Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Х. Бойматов, О спектре самосопряженного полиномиального пучка, *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 71–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:36:53

О спектре самосопряженного полиномиального пучка^{*}

© 1997. К. Х. Бойматов

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим в нем полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = \lambda^k E + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda^j A_j - A_0, \quad D(P(\lambda)) = D(A_0),$$

где A_j ($j = 1, \dots, k-1$) — симметрические операторы, $A_0 = A_0^* \geq E$, $D(A_j) = D(A_0)$ ($j = 1, \dots, k-1$). Предполагается, что $(j-\nu)A_j \geq 0$, $|A_j u| \leq \varepsilon |A_0 u| + K_\varepsilon |u|$ для любых $\varepsilon > 0$, $u \in D(A_0)$, $j = 1, \dots, k-1$, где $|\cdot|$ — норма в H , $K_\varepsilon > 0$, $\nu \in \{1, \dots, k-1\}$.

В этой работе исследовано расположение спектра пучка $P(\lambda)$ в комплексной плоскости. Установлены некоторые оценки для операторных функций $P(\lambda)$, $P^{-1}(\lambda)$. Полученные результаты применяются для нахождения спектральных асимптотик пучка дифференциальных операторов и дифференциального оператора, полиномиально зависящего от малого параметра.

В книге А. С. Маркуса [1] и статье А. А. Шкаликова [2] имеется подробная библиография исследований по теории полиномиальных операторных пучков. Из последних работ отметим [3–6].

Вопросам спектральной теории пучков псевдодифференциальных операторов и несамосопряженных задач с параметром, эллиптических по Агмону–Дуглису–Ниренбергу, посвящены недавние работы М. С. Аграновича [7–9].

Положим $\varphi = \min\{\pi/\nu, \pi/(k-\nu)\}$, $\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \varphi\}$, $\omega(\lambda) = |\lambda|/\text{dist}\{\lambda, \mathbb{R}_+ \cup \partial\Phi\}$ ($0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$).

Символами $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ обозначим соответственно скалярное произведение в H и норму ограниченного оператора, заданного в пространстве H .

ТЕОРЕМА 1. *Спектр пучка $P(\lambda)$ лежит на $\mathbb{R}_+$ и вне угла Φ . Справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \|P^{-1}(\lambda)\| &\leq M\omega(\lambda)|\lambda|^{-k}, \quad \|A_0^{1/2}P^{-1}(\lambda)\| \leq M\omega(\lambda)|\lambda|^{-k/2} \quad (\lambda \in \Phi \setminus \mathbb{R}_+), \\ (A_0 u, u) &\leq M\omega(\lambda)|(P(\lambda)u, u)| \quad (\forall u \in D(A_0), \lambda \in \Phi \setminus \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Если при этом $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, то число $N(t)$ положительных собственных значений оператора $P(t)$, $t > 0$, совпадает с числом $\mathcal{N}_0(t)$ положительных собственных значений пучка $P(\lambda)$, не превосходящих t .

В определениях функций $N(t)$, $\mathcal{N}_0(t)$ учитываются кратности соответствующих собственных значений. Для доказательства равенства $N(t) = \mathcal{N}_0(t)$ применяется теорема 3 статьи Абрамова [10].

2. Пусть $P(\lambda)$ — такой же пучок, как в п. 1, и выполнено неравенство

$$|(A_j u, A_0 u)| \leq M(A_0 u, u)^{j/k} \|A_0 u\|^{2-2j/k} \quad (j = 1, \dots, k-1, u \in D(A_0)). \quad (1)$$

^{*} Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда Дж. Сороса (грант MZ3000) и Международного фонда «Культурная инициатива».

Рассмотрим пучок

$$P_0(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j B_j,$$

где операторы $B_0, \dots, B_{k-1}$ удовлетворяют условию

$$|B_j u| \leq \varepsilon |A_0^{1-j/k} u| + K_\varepsilon |u| \quad (\forall \varepsilon > 0, u \in D(A_0^{1-j/k})).$$

Следующие две леммы дополняют утверждение теоремы 1 также и в случае $B_j \subset B_j^*$, $j = 0, \dots, k-1$.

ЛЕММА 1. При выполнении перечисленных условий имеет место неравенство $\|A_0 P^{-1}(\lambda)\| \leq M \omega^2(\lambda)$ ($\lambda \in \Phi \setminus \mathbb{R}_+$). Для любого замкнутого угла $\Psi \subset (\Phi \setminus \mathbb{R}_+) \cup \{0\}$ с вершиной в нуле существует число $c > 0$, такое, что оператор $P_0(\lambda)$ имеет непрерывный обратный $P_0^{-1}(\lambda)$ для $\lambda \in \Psi$, $|\lambda| > c$. При этом справедлива оценка

$$|\lambda|^k \|P_0^{-1}(\lambda)\| + \|A_0 P_0^{-1}(\lambda)\| \leq M_\Psi \quad (\lambda \in \Psi, |\lambda| > c).$$

ЛЕММА 2. Пусть $B_j A_0^{(j+\delta)/k-1}$ ($j = 0, \dots, k$) — ограниченные операторы, $\delta \in (0, 1)$, $\theta \in (0, \varphi)$. Тогда спектр пучка $P_0(\lambda)$, за исключением конечного числа точек, лежит в области

$$S(\delta) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1, |\operatorname{Im} z| < (\operatorname{Re} z)^{1-\delta/2}\}$$

и вне угла $\Psi_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$. Для достаточно больших по модулю $\lambda \in \Psi_\theta \setminus S(\delta)$ выполняются неравенства

$$\|A_0 P_0^{-1}(\lambda)\| \leq M \omega^2(\lambda), \quad \|P_0^{-1}(\lambda)\| \leq M \omega(\lambda) |\lambda|^k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При некоторых дополнительных ограничениях, которые мы здесь не будем приводить, из леммы 1 по схеме статьи Аграновича [7, п. 6.4] можно получить k -кратную полноту системы корневых векторов пучка $P_0(\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (1) выполняется, например, в том случае, когда

$$A_j A_0^{j/k-1} \quad (j = 1, \dots, [k/2]), \quad A_0^{j/(2k)} A_j A_0^{j/(2k)-1} \quad (j = [k/2]+1, \dots, k-1)$$

— ограниченные операторы.

3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. В пространстве $L_2(\Omega)^l$ рассмотрим пучки

$$P(\lambda) = \lambda^k E + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda^j A_j - A_0, \quad P_0(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j B_j,$$

где A_j, B_j ($j = 0, \dots, k-1$) — дифференциальные операторы с коэффициентами класса $C^\infty(\bar{\Omega}; \operatorname{End} \mathbb{C}^l)$, причем $\operatorname{ord} B_j < m(k-j)$ и $A_j = a_j(x, D) + A'_j$, $D = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_n)$, где

$$\operatorname{ord} A'_j < m(k-j), \quad a_j(x, s) = \sum_{|\alpha|=m(k-j)} a_{\alpha,j}(x) s^\alpha \quad (j = 0, \dots, k-1).$$

Далее предположим, что $A_j \subset A_j^*$, $C_0^\infty(\Omega)^l \subset D(A_j) = D(A_0) \subset W_2^{mk}(\Omega)^l$, $A_0 = A_0^* \geq 0$, $(j - \nu)A_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, k - 1$), где $\nu \in \{1, \dots, k - 1\}$.

Легко проверить, что тогда $a_j(x, s) = a_j^*(x, s)$ ($j = 1, \dots, k - 1$) и выполняются неравенства

$$a_0(x, s) \geq c|s|^{mk}I, \quad (j - \nu)a_j(x, s) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, k - 1),$$

где $c > 0$, а I — единичная матрица. Из теоремы 1 в применении к пучку $a(\lambda; x, s) = \lambda^k I + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda^j a_j(x, s) - a_0(x, s)$ следует, что матрица $a(\lambda; x, s)$ обратима при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\arg \lambda| < \varphi = \min\{\pi/\nu, \pi/(k-\nu)\}$. Обозначим через $\rho(x, s; t)$ ($t > 0$) число положительных корней уравнения $\det a(\lambda; x, s) = 0$, не превосходящих t , с учетом их кратностей. Фиксируем $\theta \in (0, \varphi)$ и обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ последовательность собственных значений пучка $P_0(\lambda)$, расположенных в угле $\Psi_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Спектр пучка $P_0(\lambda)$, за исключением конечного числа точек, лежит в области $S(1/m)$ и вне угла Ψ_θ . Для функции $N_\theta(t) = \text{card}\{j : |\lambda_j| \leq t\}$ верна асимптотическая формула*

$$N_\theta(t) = \mu(1 + O(t^{-\varepsilon}))t^{n/m}, \quad \mu = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x, s; 1) dx ds, \quad \varepsilon > 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

В случае $B_j = 0$ ($j = 0, \dots, k - 1$) имеем $\arg \lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots$).

Для доказательства формулы $N_\theta(t) \sim \mu t^{n/m}$, $t \rightarrow +\infty$, в случае $n/m \neq 1, 2, \dots$, $\partial\Omega \in C^\infty$ достаточно проверить (используя лемму 1), что для пучка $P_0(\lambda)$ выполняются все условия теоремы 1.2 статьи [11]. При доказательстве формулы (2) в общем случае применяется лемма 2 и устанавливаются такие же оценки, как в [11] для $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Psi_\theta \setminus S(1/m)$. Затем применяется метод контурного интеграла [16]. Заключительная часть утверждения теоремы 2 вытекает из теоремы 1.

Из последних работ по спектральным асимптотикам нелинейных пучков отметим работу Аграновича [9], где рассмотрены краевые задачи с параметром λ , входящим полиномиально и в граничные условия.

Пусть A_j, B_j ($j = 0, \dots, k - 1$) — такие же дифференциальные операторы, как выше, $B_j \subset B_j^*$ ($j = 0, \dots, k - 1$). Обозначим через $\beta(h)$, $h > 0$, число положительных собственных значений оператора

$$L(h) = E + \sum_{j=1}^{k-1} h^{k-j} A_j - h^k A_0 + \sum_{j=0}^{k-1} h^{k-j} B_j, \quad D(L(h)) = D(A_0),$$

а через $\gamma(x, s; h)$ — число положительных собственных значений матрицы

$$q(h, x, s) = I + \sum_{j=1}^{k-1} h^{k-j} a_j(x, s) - h^k a_0(x, s).$$

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\beta(h) = \mu_0(1 + O(h^\varepsilon))h^{-\frac{n}{m}}, \quad \mu_0 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x, s; 1) dx ds, \quad \varepsilon > 0, \quad h \rightarrow 0+.$$

Доказательство сначала с помощью леммы Глазмана сводится к случаю $B_j = 0$ ($j = 0, \dots, k-1$), а затем с помощью теоремы 1 сводится к применению теоремы 2. При этом из теоремы 1 следует также, что $\gamma(x, s; h) \equiv \rho(x, s; 1/h)$.

С состоянием исследований по спектральным задачам с малым полиномиальным параметром можно ознакомиться по работам [12–15].

Отметим, что можно действовать и в обратном порядке. А именно, исследуя асимптотику числа положительных собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов, полиномиально зависящих от малого параметра (причем в этом случае можно применить также и вариационный метод), затем перейти к исследованию асимптотического распределения собственных значений соответствующих полиномиальных пучков.

В заключение автор благодарит проф. А. А. Шкаликова за внимание к работе и полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Штиинца, Кишинев, 1986.
2. Шкаликов А. А. Труды сем. им. И. Г. Петровского, **14**, 140–224 (1989).
3. Lancaster P., Shkalikov A., Qiang Ye. Integral Equations Operator Theory, **17**, 338–360 (1993).
4. Lancaster P., Shkalikov A. Canad. Appl. Math. Quarterly, **2**, No. 1, 45–90 (1994).
5. Tretter C. On λ -Nonlinear Boundary Eigenvalue Problems. Akademie Verlag, Berlin, 1993.
6. Шкаликов А. А., Гринив Р. О. Матем. заметки, **56**, No. 2, 114–131 (1994).
7. Агранович М. С. Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундамент. напр., Т. 63, ВИНТИ, 1990, с. 5–129.
8. Агранович М. С. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 1, 59–61 (1990).
9. Агранович М. С. Функци. анализ и его прил., **26**, вып. 2, 51–55 (1992).
10. Абрамов Ю. Ш. ДАН СССР, **212**, №1, 11–14 (1973).
11. Бойматов К. Х., Костюченко А. Г. Функци. анализ и его прил., **25**, №1, 7–20 (1991).
12. Boimatov K. Kh. Bull. Iranian Math. Soc., **19**, No. 2, 13–26 (1994).
13. Левендорский З. С. ДАН СССР, **256**, №1, 32–36 (1981).
14. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Итоги науки и техники. Матем. анализ, Т. 14, ВИНТИ, 1977, с. 5–58.
15. Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундамент. направл., Т. 64, ВИНТИ, 1989, с. 5–247.
16. Бойматов К. Х. Матем. заметки, **51**, №4, 8–16 (1992).

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан

Поступило в редакцию
19 декабря 1994 г.
В переработанном виде
24 апреля 1995 г.

УДК 517.98

Обобщение одной теоремы Даугавета с приложениями к геометрии пространства C

© 1997. В. М. КАДЕЦ*

Пусть X — подпространство банахова пространства Y , $L(X, Y)$ — пространство ограниченных операторов, отображающих X в Y , и $J \in L(X, Y)$ —

* Работа выполнена при частичной поддержке гранта K3Z100 правительства Украины и Международного научного фонда, а также гранта «Соросовский доцент» АРУ061040.