Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Фредгольмовость оператора краевой задачи с условиями на ребре границы типа условий Чаплыгина–Жуковского–Кутта, *Функци. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 44–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:11:36

УДК 517.9

Фредгольмовость оператора краевой задачи с условиями на ребре границы типа условий Чаплыгина–Жуковского–Кутта

© 1997. С. А. НАЗАРОВ

§1. Введение

В линейной теории тонкого крыла (см. [1–3] и др.) уравнение Лапласа для потенциала скоростей Φ снабжается помимо обычных краевых условий требованием конечности градиента потенциала скоростей $\text{grad } \Phi$ на задней кромке крыла Γ . Возможность соблюдения этого условия ассоциируется с неполной определенностью данных Дирихле на части границы — в них фигурирует неизвестная циркуляция потока, значения которой совпадают со следом потенциала Φ на линии (ребре) Γ . Само требование конечности $\text{grad } \Phi$ связывается с именами С. А. Чаплыгина, Н. Е. Жуковского и М. В. Кутта (упоминавшееся в [4–6], оно сформулировано в [7]). Далее мы используем для него аббревиатуру ЧЖК.

В двумерной ситуации, изученной в полной мере (см. [1–9] и др.), Γ вырождается в точку и оператор задачи с условием ЧЖК наследует свойство фредгольмовости от оператора обычной краевой задачи. В трехмерном же случае дополнительные ограничения и произвол не помещаются в конечномерные пространства, т. е. они могут привести к потере упомянутого свойства. Сколь-нибудь полного математического исследования вопроса о корректной постановке условий ЧЖК до сих пор не проводилось (автору известна лишь одна публикация [10], где сделана попытка привлечь для этой цели пространства Соболева, но окончательного ответа не дано).

В настоящей статье доказывается теорема Фредгольма для задачи, моделирующей реальную. А именно, рассматривается задача в ограниченной области (а не в $\mathbb{R}^3$) и условия ЧЖК ставятся на гладкой замкнутой кривой Γ (у крыла на задней кромке есть изломы и концевые точки). Полностью задача описана в §2. Функциональное пространство, на котором ее оператор оказывается фредгольмовым, строится из функций с асимптотикой фиксированного вида, а условие ЧЖК переформулируется как требование обращения в нуль коэффициента при асимптотическом члене, порождающем корневые сингулярности. Все это, включая формулировку теоремы о фредгольмовости, помещено в §3 и §4. Доказательство теоремы проводится так: сначала в §5 исследуется модельная задача в $\mathbb{R}_+^3$, а затем в §6 реализуется процедура замораживания коэффициентов. Все конструкции привязаны к конкретным уравнениям, и их обобщение не является целью работы (в иных ситуациях условия на подмногообразиях границы изучались в [11–13] и др.).

В статье используются результаты [14–21] теории краевых задач в областях с кусочно гладкой границей — они собраны в книге [21] и точные ссылки даются именно на нее.

Автор выражает глубокую признательность Э. Майстеру и Р. Хиндеру за полезные обсуждения предмета работы.

§2. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}_+^3$ и часть Σ гладкой (класса C^∞) поверхности $\partial\Omega$ лежит в плоскости $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$. Фиксируем гладкий замкнутый контур $\Gamma \subset \Sigma$ и его окрестность $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, в которой введены координаты (s, n, z) ; здесь $z = x_3$, s — длина дуги на Γ , $|n|$ — расстояние до Γ на Π , причем $n > 0$ в области $\omega \subset \Sigma$, охватываемой Γ , и $n \leq 0$ на $(\Sigma \cap \mathcal{U}) \setminus \omega$. Пусть, кроме того, $d > 0$ таково, что $\{x \in \Sigma : n \in (0, d)\} \subset \mathcal{U} \cap \omega$, $\mathcal{U} \cap \Pi \subset \Sigma$ и

$$t \in C_0^\infty[0, d), \quad t \geq 0, \quad t(0) = 1. \quad (2.1)$$

Рассмотрим задачу

$$-\Delta_x u(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$\partial_\nu u(x) = g(x), \quad x \in \Upsilon = \partial\Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (2.3)$$

$$u(x) = h(x) + t(n)u_\Gamma(s), \quad x \in \omega, \quad (2.4)$$

в которой Δ_x — лапласиан, $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \Gamma)$, ∂_ν — производная вдоль внутренней нормали, u_Γ — след решения u на Γ и $g \in C_0^\infty(\Upsilon)$, $h \in C_0^\infty(\omega)$. Произведение tu_Γ продолжено нулем с $\mathcal{U} \cap \omega$ на ω (см. (2.1)).

Если функция u_Γ известна и $a > 0$, то существует единственное решение $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \Gamma) \cap H^1(\Omega)$ задачи (2.2)–(2.4), причем

$$u(x) = u_\Gamma(s) + k_1(s)r^{1/2} \sin(\varphi/2) + O(r^1), \quad r \rightarrow +0 \quad (2.5)$$

(см. [15, 16], [21, §9.2] и др.), где $u_\Gamma \in C^\infty(\Gamma)$, а (r, φ) — полярные координаты, $n = r \cos \varphi$ и $z = r \sin \varphi$. Ясно, что при $k_1 \neq 0$ условие ЧЖК

$$|(\text{grad } u)_\Gamma(s)| < \infty \quad (2.6)$$

не выполняется, и потому нужно потребовать, чтобы

$$k_1(s) = 0, \quad s \in \Gamma. \quad (2.7)$$

§3. Функциональные пространства и оператор продолжения

Пусть $V_\beta^l(\Omega)$ — пространство функций в Ω с нормой

$$\|v; V_\beta^l(\Omega)\| = \left(\sum_{i=1}^l \|x \mapsto \text{dist}(x, \Gamma)^{\beta-l+i} \nabla_x^i v(x); L_2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}; \quad (3.1)$$

здесь $l = 0, 1, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$, а $\nabla_x^i v$ — совокупность производных функции v порядка i . При $l \geq 1$ через $V_\beta^{l-1/2}(\omega)$ обозначается пространство следов на ω

функций из $V_\beta^l(\Omega)$ и

$$\|w; V_\beta^{l-1/2}(\omega)\| = \inf \{ \|v; V_\beta^l(\Omega)\| : v = w \text{ на } \omega \}. \quad (3.2)$$

Известно, что перевод правых частей f и g , h из классов C_0^∞ в классы V_β^τ сопровождается потерей гладкости коэффициентами u_Γ , k_1 . Ситуация исправляется (см. [18, 19], [21; § 9.3] и др.) за счет введения оператора $\mathfrak{C}_\Gamma$ продолжения с Γ на Ω (или ω). Для функции $\mathbb{R} \ni s \mapsto k(s)$ положим

$$\mathfrak{C}k(s, r) = \int_{\mathbb{R}} X(\tau) k(s - r\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

где X — прообраз Фурье функции $\xi \mapsto (2\pi)^{-1/2} \chi(|\xi|)$ и $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(|z|) = 1$ при $|z| < 1$. Пусть, кроме того, $\{\zeta_p\}_{p=1}^N$ — разбиение единицы на трубчатой окрестности контура Γ , $\zeta_p, \zeta_p^0 \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ и $\zeta_p^0 \zeta_p = \zeta_p$. Тогда

$$\mathfrak{C}_\Gamma k = \zeta_1^0 \mathfrak{C} \zeta_1 k + \dots + \zeta_N^0 \mathfrak{C} \zeta_N k. \quad (3.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\sigma \in (m-1, m)$, где $m = 1, 2, \dots$, и $k \in H^\sigma(\Gamma)$. Тогда при $j = 0, \dots, m-1$, $i = m, m+1, \dots$ и $\varepsilon > 0$ нормы

$$\begin{aligned} \|\nabla_x^j \mathfrak{C}_\Gamma k; V_{\varepsilon-1}^0(\Omega)\|, \quad \|\nabla_x^j (\mathfrak{C}_\Gamma k - k); V_{j-1-\sigma}^0(\Omega \cap \mathcal{U})\|, \\ \|\nabla_x^i \mathfrak{C}_\Gamma k; V_{i-1-\sigma}^0(\Omega)\| \end{aligned} \quad (3.5)$$

мажорируются величиной $c_{i\varepsilon} \|k; H^\sigma(\Gamma)\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Предложение 3.1 известно (см., в частности, предложение 6.4.7 из [21]). Пусть $\mathfrak{C}_\Gamma^1$ и $\mathfrak{C}_\Gamma^2$ — операторы, определенные равенством (3.4) по различным эталонным операторам $\mathfrak{C}$ или разбиениям единицы $\{\zeta_p\}$. Тогда функция $(\mathfrak{C}_\Gamma^1 - \mathfrak{C}_\Gamma^2)k$ принадлежит $V_{l-1-\sigma}^l(\Omega)$ при $l = 0, 1, \dots$, ее норма не превосходит $c_l \|k; H^\sigma(\Gamma)\|$ и все производные до порядка $m-1$ обладают нулевым следом на Γ .

§ 4. Формулировка и обсуждение основной теоремы

Собираясь иметь дело с решениями из $H_{\text{loc}}^2(\overline{\Omega} \setminus \Gamma)$, мы обязаны в соответствии с (2.4) обеспечить включение $u_\Gamma \in H^{3/2}(\Gamma)$ — это делается за счет выбора весового показателя

$$\beta \in (-1, -1/2). \quad (4.1)$$

В качестве области определения оператора $\mathcal{A}$ задачи (2.2)–(2.4), (2.7) возьмем пространство $\mathcal{D}_\beta$, содержащее функции u ,

$$\begin{aligned} u(x) = \mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma(s, r) + n \mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^1(s, r) \\ + z \mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^2(s, r) + r^{3/2} \sin(3\varphi/2) \mathfrak{C}_\Gamma k_2(s, r) + \tilde{u}(x), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$u_\Gamma \in H^{1-\beta}(\Gamma), \quad u_\Gamma^1, u_\Gamma^2 \in H^{-\beta}(\Gamma), \quad k_2 \in H^{-\beta-1/2}(\Gamma), \quad \tilde{u} \in V_\beta^2(\Omega). \quad (4.3)$$

В качестве нормы в $\mathcal{D}_\beta$ возьмем сумму норм функций (4.3).

Поясним данное определение. Как известно (см., например, гл. 8, 9 из [21]), асимптотика вблизи Γ формируется из степенных решений $r^\lambda \Phi(\varphi)$ вспомогательной двумерной задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_{(n,z)} w(n, z) &= 0, & (n, z) \in \mathbb{R}_+^2, \\ \partial_z w(n, 0) &= 0, & n < 0, & w(n, 0) = 0, & n > 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Перечислить такие решения несложно:

$$k_j r^{j-1/2} \sin[(j-1/2)\varphi] \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.5)$$

Функция $x \mapsto k(s) r^\lambda \Phi(\varphi)$ с $k \in C^\infty(\Gamma)$, $\Phi \in C^\infty[0, \pi]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ попадает в $H^1(\Omega)$, но исключается из $V_\beta^2(\Omega)$, если $\operatorname{Re} \lambda \in (0, 1 - \beta)$. Значит, в представление решения с остатком из $V_\beta^2(\Omega)$ разумно поместить выражения (4.5) с $j = 1$ и $j = 2$, но первое из них уничтожается условием (2.7). Слагаемое $\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma$ возникло в (4.2) из-за последнего члена в (2.4) (отметим, что $u_\Gamma \in H^{1-\beta}(\Gamma) \subset H^{3/2}(\Gamma)$). Второе и третье слагаемые в (4.2) согласованы с разложениями правых частей

$$g(x) = \mathfrak{C}_\Gamma g_\Gamma(s, r) + \tilde{g}(x), \quad h(x) = n \mathfrak{C}_\Gamma h_\Gamma^1(s, r) + \tilde{h}(x). \quad (4.6)$$

Наконец, дифференциальные свойства коэффициентов рекомендованы предложением 3.1.

Ввиду сказанного пространство $\mathcal{R}_\beta$ в формуле

$$\mathcal{D}_\beta \ni u \mapsto \mathcal{A}u = \{-\Delta_x u + au, \partial_n u|_\Gamma, u|_\omega - tu_\Gamma\} \in \mathcal{R}_\beta \quad (4.7)$$

составляется из троек $\{f, g, h\}$,

$$f \in V_\beta^0(\Omega), \quad g_\Gamma, h_\Gamma^1 \in H^{-\beta}(\Gamma), \quad \tilde{g} \in V_\beta^{1/2}(\Upsilon), \quad \tilde{h} \in V_\beta^{3/2}(\omega). \quad (4.8)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Оператор (4.7) задачи (2.2)–(2.4), (2.7) фредгольмов.*

Доказательство этой, основной, теоремы откладывается до последнего раздела статьи, где сначала будет проверена непрерывность отображения (4.7), затем установлена оценка

$$\begin{aligned} \|u; \mathcal{D}_\beta\| &\leq c \{ \|\mathcal{A}u; \mathcal{R}_\beta\| + \|\tilde{u}; V_{\beta-1+\delta}^1(\Omega)\| + \|k_2; H^{-\beta-\delta-1/2}(\Gamma)\| \\ &\quad + \|u_\Gamma; H^{1-\beta-\delta}(\Gamma)\| + \|u_\Gamma^1; H^{-\beta-\delta}(\Gamma)\| + \|u_\Gamma^2; H^{-\beta-\delta}(\Gamma)\| \} \end{aligned} \quad (4.9)$$

с $\delta > 0$ и, наконец, построен непрерывный оператор (регуляризатор) $\mathcal{P}: \mathcal{R}_\beta \rightarrow \mathcal{D}_\beta$, для которого отображение

$$1 - \mathcal{A}\mathcal{P}: \mathcal{R}_\beta \rightarrow \mathcal{R}_\beta \quad (4.10)$$

оказывается вполне непрерывным.

Мы пользуемся процедурой замораживания коэффициентов, однако из-за необычности условий (2.4) и (2.7) она требует уточнения в деталях. Во-первых, отдельно обсуждается нелокальный член tu_Γ из (2.4). Во-вторых, в список модельных задач нужно включить нестандартную задачу, отвечающую точкам ребра Γ . В-третьих, локализацию вблизи ребра следует проводить при учете асимптотического строения элементов пространств $\mathcal{D}_\beta$ и $\mathcal{R}_\beta$. Все эти новшества

возможны благодаря специфике самой задачи и удачному выбору показателей гладкости и веса. Так, асимптотика $u \in \mathcal{D}_\beta$ начинается с члена $\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma$, который уничтожается оператором $-\Delta_x + a$ с точностью до допустимого остатка из $V_\beta^0(\Omega)$ (это не так для $\beta \leq -1$; напомним еще, что требования $l = 2$ и $1 - \beta > 3/2$ нужны для обработки слагаемого tu_Γ). Остальные члены в (4.2) имеют запас скорости затухания за счет множителей n , $z = O(r)$ и $r^{3/2}$; такого запаса нет у слагаемого $r^{1/2}\mathfrak{C}_\Gamma k_1$, но он устранен условием (2.7).

Упомянем одну упрощающую особенность задачи: в координатах (s, n, z) оператор Лапласа Δ_x принимает вид

$$[1 - n\kappa(s)]^{-1} \{ \partial_s [1 - n\kappa(s)]^{-1} \partial_s + \partial_n [1 - n\kappa(s)] \partial_n \} + \partial_z^2 \quad (4.11)$$

и его главная часть $\Delta_{(s,n,z)} = \partial_s^2 + \partial_n^2 + \partial_z^2$ не зависит от точки на Γ . В (4.11) κ — кривизна контура Γ .

Покажем, что $u \in H^2(\Omega)$. Включение $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$ очевидно. Обозначив через $v_0, \dots, v_3$ первые члены справа в (4.2), получаем в силу предложения 3.1, что при $i = 1, 2$ и любом малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} v_0, \nabla_x v_0 &\in V_{\varepsilon-1}^0(\Omega), \quad \nabla_x^2 v_0 \in V_\beta^0(\Omega), \\ v_i &\in V_{\varepsilon-2}^0(\Omega), \quad \nabla_x v_i \in V_{\varepsilon-1}^0(\Omega), \quad \nabla_x^2 v_i \in V_\beta^0(\Omega), \\ v_3 &\in V_{\varepsilon-5/2}^0(\Omega), \quad \nabla_x v_3 \in V_{\varepsilon-3/2}^0(\Omega), \quad \nabla_x^2 v_3 \in V_{\varepsilon-1/2}^0(\Omega). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Остается заметить, что каждое из фигурирующих в (4.12) пространств содержится в $L_2(\Omega)$.

Вычислим след на Γ градиента функции $u \in \mathcal{D}_\beta$ (он существует и находится в $L_2(\Gamma)$ вследствие того, что функция $x \mapsto r^{\varepsilon-1/2} \nabla_x u(x)$ принадлежит $H^1(\Omega \cap \mathcal{U})$; см. (4.2), (4.12) и [17], а также лемму 6.4.8 из [21]). Если $w_\Gamma \in L_2(\Gamma)$ — след функции w , попадающей в $V_\sigma^0(\Omega)$ с $\sigma < -1$, то $w_\Gamma = 0$, поскольку иначе не будет сходиться интеграл $\int r^{2\sigma} |w(x)|^2 dx$. Таким образом, на $\tilde{u} \in V_\beta^2(\Omega) \subset V_{\beta-1}^1(\Omega)$ и $v_3 \in V_{\varepsilon-1/2}^2(\Omega) \subset V_{\varepsilon-3/2}^1(\Omega)$ можно не обращать внимания. По предложению 3.1 выражения $\nabla_x(\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma - u_\Gamma)$, $(\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^1 - u_\Gamma^1) \nabla_x n$, $(\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^2 - u_\Gamma^2) \nabla_x z$, $n \nabla_x \mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^1$, $z \nabla_x \mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^2$ содержатся в $V_{\beta-1}^0(\Omega)$. Значит, проекции вектора $(\text{grad } u)_\Gamma$ на оси s , n и z равны $\partial_s u_\Gamma$, u_Γ^1 и u_Γ^2 . Все они включаются в $H^{-\beta}(\Gamma)$ и благодаря неравенству $-\beta > 1/2$ оказываются непрерывными функциями на Γ .

§5. Модельная задача в $\mathbb{R}_+^3$

Пусть $\Pi_\pm = \{x \in \Pi : \pm x_2 > 0\}$, γ — прямая $\{x : x_2 = x_3 = 0\}$ и r — расстояние до γ , т. е. $r^2 = x_2^2 + x_3^2$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_x u(x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^3, \\ \partial_z u(x) &= g(x'), \quad x \in \Pi_-, \quad u(x) = h(x') + u_\gamma(x'), \quad x \in \Pi_+, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\partial_z = \partial/\partial x_3$, $x' = (x_1, x_2)$, u_γ — след решения u на γ и $\mathfrak{C}$ — оператор

продолжения (3.3). Предположим, что, подобно (4.6),

$$g(x') = \mathfrak{C}g_\gamma(x_1, -x_2) + \tilde{g}(x'), \quad h(x') = x_2 \mathfrak{C}h_\gamma^1(x') + \tilde{h}(x'), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} s = \|f; V_\beta^0(\mathbb{R}_+^3)\|^2 + \|\tilde{g}; V_\beta^{1/2}(\Pi_-)\|^2 + \|\tilde{h}; V_\beta^{3/2}(\Pi_+)\|^2 \\ + \|g_\gamma; L_2^{-\beta}(\mathbb{R})\|^2 + \|h_\gamma^1; L_2^{-\beta}(\mathbb{R})\|^2 < \infty; \end{aligned} \quad (5.3)$$

здесь $\|w; L_2^\mu(\mathbb{R})\|$ — полунорма $\|\xi \mapsto |\xi|^\mu \mathcal{F}w(\xi); L_2(\mathbb{R})\|$ в $H^\mu(\mathbb{R})$, а $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{x_1 \rightarrow \xi}$ — преобразование Фурье. Решение задачи (5.1) ищем в аналогичной (4.2) форме

$$\begin{aligned} u(x) = \mathfrak{C}u_\gamma(x_1, r) + x_2 \mathfrak{C}u_\gamma^1(x_1, r) + x_3 \mathfrak{C}u_\gamma^2(x_1, r) \\ + r^{3/2} \sin(3\varphi/2) \mathfrak{C}k_2(x_1, r) + \tilde{u}(x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Применим преобразование $\mathcal{F}_{x_1 \rightarrow \xi}$ к уравнениям (5.1) и введем новые переменные $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_i = |\xi|x_i$ и

$$U = \mathcal{F}u, \quad F = |\xi|^{-2} \mathcal{F}f, \quad G = |\xi|^{-1} \mathcal{F}g, \quad H = \mathcal{F}h. \quad (5.5)$$

Так как, согласно (3.3),

$$\mathcal{F}\mathfrak{C}k(\xi, r) = \chi(\rho) \mathcal{F}k(\xi), \quad (5.6)$$

где $\rho = |\eta| = |\xi|r$, то в результате получим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_\eta U(\eta) + U(\eta) = F(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}_+^2, \\ \partial_2 U(\eta) = G(\eta_1), \quad \eta \in \pi_-, \quad U(\eta) = H(\eta_1) + U(0), \quad \eta \in \pi_+; \end{aligned} \quad (5.7)$$

здесь $\partial_2 = \partial/\partial\eta_2$, а π_+ и π_- — положительная и отрицательная полуоси. Кроме того, обратившись к (5.6) и положив

$$\begin{aligned} G_\gamma = |\xi|^{-1} \mathcal{F}g_\gamma, \quad H_\gamma^1 = |\xi|^{-1} \mathcal{F}h_\gamma^1, \\ U_\gamma = \mathcal{F}u_\gamma, \quad U_\gamma^1 = |\xi|^{-1} \mathcal{F}u_\gamma^1, \quad U_\gamma^2 = |\xi|^{-1} \mathcal{F}u_\gamma^2, \quad K_2 = |\xi|^{-3/2} \mathcal{F}k_2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

перепишем представления (5.2) и (5.4) следующим образом:

$$G(\eta_1) = \chi(\rho)G_\gamma + \tilde{G}(\eta_1), \quad H(\eta_1) = \eta_1 \chi(\rho)H_\gamma^1 + \tilde{H}(\eta_1), \quad (5.9)$$

$$U(\eta) = \chi(\rho)[U_\gamma + \eta_1 U_\gamma^1 + \eta_2 U_\gamma^2 + K_2 \rho^{3/2} \sin(3\varphi/2)] + \tilde{U}(\eta). \quad (5.10)$$

Введем пространство $E_\beta^l(\mathbb{R}_+^2)$ с нормой

$$\|W; E_\beta^l(\mathbb{R}_+^2)\| = \left(\sum_{i=0}^l \|\rho^\beta (1 + \rho^{i-l}) \nabla_\eta^i W; L_2(\mathbb{R}_+^2)\|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.11)$$

Нормы в следовых пространствах $E_\beta^{l-1/2}(\pi_\pm)$ определяются подобной (3.2) фор-

мулой. В силу леммы 6.1.2 из [21]

$$F \in E_\beta^0(\mathbb{R}_+^2), \quad \tilde{G} \in E_\beta^{1/2}(\pi_-), \quad \tilde{H} \in E_\beta^{3/2}(\pi_+), \quad (5.12)$$

$$cs \leq \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2(1-\beta)} S(\xi) d\xi \leq Cs, \quad c, C > 0, \quad (5.13)$$

$$S = \|F; E_\beta^0(\mathbb{R}_+^2)\|^2 + \|\tilde{G}; E_\beta^{1/2}(\pi_-)\|^2 + \|\tilde{H}; E_\beta^{3/2}(\pi_+)\|^2 + |G_\gamma|^2 + |H_\gamma|^2. \quad (5.14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *При выполнении (5.9), (5.12) и (4.1) существует единственное решение U задачи (5.7), представимое в виде (5.10), где $\tilde{U} \in E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)$, и справедливо неравенство*

$$|U_\gamma|^2 + |U_\gamma^1|^2 + |U_\gamma^2|^2 + |K_2|^2 + \|\tilde{U}; E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)\|^2 \leq cS. \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим существование решения. Заметим, что $U_\gamma = U(0)$ и $(1 - \chi)U(0) \in E_\beta^{3/2}(\pi_+)$. Временно считаем, что величина $U(0)$ известна, и присоединяем ее к правой части условия Дирихле в (5.7). По лемме 6.2.5 из [21] найдется функция $W \in E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)$, такая, что выполняется (5.7) при $|\eta| > \rho_0 > 0$ и

$$\|W; E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)\|^2 \leq c(S + |U(0)|^2). \quad (5.16)$$

Перейдем к задаче (5.7) для $U' = U - W$; новые правые части F', G', H' имеют компактные носители и удовлетворяют (5.9). Поэтому

$$F' \in E_\sigma^0(\mathbb{R}_+^2), \quad G' \in E_\sigma^{1/2}(\pi_-), \quad H' \in E_\sigma^{3/2}(\pi_+) \quad (5.17)$$

при $\sigma > 1$, а сумма квадратов норм функций (5.17) не превосходит $c_\sigma(S + |U(0)|^2)$. Вспоминая сказанное о задаче (4.4) и ссылаясь на предложения 6.4.3, 6.2.8 из [21], заключаем, что при $\sigma \in (1/2, 3/2)$ оператор

$$E_\sigma^2(\mathbb{R}_+^2) \ni U \mapsto \mathcal{M}_\sigma U = \{-\Delta_\eta U + U, \partial_2 U|_{\pi_-}, U|_{\pi_+}\} \in E_\sigma^0(\mathbb{R}_+^2) \times E_\sigma^{1/2}(\pi_-) \times E_\sigma^{3/2}(\pi_+) \quad (5.18)$$

оказывается изоморфизмом. Фиксируем $\sigma \in (1, 3/2)$ — сумма

$$U = W + \mathcal{M}_\sigma^{-1}\{F', G', H'\} \quad (5.19)$$

является решением задачи (5.7). Кроме того, из теорем 4.2.1, 4.2.3 книги [21] при учете (5.16)–(5.19) выводим следующие представление и оценку:

$$U(\eta) = \chi(\rho)\{U_\gamma + \eta_1 U_\gamma^1 + \eta_2 U_\gamma^2 + K_1 \rho^{1/2} \sin(\varphi/2) + K_2 \rho^{3/2} \sin(3\varphi/2)\} + \tilde{U}(\eta), \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} & |U_\gamma|^2 + |U_\gamma^1|^2 + |U_\gamma^2|^2 + |K_1|^2 + |K_2|^2 + \|\tilde{U}; E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)\|^2 \\ & \leq c[S + \|\chi \mathcal{M}_\sigma^{-1}\{F', G', H'\}; E_\sigma^2(\mathbb{R}_+^2)\|^2 \\ & \quad + \|(1 - \chi) \mathcal{M}_\sigma^{-1}\{F', G', H'\}; E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)\|^2 + \|W; E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)\|^2] \\ & \leq C[S + |U(0)|^2]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Итак, сравнивая (5.10), (5.15) с (5.20), (5.21), видим, что U — нужное решение при условии, что $K_1 = 0$ и

$$|U(0)|^2 \leq cS. \quad (5.22)$$

Возьмем решение $Z(\eta) = \rho^{-1/2} e^{-\rho} \sin(\varphi/2)$ однородной смешанной задачи в $\mathbb{R}_+^2$. Пользуясь формулой Грина с функциями U , Z в области $\{\eta \in \mathbb{R}_+^2 : \rho > \delta\}$ и переходя к пределу при $\delta \rightarrow +0$, находим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+^2} FZ \, d\eta - \int_{\pi_-} GZ \, d\eta_1 + \int_{\pi_+} H \partial_2 Z \, d\eta_1 \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \delta \int_0^\pi [Z \partial_\rho U - U \partial_\rho Z]_{\rho=\delta} d\varphi - U(0) \int_\delta^\infty \partial_2 Z(\eta_1, 0) \, d\eta_1 \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} K_1 + U(0) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \delta^{-1/2} - \delta^{-1/2} e^{-\delta} + \int_\delta^\infty \rho^{-1/2} e^{-\rho} \, d\rho \right\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Множитель при $U(0)$ равен $\sqrt{\pi}$. Значит, за счет выбора $U(0)$ можно соблюсти требование $K_1 = 0$, которое превращает (5.20), (5.21) в (5.10), (5.15), поскольку сопровождается неравенством (5.22) (модуль левой части (5.23) не превосходит $cS^{1/2}$).

Решение (5.10) построено — проверим его единственность. Повторяя выкладку (5.23) с нулевыми F и G , H , обнаруживаем, что $U(0) = 0$. Следовательно, $U \in E_\beta^2(\mathbb{R}_+^2)$ — решение однородной смешанной задачи в $\mathbb{R}_+^2$, которое по предложению 6.2.6 из [21] попадает в $E_\sigma^2(\mathbb{R}_+^2)$, а потому и в (тривиальное!) ядро оператора $\mathcal{M}_\sigma$ с весовым индексом $\sigma \in (1/2, 3/2)$.

Делая обратное преобразование Фурье и вспоминая (5.5), (5.8) и (5.13), (5.3), (5.14), выводим из предложения 5.1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\beta \in (-1, -1/2)$ и для правых частей задачи (5.1) конечно выражение (5.3). Тогда существует единственное решение (5.4) и

$$\begin{aligned} & \|u_\gamma; L_2^{1-\beta}(\mathbb{R})\|^2 + \|u_\gamma^1; L_2^{-\beta}(\mathbb{R})\|^2 + \|u_\gamma^2; L_2^{-\beta}(\mathbb{R})\|^2 \\ & + \|k_2; L_2^{-\beta-1/2}(\mathbb{R})\|^2 + \|\tilde{u}; V_\beta^2(\mathbb{R}_+^3)\|^2 \leq cs. \end{aligned} \quad (5.24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Попутно получена такая оценка:

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{C}u_\gamma - u_\gamma; V_\beta^{3/2}(\Pi_+)\|^2 \leq c \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2(1-\beta)} \|\eta_1 \mapsto [1 - \chi(\eta_1)] U_\gamma(\xi); E_\beta^{3/2}(\pi_+)\|^2 \, d\xi \\ & \leq C \|u_\gamma; L_2^{1-\beta}(\mathbb{R})\|^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

(см. следствие 6.1.3 из [21] и начало доказательства предложения 5.1). Отсюда и из (3.4) вытекает соотношение

$$\|\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma - u_\Gamma; V_\beta^{3/2}(\omega \cap \mathcal{U})\| \leq c \|u_\Gamma; H^{1-\beta}(\Gamma)\|. \quad (5.26)$$

§6. Доказательство теоремы 4.1

1) Непрерывность оператора $\mathcal{A}$. По определению (3.1)

$$\|(a - \Delta_x)\tilde{u}; V_\beta^0(\Omega)\| \leq c\|\tilde{u}; V_\beta^2(\Omega)\| \leq c\|u; \mathcal{D}_\beta\|.$$

Взяв в (4.2) $\varepsilon > 0$ малым, получаем, согласно (4.1), что все пространства из (4.12), за исключением $V_{\varepsilon-1/2}^0(\Omega)$, вкладываются в $V_\gamma^0(\Omega)$. Вместе с (4.11) это означает, что

$$\|(a - \Delta_x)v_j; V_\beta^0(\Omega)\| \leq c\|u; \mathcal{D}_\beta\| \quad (6.1)$$

при $j = 0, 1, 2$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|(a - \Delta_x + \Delta_{(s,n,z)})v_3; V_\beta^0(\Omega)\| &\leq c\|k_2; H^{\beta-1/2}(\Gamma)\| \leq c\|u; \mathcal{D}_\beta\|, \\ \Delta_{(s,n,z)}v_3(x) &= \mathfrak{C}_\Gamma k_2(s, r)\Delta_{(s,n)}[r^{3/2} \sin(3\varphi/2)] + \dots = \dots, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены слагаемые, содержащие производные $\mathfrak{C}_\Gamma k_2$, — они попадают в $V_\beta^0(\Omega)$ благодаря предложению 3.1 с $\sigma = -\beta - 1/2$ и $m = 1$. Значит, (6.1) сохраняется при $j = 3$.

Осталось рассмотреть краевые условия. Можно считать, что в малой d -окрестности $\mathcal{O}_d$ контура Γ срезки ζ_p^0 зависят лишь от s . Так как $\partial r/\partial z = 0$ при $z = 0$, то $g \equiv \partial_n u = \mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^1 + \partial_n \tilde{u}$ на Υ , т.е. представление вида (4.6) установлено. Наконец,

$$h \equiv u - tu_\Gamma = n\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma^1 + \tilde{u} + t[\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma - u_\Gamma] + (1-t)\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma.$$

Первое слагаемое справа интерпретируем как $n\mathfrak{C}_\Gamma h_\Gamma^1$. Остальные три члена отнесем к $\tilde{h}$. Оценки норм в $V_\beta^{3/2}(\omega)$ для первых двух вытекают из (3.2) и (5.26). Для третьего $\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma \in V_\varepsilon^{3/2}(\omega)$ и $1 - t(n) = O(r)$, т.е. $(1-t)\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma \in V_{\varepsilon-1}^{3/2}(\omega) \subset V_\beta^{3/2}(\omega)$ при $\varepsilon \in (0, 1 + \beta)$. Именно это и требовалось.

2) Оценка (4.9). Вне $\mathcal{O}_d$ весовые множители в (3.1) отделены от нуля и неважны. Локальные оценки решений эллиптических задач (см. [22, 23] и др.) составляют неравенство

$$\begin{aligned} \|u; H^2(\Omega \setminus \mathcal{O}_{2d})\| &\leq c(\|(a - \Delta_x)u; L_2(\Omega \setminus \mathcal{O}_d)\| + \|\partial_n u; H^{1/2}(\Upsilon \setminus \mathcal{O}_d)\| \\ &\quad + \|u; H^{3/2}(\omega \setminus \mathcal{O}_d)\| + \|u; L_2(\omega \setminus \mathcal{O}_d)\|) \\ &\leq (\|\mathcal{A}u; \mathcal{R}_\beta\| + \|u_\Gamma; H^{1-\beta-\delta}(\Gamma)\| + \mathcal{K}) \leq c\mathcal{N}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\delta = -(\beta + 1/2) > 0$, а $\mathcal{N} = \|\mathcal{A}u; \mathcal{R}_\beta\| + \mathcal{K}$ — сумма из фигурных скобок в (4.9). При оценивании $\|u; L_2(\Omega \setminus \mathcal{O}_d)\|$ были учтены формулы (4.12) для $v_0, \dots, v_3$, справедливые при меньшей гладкости коэффициентов, чем в (4.3). Рассмотрим окрестность контура Γ . Пусть $\{\zeta_m^1\}_{m=1}^M$ — мелкое разбиение единицы на ней, причем в $\mathcal{O}_{2d}$ срезки $\zeta_m^1 \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ зависят от s . Фиксируем m и умножим (2.2)–(2.4) на $\zeta \equiv \zeta_m^1$. При переходе к $w = \zeta u$ возникают члены с коммутаторами, среди которых существенны появившиеся из-за дифференцирования по s , — носители остальных лежат вне $\mathcal{O}_{2d}$ и они оцениваются так же,

как $\|u; L_2(\Omega \setminus \mathcal{O}_d)\|$ в (6.2). Производные ∂_s и ∂_s^2 имеются в (4.11) (в (2.3) их нет); благодаря соотношениям (4.12) для v_j и $\partial_s v_j$, которые сохраняются при уменьшении в (4.3) показателей гладкости на малое $\delta > 0$, получаем, что $V_\beta^0(\Omega)$ -нормы всех «коммутаторов» не превосходят $c\mathcal{K}$. Такая же мажоранта и у нормы выражения $(a - \Delta_x + \Delta_{(s,n,z)})w$. Переносим все лишние члены направо, преобразуем (2.2) в первую строку (5.1), где вместо u и x поставлены w и (s, n, z) , а правая часть обладает компактным носителем и попадает в $V_\beta^0(\mathbb{R}_+^3)$. Предположив, что ζ есть функция от s и r , приходим к первому краевому условию $\partial_z w = \zeta g$ в (5.1). Равенство (2.4), умноженное на ζ , перепишем так:

$$\begin{aligned} w - w_\Gamma &= \zeta h + nt'(0)\mathfrak{C}_\Gamma(\zeta_\Gamma u_\Gamma) + \zeta\{t - nt'(0) - 1\}u_\Gamma \\ &\quad - \zeta nt'(0)(\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma - u_\Gamma) + (\zeta - \zeta_\Gamma)u_\Gamma + nt'(0)[\zeta\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma - \mathfrak{C}_\Gamma(\zeta_\Gamma u_\Gamma)]. \end{aligned}$$

Отнесем второе слагаемое справа к $n\mathfrak{Ch}_\gamma^1$ в (5.2); при этом $\|\zeta_\Gamma u_\Gamma; L_2^{-\beta}(\mathbb{R})\| \leq c\mathcal{K}$. Остальные слагаемые, кроме ζh , обозначим $I_3, \dots, I_6$ и, намереваясь поместить их в составляющую $\tilde{h}$, проверим их принадлежность $V_\beta^{3/2}(\Pi_+)$ (см. (5.3)). Так как фигурная скобка $T(n)$ есть $O(n^2)$ и $u_\Gamma \in H^{1-\beta-\delta}(\Gamma) \subset C^1(\Gamma)$, то

$$\begin{aligned} \|I_3; V_\beta^{3/2}(\Pi_+)\| &\leq c(\|r^\beta \zeta T u_\Gamma; L_2^{3/2}(\Pi_+)\| + \|r^{\beta-3/2} \zeta T u_\Gamma; L_2(\Pi_+)\| \\ &\quad + \|r^{\beta-1/2} \nabla_{(n,x)}(\zeta T u_\Gamma); L_2(\Pi_+)\|) \\ &\leq c(\|u_\Gamma; H^{3/2}(\Gamma)\| + \|u_\Gamma; C^1(\Gamma)\|) \leq c\mathcal{K}. \end{aligned}$$

В силу неравенства (5.26), в котором β заменено на $\beta + \delta$ при сохранении $\beta + \delta < -1/2$,

$$\begin{aligned} \|I_4; V_\beta^{3/2}(\Pi_+)\| &\leq c\|(\mathfrak{C}_\Gamma - 1)\zeta_\Gamma u_\Gamma; V_{\beta+1}^{3/2}(\omega)\| \\ &\leq c\|(\mathfrak{C}_\Gamma - 1)\zeta_\Gamma u_\Gamma; V_{\beta+\delta}^{3/2}(\omega)\| \leq c\|u_\Gamma; H^{1-\beta-\delta}(\Gamma)\| \leq c\mathcal{K}. \end{aligned}$$

Считаем, что $\zeta(s, r) - \zeta_\Gamma(s) = \zeta_\Gamma(s)(\lambda(r) - 1)$, где $\lambda \in C_0^\infty[0, +\infty)$ и $\lambda(r) = 1$ при $r < 2d$. Обозначая $\lambda(\rho/|\xi|)$ и $\mathcal{F}(\zeta_\Gamma u_\Gamma)$ через $\lambda_\xi(\rho)$ и Z , получаем

$$\begin{aligned} \|I_5; V_\beta^{3/2}(\Pi_+)\|^2 &= \|(1 - \lambda)\zeta_\Gamma u_\Gamma; V_\beta^{3/2}(\Pi_+)\|^2 \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2(1-\beta)} |Z(\xi)|^2 \|1 - \lambda_\xi; E_\beta^{3/2}(\Pi_+)\|^2 d\xi \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2(1-\beta)} |Z(\xi)|^2 \left\{ |\xi|^{-2} \|\lambda'_\xi; E_\beta^{1/2}(\Pi_+)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \rho^{2\beta} (1 + \rho^{-3/2})^2 (1 - \lambda_\xi(\rho))^2 d\rho \right\} d\xi \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}} (|\xi| + 1)^3 |Z(\xi)|^2 d\xi \leq c\|\zeta_\Gamma u_\Gamma; H^{3/2}(\Gamma)\|^2 \leq c\mathcal{K}^2. \quad (6.3) \end{aligned}$$

Наконец, неравенства

$$\begin{aligned} \|I_6; V_\beta^{3/2}(\Pi_+)\| &\leq c\|\zeta\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma - \mathfrak{C}_\Gamma(\zeta_\Gamma u_\Gamma); V_{\beta+1}^{3/2}(\omega)\| \\ &\leq c\|\zeta\mathfrak{C}_\Gamma u_\Gamma - \mathfrak{C}_\Gamma(\zeta_\Gamma u_\Gamma); V_{\beta+1}^{3/2}(\Omega)\| \leq c\|\zeta_\Gamma u_\Gamma; H^{-\beta}(\Gamma)\| \leq c\mathcal{K} \end{aligned}$$

вытекают из известной непрерывности отображения

$$H^\sigma(\Gamma) \ni k \mapsto \zeta \mathfrak{C}_\Gamma k - \mathfrak{C}_\Gamma(\zeta k) \in V_{l-1-\sigma}^l(\Omega), \quad l = 0, 1, \dots \quad (6.4)$$

Этот же факт позволяет переписать ζg и ζh в виде (5.2).

Подведем итог. Из (2.2)–(2.4) получена задача (5.1) для $w = \zeta u$ и ее правые части подчинены (5.2), а выражение (5.3) не превосходит $c\mathcal{N}^2$. Теперь в силу предложения 5.2 левая часть (5.24) с ζu вместо u обладает мажорантой $C\mathcal{N}^2$. Обратившись к (6.4), переделываем представление (5.4) для ζu в формулу (4.2), умноженную на ζ . Просуммируем оценку по всем элементам $\zeta = \zeta_m^1$ — нормы функций (4.3) в указанных там пространствах (при замене Ω пересечением $\Omega \cap \mathcal{O}_{2d}$) окажутся не больше $c\mathcal{N}$. Вспомнив (4.12), присоединяем к (6.2) неравенство

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}; V_\beta^2(\Omega \setminus \mathcal{O}_{2d})\| &\leq c_d \|\tilde{u}; H^2(\Omega \setminus \mathcal{O}_{2d})\| \\ &\leq c_d (\|u; H^2(\Omega \setminus \mathcal{O}_{2d})\| + \|u - \tilde{u}; H^2(\Omega)\|) \\ &\leq c (\|u; H^2(\Omega \setminus \mathcal{O}_{2d})\| + \mathcal{K}) \end{aligned}$$

и заканчиваем тем самым доказательство (4.9).

3) Регуляризатор $\mathcal{P}$. Так как $tu_\Gamma \in H_{\text{loc}}^{1-\beta}(\omega) \subset H_{\text{loc}}^{3/2}(\omega)$ и вложение компактно, то вне окрестности контура Γ не возбраняется использование регуляризаторов для задач Неймана и Дирихле. Подразумевая их «склеивание» с конструируемым оператором $\mathcal{P}_\Gamma$, ограничимся манипуляциями с $\{\zeta_m^1\}_{m=1}^M$.

Пусть $\{f, g, h\} \in \mathcal{R}_\beta$; умножим эти функции на срезку $\zeta = \zeta_m^1$ и перейдем к координатам (s, n, z) , сохранив при этом обозначения f, g, h и x (ссылки на (6.4) и замечание 3.2 доставляют (5.2)). В возникшей задаче (5.1) осуществим преобразование Фурье $\mathcal{F}_{x_1 \rightarrow \xi}$ и сделаем замены (5.5), (5.8). По решению (5.10) задачи (5.7), указанному предложением 5.1, определим неполное решение задачи (5.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x_1}^{-1} \{U(\xi; |\xi|x_2, |\xi|x_3) - \lambda(|\xi|)\chi(|\xi|r)[U_\gamma(\xi) + |\xi|x_2 U_\gamma^1(\xi) + |\xi|x_3 U_\gamma^2(\xi) \\ + |\xi|^{3/2} K_2(\xi) r^{3/2} \sin(3\varphi/2)]\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для (6.5) справедливы представление (5.4) и оценка (5.24), причем по построению и согласно (5.13) в качестве правой части в (5.24) можно взять $c\|\{f, g, h\}; \mathcal{R}_\beta\|$. Ввиду формулы (5.10) и равенства $\lambda(|\xi|) = 1$ при малых $|\xi|$ в левой части (5.24) можно $\|\cdot; L_2^\mu(\mathbb{R})\|$ заменить на $\|\cdot; H^\mu(\mathbb{R})\|$. Выбрав $\zeta_m^2 \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ так, чтобы $\zeta_m^2 \zeta_m^1 = \zeta_m^1$, умножим величину (6.5) на ζ_m^2 и введем ее как составляющую в $\mathcal{P}_\Gamma\{f, g, h\}$ (суммирование по $m = 1, \dots, M$ дает $\mathcal{P}_\Gamma$ полностью). Рассуждения из п. 2) данного параграфа показывают, что невязки, появившиеся из-за ζ_m^2 , оцениваются выражением типа $\mathcal{K}$ (см. (6.2)). Таким образом, норма в $\mathcal{R}_\beta$ таких невязок не превосходит $c\|\mathcal{S}_m\{f, g, h\}; \mathcal{R}_\beta\|$, где $\mathcal{S}_m$ — вполне непрерывный оператор в $\mathcal{R}_\beta$. Итак, $\mathcal{P}_\Gamma$ (а потому и весь оператор $\mathcal{P}$) будет обладать требуемыми свойствами, если этому не мешает неполное разрешение задачи (5.1). Вместо (5.7) мы имели дело с задачей, в которой справа

добавлены слагаемые

$$\begin{aligned} & \lambda(|\xi|)(1 - \Delta_\eta) \chi(\rho) \{U_\gamma(\xi) + \eta_1 U_\gamma^1(\xi) + \eta_2 U_\gamma^2(\xi) + K_2(\xi) \rho^{3/2} \sin(3\varphi/2)\}, \\ & -\lambda(|\xi|) \chi(-\eta_1) U_\gamma^2(\xi), \quad -\lambda(|\xi|) \eta_1 \chi(\eta_1) U_\gamma(\xi) + \lambda(|\xi|)(1 - \chi(\eta_1)) U_\gamma(\xi). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Эти выражения порождают члены $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ в (5.1). (Во втором и третьем члене из (6.6) на первую позицию поставлены величины, приводящие к $\mathfrak{C}\mathfrak{F}_\gamma$ и $\mathfrak{C}\mathfrak{G}_\gamma$ в аналогичных (5.2) разложениях для $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$; кроме того, $\tilde{\mathfrak{G}} = 0$, а $\tilde{\mathfrak{H}}$ имеет ту же структуру, что и функция, о которой шла речь в начале доказательства предложения 5.1.) Присутствие в (6.6) множителя $\lambda(|\xi|)$ позволяет понижать степень $|\xi|$ в интегралах, подобных (5.13). Поэтому при учете (5.15) и (5.13)

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{F}; V_\beta^1(\mathbb{R}_+^3)\|^2 + \|\tilde{\mathfrak{H}}; V_\beta^{3/2}(\Pi)\|^2 + \|\mathfrak{G}_\gamma; L_2^{1-\beta}(\mathbb{R})\|^2 + \|\mathfrak{H}_\gamma^1; L_2^{1-\beta}(\mathbb{R})\|^2 \\ & \leq c \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2(1-\beta)} \{|U_\gamma(\xi)|^2 + |U_\gamma^1(\xi)|^2 + |U_\gamma^2(\xi)|^2 + |K_2(\xi)|^2\} d\xi \leq cs. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для функций, обращающихся в нуль вне некоторых шара, круга или отрезка, вложения пространств, фигурирующих в начале (6.7), в соответственные пространства из (5.3) компактны. Следовательно, из-за умножения $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$ на ζ_m^2 некомпактность решения задачи (5.1) привносит в (4.10) вполне непрерывное слагаемое. Именно это и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Наука, М. (1987).
2. Седов Л. Г. Плоские задачи гидромеханики и аэродинамики. Наука, М. (1980).
3. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Нелинейные аэродинамические характеристики тонкого крыла произвольной формы в плане. Наука, М. (1976).
4. Kutta M. W. Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Illustrierte Aëronautische Mitteilungen, **3**, 133–138 (1902).
5. Жуковский Н. Е. Геометрические исследования о течении Кутта. Полн. собр. соч., т. 5. ОНТИ, М.–Л. (1937), с. 163–203.
6. Жуковский Н. Е. О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов. Полн. собр. соч., т. 5. ОНТИ, М.–Л. (1937), с. 233–257.
7. Чаплыгин С. А. О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана). Матем. сб., **28**, №1, 120–166 (1911).
8. Reissner E. Boundary value problems in aerodynamics of lifting surfaces in non-uniform motion. Bull. Amer. Math. Soc., **55**, 825–850 (1949).
9. Meister E. Randwertaufgaben der Funktionentheorie. B. G. Teubner, Stuttgart (1967).
10. Hinder R. Zur Problematik der KUTTA-Bedingung. Ph. D. thesis. THD, Darmstadt (1994), 78S.
11. Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности. Труды Моск. матем. о-ва, **15**, 346–382 (1966).
12. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы. Матем. сб., **183**, №10, 13–44 (1992).
13. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы. Алгебра и анализ, **4**, вып. 3, 196–225 (1992).

14. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды Моск. матем. о-ва, **16**, 209–292 (1967).
15. *Кондратьев В. А.* Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра. Дифференц. уравнения, **13**, №11, 2026–2032 (1977).
16. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно гладкой границей. В кн.: Труды симп. по мех. сплошн. сред и родственным пробл. анализа, т. 1, Мецниереба, Тбилиси (1973), с. 171–181.
17. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Весовые пространства с неоднородными нормами и краевые задачи в областях с коническими точками. В кн.: Elliptische Differentialgleichung (Meeting, Rostock, 1977), Wilhelm-Pieck-Univ., Rostock (1978), p. 161–189.
18. *Никишикин В. А.* Особенности решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка в окрестности ребра. Вестн. МГУ, №2, 51–62 (1979).
19. *Maz'ya V. G., Rossmann J.* Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten. Math. Nachr., **138**, 27–53 (1988).
20. *Grisvard P.* Elliptic problems in non smooth domains. Pitman, London (1985).
21. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, М. (1991). [Расширенный английский перевод: *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Walter de Gruyter, Berlin (1994)].
22. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, 1. Comm. Pure Appl. Math., **12**, No. 4, 623–723 (1959).
23. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Мир, М. (1971).

Государственная морская академия
им. адм. С. О. Макарова

Поступило в редакцию
6 декабря 1995 г.