (1981).
12. Molchanov V. F. Holomorphic discrete series for hyperboloids of Hermitian type. Univ. Leiden Preprint W 94–13 (1994), готовится к печати в J. Funct. Anal., **145** (1977).
13. Olafsson G., Ørsted B. The holomorphic discrete series for affine symmetric spaces, I. J. Funct. Anal., **81**, No. 1, 126–159 (1988).
14. Rossmann W. Analysis on real hyperbolic spaces. J. Funct. Anal., **30**, No. 3, 448–477 (1978).
15. Strichartz R. S. Harmonic analysis on hyperboloids. J. Funct. Anal., **12**, No. 4, 341–383 (1973).
16. Tengstrand A. Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature. Math. Scand., **8**, 201–218 (1960).