Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Панов, Многокомпонентные псевдопериодические отображения, *Функци. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 1, 30–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:07:11

УДК 517.9

Многокомпонентные псевдопериодические отображения

© 1996. Д. А. ПАНОВ

Введение

Отображение P из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ называется периодическим, если $P(x+t) = P(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $t \in \mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, представимое в виде суммы линейного и периодического отображений, называется *псевдопериодическим*.

Мы ограничимся рассмотрением псевдопериодических отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, под действием которых целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n$ переходит во всюду плотное подмножество в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Регулярной линией уровня отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ называется прообраз регулярного значения этого отображения. Каждая такая линия распадается на семейство неограниченных компонент, диффеоморфных прямой, и семейство ограниченных компонент, диффеоморфных окружности. В [3] было доказано, что все регулярные линии уровня псевдопериодического отображения содержат одно и то же число неограниченных компонент (и это число нечетно), но не были известны примеры отображений, регулярные линии уровня которых содержат больше одной неограниченной компоненты. В §1 такой пример построен.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют псевдопериодические отображения из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$, регулярные линии уровня которых содержат сколь угодно большое число неограниченных компонент.*

В связи с этим введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Псевдопериодическое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ называется *k -компонентным*, если все регулярные линии уровня этого отображения содержат по k неограниченных компонент.

В отличие от больших n ($n > 2$) при $n = 2$ все псевдопериодические отображения однокомпонентны. Этот факт был доказан в [1] и имеет многомерное обобщение, которое было высказано в [2] в качестве гипотезы: если $F = (f_1, \dots, f_{n-1})$ — псевдопериодическое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ и функции $f_2, \dots, f_{n-1}$ линейны, то F — однокомпонентное отображение. Здесь доказывается более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F = (f_1, \dots, f_{n-1})$ — псевдопериодическое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть для некоторых $a_2, \dots, a_{n-1}$ поверхность

$$M = f_2^{-1}(a_2) \cap \dots \cap f_{n-1}^{-1}(a_{n-1})$$

регулярна и является объединением компоненты π , диффеоморфной плоскости, и семейства ограниченных поверхностей. Тогда F — однокомпонентное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. k -компонентное отображение называется *устойчивым*, если при малых возмущениях оно остается k -компонентным.

Все однокомпонентные отображения являются устойчивыми. Этот факт вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Количество неограниченных компонент регулярной линии уровня псевдопериодического отображения не может увеличиться при малых возмущениях отображения.*

Из этой теоремы также следует, что существуют неустойчивые многокомпонентные отображения, при сколь угодно малых возмущениях которых число неограниченных компонент регулярной линии уровня отображения может уменьшаться. Устойчивость и неустойчивость отображений, по-видимому, связаны со следующим фактом.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть F есть k -компонентное псевдопериодическое отображение. Рассмотрим множество $\bar{N}$, являющееся замыканием объединения всех неограниченных компонент регулярных линий уровня отображения F . Число компонент связности множества $\bar{N}$ не превосходит k .*

Возможно, k -компонентное отображение устойчиво в том и только в том случае, когда соответствующее множество $\bar{N}$ имеет ровно k компонент связности.

Выражаю признательность В. И. Арнольду, И. А. Дынникову и Ю. В. Чеканову за постановку задачи и полезные обсуждения.

§1. Пример многокомпонентного отображения

В этом параграфе будет построен пример многокомпонентного отображения из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$. Для этого нам потребуется несколько вспомогательных конструкций и утверждений.

Определим сначала некоторое расслоение пространства $\mathbb{R}^3$. Через V_0 обозначим одномерный остов целочисленной решетки в $\mathbb{R}^3$ — множество, являющееся объединением прямых, параллельных координатным осям и проходящих через целочисленные точки. Через V_1 обозначим сдвиг V_0 на вектор $(1/2, 1/2, 1/2)$. В пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus (V_0 \cup V_1)$ введем структуру расслоения. Базой этого расслоения будет интервал $(0, 1)$, а слоем $\tilde{V}(a)$, $a \in (0, 1)$, — множество точек, удаленных от остова V_0 на расстояние $a/2$ в метрике $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$.

Ясно, что все слои гомеоморфны и расслоение тривиально. Конечно, слои $\tilde{V}(a)$ не являются гладкими поверхностями, но малой периодической деформацией их можно сделать гладкими. Для этих гладких слоев введем новое обозначение $V(a)$. Для малого ε типичный слой $V(\varepsilon)$ изображен на рис. 1. По непрерывности это расслоение можно продолжить до отображения $\mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$, положив $V(0) = V_0$, $V(1) = V_1$. Введем еще обозначение $V[a, b] = \bigcup_{t \in [a, b]} V(t)$.

Рис. 1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $L = (l_1, l_2)$ — линейное отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и псевдопериодическое отображение $F = (f_1, f_2)$ с линейной частью L , такие, что каждая регулярная линия уровня отображения F содержит неограниченную компоненту, лежащую вне $V[0, \varepsilon]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем, когда плоскость $l_1^{-1}(0)$ образует ненулевые углы с координатными осями. Выберем ε настолько малым, что диаметры связных кусков пересечения множества $V[0, 2\varepsilon]$ с каждой плоскостью $l_1^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, меньше 1.

Положим $f_1 = l_1$. Из выбора ε следует, что если функция f_1 постоянна на связной кривой γ и $\gamma \subset V[0, 2\varepsilon]$, то диаметр кривой γ не больше 1. Положим

$$s = 2 \left(\max_{|x-y| \leq 1} |l_2(x) - l_2(y)| \right). \quad (1)$$

Возьмем периодическую функцию P , равную s на поверхности $V(\varepsilon)$ и 0 на поверхности $V(2\varepsilon)$. Положим $f_2 = l_2 + P$.

Рассмотрим теперь неограниченную компоненту $\gamma = \gamma(t)$ произвольной линии уровня отображения $F = (f_1, f_2)$. Допустим, что в некоторый момент t_1 кривая γ пересекает поверхность $V(\varepsilon)$. Кривая γ не может целиком содержаться в $V[0, 2\varepsilon]$, так как любой ее связный кусок, лежащий в $V[0, 2\varepsilon]$, должен иметь диаметр меньше 1. Поэтому существует такой момент t_0 , $t_0 < t_1$, когда γ пересекает поверхность $V(2\varepsilon)$, и расстояние между точками $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1)$ меньше 1. Но тогда, с одной стороны, $f_2(\gamma(t_0)) = f_2(\gamma(t_1))$, а с другой стороны, в силу выбора (1) константы s имеем $f_2(\gamma(t_0)) < f_2(\gamma(t_1))$. Полученное противоречие доказывает, что γ не может пересекать $V(\varepsilon)$. Отсюда следует, что γ лежит целиком вне $V[0, \varepsilon]$. Для завершения доказательства остается воспользоваться результатом из [2] о том, что любая регулярная линия уровня псевдопериодического отображения содержит неограниченную компоненту. Предложение доказано.

Можно усилить предложение и более точно локализовать неограниченные компоненты, а именно:

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть задано линейное отображение $L = (l_1, l_2)$ и положительное число δ . Тогда существуют периодические функции p_1 и p_2 с носителями, лежащими в $V[1 - 2\delta, 1]$, такие, что каждая регулярная линия уровня отображения $G = (l_1 + p_1, l_2 + p_2)$ содержит неограниченную компоненту, лежащую в $V[1 - \delta, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для линейного отображения L найдем псевдопериодическое отображение $F = (f_1, f_2)$ и число ε , удовлетворяющие заключению предложения 1.

Через φ обозначим диффеоморфизм отрезка $[0, 1]$ в себя, такой, что $\varphi(\varepsilon) = 1 - \delta$ и $\varphi(x) = x$ при $x \in [0, \varepsilon/2] \cup [1 - \delta/2, 1]$. Диффеоморфизм φ индуцирует послойный диффеоморфизм $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Phi(V(a)) = V(\varphi(a)).$$

При этом $\mathbb{R}^3 \setminus V[0, \varepsilon]$ переходит внутрь $V[1 - \delta, 1]$. Через h обозначим функцию на $[0, 1]$, такую, что $h(x) = 0$ при $x \in [0, 1 - 2\delta]$ и $h(x) = 1$ при $x \in [1 - \delta, 1]$, и через H — ее послойное поднятие в $\mathbb{R}^3$, $H(V(a)) = h(a)$.

Теперь, используя предложение 1, получаем, что любая регулярная линия уровня отображения $G' = (f_1 \circ \Phi^{-1}, f_2 \circ \Phi^{-1}) = F \circ \Phi^{-1}$ имеет неограниченную компоненту, лежащую в $V[1 - \delta, 1]$. Так как диффеоморфизм Φ периодический, он переводит любую псевдопериодическую функцию в псевдопериодическую функцию с той же линейной частью. Значит,

$$f_1 \circ \Phi^{-1} = l_1 + p'_1, \quad f_2 \circ \Phi^{-1} = l_2 + p'_2,$$

где p'_1 и p'_2 — периодические функции. Остается положить $p_1 = H \cdot p'_1$ и $p_2 = H \cdot p'_2$ и заметить, что p_1 и p'_1 , p_2 и p'_2 совпадают на $V[1 - \delta, 1]$. Искомые функции p_1 и p_2 построены, следствие доказано.

Опуская детали, полученный результат можно сформулировать короче: любое псевдопериодическое отображение можно изменить вблизи одномерного остова $V_0 = V(0)$ таким образом, чтобы в состав любой регулярной линии уровня полученного отображения входила неограниченная компонента, расположенная вблизи V_0 .

Перейдем теперь непосредственно к построению примера многокомпонентного псевдопериодического отображения. Разнесем остов V_0 при помощи векторов $m_i = (i/k, i/k, i/k)$, $0 \leq i < k$ по $\mathbb{R}^3$, положив на этот раз $V_i = V_0 + m_i$. Возьмем любое псевдопериодическое отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$. Используя следствие 1, изменим это отображение вблизи каждого остова V_i так, чтобы любая регулярная линия уровня полученного отображения содержала неограниченную компоненту, расположенную вблизи V_i . Число таких компонент будет совпадать с числом остовов V_i и равно, таким образом, k . Пример построен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенное псевдопериодическое отображение является устойчивым в том смысле, что линии уровня слабо возмущенного отображения также будут содержать не менее k неограниченных компонент.

Все результаты этого параграфа допускают обобщение на многомерный случай.

ТЕОРЕМА 1'. *При $n \geq 3$ и $m \geq 2$, $m < n$, существует псевдопериодическое отображение $F = (f_1, \dots, f_m)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, регулярные поверхности уровня которого содержат сколь угодно большое число неограниченных компонент. При этом $m-2$ функций $f_3, \dots, f_m$ могут быть взяты линейными.*

§2. Изменение числа компонент при малых возмущениях

В этом параграфе будет доказана теорема 3, сформулированная во введении. Для доказательства нам потребуются две леммы, вытекающие из результатов [3].

ЛЕММА 1. *Пусть F — псевдопериодическое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ с линейной частью L , a_0 — регулярное значение отображения F и J — неограниченная компонента линии $F^{-1}(a_0)$. Тогда ортогональная проекция кривой J на прямую $L^{-1}(0)$ покрывает всю прямую $L^{-1}(0)$.*

ЛЕММА 2. *Пусть F — псевдопериодическое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $F^{-1}(a)$ — регулярная линия уровня этого отображения. Тогда существует*

гиперповерхность Π , трансверсальная $F^{-1}(a)$, пересекающая каждую неограниченную компоненту $F^{-1}(a)$ ровно в одной точке и не пересекающая ни одной из ограниченных компонент $F^{-1}(a)$. При этом Π пересекает любую кривую, ортогональная проекция которой на прямую $L^{-1}(0)$ покрывает всю прямую $L^{-1}(0)$.

Приступим теперь к доказательству теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F есть k -компонентное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, a_0 — его регулярное значение и $J^1, \dots, J^k$ — неограниченные компоненты линии $F^{-1}(a_0)$. По отображению F и линии $F^{-1}(a_0)$ построим гиперповерхность Π , удовлетворяющую заключению леммы 2. Обозначим точку пересечения гиперповерхности Π с компонентой J^i через x_i . Пусть F_Π — ограничение отображения F на гиперповерхность Π . Из регулярности линии $F^{-1}(a_0)$ и из того, что она трансверсальна Π , следует, что отображение F_Π будет локальным диффеоморфизмом в точках x_i . Пусть G есть C^1 -малая периодическая деформация отображения F . Понятно, что отображение G_Π будет C^1 -малой деформацией отображения F_Π . Из того что a_0 является регулярным значением для F_Π , следует, что оно будет регулярным и для G_Π . Кроме того, $\#F_\Pi^{-1}(a_0) = \#G_\Pi^{-1}(a_0) = k$. Очевидно, что при a , близких к a_0 , множество $G_\Pi^{-1}(a)$ также будет состоять из k точек.

Итак, линия $G^{-1}(a)$ пересекается с Π в k точках при значениях a , близких к a_0 . Пусть a_1 — регулярное значение отображения G , близкое к a_0 . Из объединения лемм 1 и 2 следует, что каждая неограниченная компонента линии $G^{-1}(a_1)$ пересекает Π . Поэтому у линии $G^{-1}(a_1)$ не больше k неограниченных компонент. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Однокомпонентные псевдопериодические отображения являются устойчивыми.

§3. Доказательство теоремы 2

Пусть F есть k -компонентное псевдопериодическое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ с линейной частью L . Неограниченные компоненты регулярной линии уровня $F^{-1}(a)$ обозначим через $J_a^1, \dots, J_a^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Кривая γ называется d -деформацией прямой l , если кривую γ и прямую l можно так параметризовать, что $|\gamma(t) - l(t)| < d$ для любого t .

В работе [3] был доказан следующий результат.

ЛЕММА 3. Пусть F есть k -компонентное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ с линейной частью L . Тогда существует постоянная $d > 0$, такая, что для любого регулярного значения a каждая линия J_a^i является d -деформацией прямой $L^{-1}(a)$.

Аналог этого утверждения для ограниченных компонент выглядит следующим образом.

ЛЕММА 4. Существует постоянная $d > 0$, такая, что диаметр ограниченных компонент любой регулярной линии $F^{-1}(a)$ меньше d .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3 и легко извлекается из [3].

Каждая из этих лемм имеет свое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть J — неограниченная компонента регулярной линии $F^{-1}(a)$, точка x лежит на J , а точка y не лежит. Тогда существуют окрестности $U(x)$ и $U(y)$ точек x и y , такие, что ни одна из неограниченных компонент регулярных линий уровня не пересекает одновременно обе окрестности $U(x)$ и $U(y)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любой точки x , лежащей на неограниченной компоненте J регулярной линии $F^{-1}(a)$, существует ее окрестность $U(x)$, которую не пересекают ограниченные компоненты регулярных линий уровня.

Доказательства этих следствий похожи, поэтому докажем только второе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in J$, точка x лежит на J между x_1 и x_2 и $|x_1 - x_2| > 2d$, где d — константа из леммы 4. Рассмотрим трубчатую окрестность $U(x)$ отрезка линии J , лежащего между x_1 и x_2 . Так как a — регулярное значение отображения F , можно потребовать, чтобы $U(x)$ расслаивалась линиями уровня отображения F на отрезки, причем диаметр каждого из этих отрезков был не меньше $2d$. Очевидно, что любая компонента, пересекающая $U(x)$, имеет диаметр, больший $2d$, и, значит, не может быть ограниченной и регулярной. Следствие доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Открытое подмножество U пространства $\mathbb{R}^n$ назовем *представительным*, если для каждой неограниченной компоненты любой регулярной линии $F^{-1}(a)$ найдется бесконечный набор целочисленных векторов m_i , таких, что эта компонента пересекается с каждым из множеств $U + m_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть a — регулярное значение отображения F и открытое подмножество U в $\mathbb{R}^n$ пересекается со всеми неограниченными компонентами линии уровня $F^{-1}(a)$. Тогда U является представительным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F есть k -компонентное отображение. В множестве U выделим k открытых подмножеств $u_1, \dots, u_k$, каждое из которых пересекается ровно с одной из неограниченных компонент линии $F^{-1}(a)$. Пользуясь следствиями 3 и 4, множества $u_1, \dots, u_k$ можно выбрать так, чтобы ни одна из регулярных неограниченных компонент отображения F не пересекала одновременно двух множеств и никакая из ограниченных не пересекала ни одного из этих множеств. Из выбора u_i следует, что если некоторая регулярная линия уровня пересекается с каждым из u_i , то любая из неограниченных компонент этой линии пересекает одно и только одно u_i .

Докажем, что множество $\bigcup_i u_i$ представительное. Пусть b — регулярное значение отображения F . Образ решетки $\mathbb{Z}^n$ при отображении F всюду плотен; поэтому существует бесконечное число целочисленных векторов m , таких, что точка $b - F(m)$ принадлежит множеству $\bigcap_i F(u_i)$. Регулярная линия уровня $F^{-1}(b - F(m))$ будет пересекать каждое из множеств u_i ; поэтому все неограниченные компоненты этой линии будут пересекаться с множеством $\bigcup_i u_i$. Линия уровня $F^{-1}(b)$ получается из линии $F^{-1}(b - F(m))$ сдвигом на вектор m . Поэтому для каждого m все неограниченные компоненты линии $F^{-1}(b)$ будут

пересекаться с множеством $\bigcup_i u_i + m$. Это показывает, что множество $\bigcup_i u_i$ представительное, а значит, и содержащее его множество U тоже представительное. Предложение доказано.

Теперь все готово для доказательства теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a_1 — некритическое значение ограничения f_1 на M . Тогда $a = (a_1, \dots, a_{n-1})$ — регулярное значение отображения F вследствие регулярности поверхности M . Выберем на каждой из неограниченных компонент J_a^i линии $F^{-1}(a)$ по точке x_i . Используя следствие 4, для каждого i выберем такой диск D_i с центром в x_i , чтобы все компоненты регулярных линий уровня, пересекающие этот диск, были неограниченными. Через $D_{i/2}$ обозначим диск вдвое меньшего диаметра с центром в точке x_i . Из предложения 2 следует, что объединение дисков $D_{i/2}$ будет представительным подмножеством.

Рис. 2

Построим следующее отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \pi$. Положим $f(0) = x_1$. С возрастанием t точка $\varphi(t)$ движется вдоль J_a^1 до пересечения с одним из дисков вида $D_{i/2} + m_j$ (рис. 2). После этого происходит переход из этого диска в больший диск $D_i + m_j$ таким образом, что при этом переходе точка $\varphi(t)$ попадает на новую неограниченную компоненту J некоторой регулярной линии уровня, и значение $f_1(\varphi(t))$ возрастает. Этот переход мы назовем *пересадкой*. После пересадки точка $\varphi(t)$ движется вдоль J до попадания в следующий диск, и далее процесс повторяется циклически. В силу псевдопериодичности отображения F и условия регулярности можно выбрать начальные диски D_i и пересадки таким образом, чтобы возрастание f_1 при каждой пересадке превосходило некоторую постоянную $\varepsilon > 0$. При отрицательных t определим $\varphi(t)$ симметричным образом (рис. 2). Ясно, что функция $f_1(\varphi(t))$ монотонна и $f_1(\varphi(t)) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Рис. 3

Покажем, что построенная кривая $\varphi(t)$ пересекает любую неограниченную регулярную компоненту J_b , лежащую на π . Для этого нам потребуется следующий простой факт, который мы приводим без доказательства. Пусть $J_b, J_c \subset \pi$

— две неограниченные регулярные компоненты. Тогда существует постоянная $D > 0$, такая, что из любой точки одной компоненты можно перейти на другую компоненту по пути длины, меньшей D , лежащему в π . Конечно, $\varphi(t)$ пересекает J_a^1 : по построению $\varphi(0) = x_1 \in J_a^1$. Пусть J_b — другая регулярная компонента, $J_b \subset \pi$. Рассмотрим четырехугольник, составленный из отрезков компонент J_a^1 и J_b и соединяющих их концы отрезков I_1 и I_2 длины меньше D (рис. 3). Будем считать, что отрезки I_1 и I_2 лежат по разные стороны от точки x_1 и достаточно удалены от нее. По построению кривая $\varphi(t)$ в одном из направлений входит внутрь четырехугольника. Отрезки I_1 и I_2 имеют длину, меньшую D ; поэтому f_1 ограничена на I_1 и I_2 некоторой постоянной $c = c(J_a^1, J_b)$,

$$c(J_a^1, J_b) = |a_1| + \max_{|x-y| \leq D} |f_1(x) - f_1(y)|.$$

Пусть I_1 и I_2 настолько удалены, что они не пересекаются с $\varphi([t_1, t_2])$, где $f_1(\varphi(t_1)) = -c$, $f_1(\varphi(t_2)) = c$. Тогда из-за монотонности и неограниченности $f_1(\varphi(t))$ кривая $\varphi(t)$ не может выйти из четырехугольника через стороны I_1 и I_2 , а только через сторону J_b . Итак, $\varphi(t)$ пересекает любую регулярную неограниченную компоненту J_b , лежащую на поверхности π .

Для завершения доказательства теоремы заметим, что все неограниченные компоненты $F^{-1}(a)$ лежат на поверхности M и, значит, на ее единственной неограниченной компоненте π . Функция $f_1(\varphi(t))$ монотонна; поэтому $f_1(\varphi(t))$ может быть равна a_1 только при пересечении кривой $\varphi(t)$ с единственной компонентой, а именно с J_a^1 . Таким образом, $F^{-1}(a)$ имеет единственную регулярную компоненту, а потому и любая другая регулярная линия уровня имеет ровно одну неограниченную компоненту. Теорема доказана.

§4. Строение множества неограниченных компонент в целом

Пусть F есть k -компонентное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Под действием целочисленных сдвигов линии уровня отображения F переходят в линии уровня и их неограниченные компоненты — в соответствующие неограниченные компоненты. Таким образом, группа $\mathbb{Z}^n$ действует и на множестве N , являющемся объединением регулярных неограниченных компонент, и на его замыкании $\bar{N}$. При целочисленных сдвигах компоненты связности множества $\bar{N}$ должны переходить в компоненты связности: значит, $\mathbb{Z}^n$ действует и на множестве компонент связности множества $\bar{N}$. Приступим теперь к доказательству теоремы 4, т. е. покажем, что число компонент множества N не превосходит k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a — регулярное значение отображения F и $J_a^1, \dots, J_a^k$ — неограниченные компоненты линии $F^{-1}(a)$. Обозначим через N_i компоненту связности множества N , содержащую линию J_a^i .

Сначала докажем, что при любом целочисленном сдвиге множество $\bigcup_i N_i$ переходит в себя. Для этого для каждого i выделим открытый диск D_i , такой, что, во-первых, $D_i \cap J_a^i \neq \emptyset$, во-вторых, отображение F регулярно на всем диске D_i и, в-третьих, компоненты регулярных линий уровня, с которыми пересекается диск D_i , являются неограниченными и ни одна из компонент не пересекает два диска (следствия 3, 4). Ясно, что $D_i \subset N_i$ для любого i .

Выделим в $\mathbb{Z}^n$ все такие векторы m , что $a + F(m) \subset \bigcap_i F(D_i)$. Из того что множество $a + F(\mathbb{Z}^n)$ всюду плотно в $\mathbb{R}^{n-1}$, легко вывести, что выделенные векторы m порождают все $\mathbb{Z}^n$. Регулярная линия уровня $F^{-1}(a + F(m))$ пересекается со всеми дисками D_i ; поэтому каждая из ее неограниченных компонент J_a^i пересекается с некоторым диском D_j , а значит, с соответствующим множеством N_j . Значит, множества $N_i + m$ и N_j пересекаются, а раз пересекаются, то и совпадают. Отсюда следует, что $\bigcup_i N_i + m = \bigcup_i N_i$. Так как выделенные векторы m порождают $\mathbb{Z}^n$, то и $\bigcup_i N_i + \mathbb{Z}^n = \bigcup_i N_i$.

Итак, множество $\bigcup_i N_i$ инвариантно относительно целочисленных сдвигов. Поэтому множество $\bigcup_i N_i$ содержит все неограниченные компоненты всех линий уровня $F^{-1}(a + F(\mathbb{Z}^n))$. Из плотности $F(\mathbb{Z}^n)$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ следует, что $\bigcup_i N_i$ содержит все неограниченные компоненты всех регулярных линий уровня. Отсюда $N \subset \bigcup_i N_i$ и, следовательно, $\overline{N} = \bigcup_i N_i$. Теорема доказана.

Отметим, что в теореме 4 не утверждается, что число компонент связности множества $\overline{N}$ равно в точности k . По-видимому, этот факт вообще неверен.

ГИПОТЕЗА. Пусть F есть k -компонентное отображение. Соответствующее множество $\overline{N}$ содержит k компонент в том и только в том случае, когда отображение F является устойчивым.

Отметим также следствие, легко вытекающее из теоремы 4: образ каждой из компонент связности множества $\overline{N}$ под действием отображения F покрывает все $\mathbb{R}^{n-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Топологические и эргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 2, 1–12 (1991).
2. Арнольд В. И. Полиинтегрируемые потоки. Алгебра и анализ, **4**, вып. 6, 54–62 (1992).
3. Дынников И. А. О пересечениях поверхностей уровня псевдопериодических функций. УМН, **49**, вып. 1, 213–214 (1994).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
6 апреля 1994 г.