Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Кадец, Обобщение одной теоремы Даугавета с приложениями к геометрии пространства C , *Функц. анализ и его прил.*, 1997, том 31, выпуск 3, 74–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:42:58

Доказательство сначала с помощью леммы Глазмана сводится к случаю $B_j = 0$ ($j = 0, \dots, k-1$), а затем с помощью теоремы 1 сводится к применению теоремы 2. При этом из теоремы 1 следует также, что $\gamma(x, s; h) \equiv \rho(x, s; 1/h)$.

С состоянием исследований по спектральным задачам с малым полиномиальным параметром можно ознакомиться по работам [12–15].

Отметим, что можно действовать и в обратном порядке. А именно, исследуя асимптотику числа положительных собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов, полиномиально зависящих от малого параметра (причем в этом случае можно применить также и вариационный метод), затем перейти к исследованию асимптотического распределения собственных значений соответствующих полиномиальных пучков.

В заключение автор благодарит проф. А. А. Шкаликова за внимание к работе и полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Штиинца, Кишинев, 1986.
2. Шкаликов А. А. Труды сем. им. И. Г. Петровского, **14**, 140–224 (1989).
3. Lancaster P., Shkalikov A., Qiang Ye. Integral Equations Operator Theory, **17**, 338–360 (1993).
4. Lancaster P., Shkalikov A. Canad. Appl. Math. Quarterly, **2**, No. 1, 45–90 (1994).
5. Tretter C. On λ -Nonlinear Boundary Eigenvalue Problems. Akademie Verlag, Berlin, 1993.
6. Шкаликов А. А., Гринив Р. О. Матем. заметки, **56**, No. 2, 114–131 (1994).
7. Агранович М. С. Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундамент. напр., Т. 63, ВИНТИ, 1990, с. 5–129.
8. Агранович М. С. Функци. анализ и его прил., **24**, вып. 1, 59–61 (1990).
9. Агранович М. С. Функци. анализ и его прил., **26**, вып. 2, 51–55 (1992).
10. Абрамов Ю. Ш. ДАН СССР, **212**, №1, 11–14 (1973).
11. Бойматов К. Х., Костюченко А. Г. Функци. анализ и его прил., **25**, №1, 7–20 (1991).
12. Boimatov K. Kh. Bull. Iranian Math. Soc., **19**, No. 2, 13–26 (1994).
13. Левендорский З. С. ДАН СССР, **256**, №1, 32–36 (1981).
14. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Итоги науки и техники. Матем. анализ, Т. 14, ВИНТИ, 1977, с. 5–58.
15. Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А. Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундамент. направл., Т. 64, ВИНТИ, 1989, с. 5–247.
16. Бойматов К. Х. Матем. заметки, **51**, №4, 8–16 (1992).

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан

Поступило в редакцию
19 декабря 1994 г.
В переработанном виде
24 апреля 1995 г.

УДК 517.98

Обобщение одной теоремы Даугавета с приложениями к геометрии пространства C

© 1997. В. М. КАДЕЦ*

Пусть X — подпространство банахова пространства Y , $L(X, Y)$ — пространство ограниченных операторов, отображающих X в Y , и $J \in L(X, Y)$ —

* Работа выполнена при частичной поддержке гранта K3Z100 правительства Украины и Международного научного фонда, а также гранта «Соросовский доцент» АРУ061040.

оператор естественного вложения. Пару (X, Y) назовем даугаветовской (обозначение: $(X, Y) \in D$), если для любого компактного оператора $T \in L(X, Y)$ выполнено равенство $\|J + T\| = 1 + \|T\|$. Пространство X обладает свойством Даугавета (DPг), если $(X, X) \in D$. И. К. Даугавет [1] доказал, что пространство C непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ обладает DPг. Среди многочисленных обобщений [2–9] теоремы Даугавета отметим возможность ее распространения на слабо компактные операторы и на пространство L_1 . Основные результаты настоящей работы:

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = C$, Y сепарабельно, $Y \supset X$. Тогда существует эквивалентная норма на Y , в которой $(X, Y) \in D$.

ТЕОРЕМА 2. Если $(X, Y) \in D$, то Y не обладает безусловным базисом.

Вместе теоремы 1 и 2 дают новое доказательство известного факта о невлижимости C в пространство с безусловным базисом. Мы покажем, что на этом пути можно получить и новые, более сильные утверждения.

Обозначим через $m[0, 1]$ пространство всех ограниченных функций на $[0, 1]$ с $\sup$ -нормой, и пусть $l_\infty[0, 1]$ — подпространство функций со счетными носителями, а $m^0 = m[0, 1]/l_\infty[0, 1]$, т.е. пространство ограниченных функций, где различающиеся лишь на счетном множестве функции отождествляются.

ЛЕММА 1. Пусть C является подпространством сепарабельного пространства Y . Тогда существует оператор изоморфного вложения $U: Y \rightarrow m^0$, переводящий элементы из C в себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что точка x отрезка $[0, 1]$ называется точкой конденсации подмножества $A \subset [0, 1]$ ($x \in \text{cond } A$), если любая ее окрестность содержит несчетное число элементов из A . Выберем плотное множество $\{y_n\}_1^\infty$ на $S(Y)$ и непересекающиеся подмножества $A_n \subset [0, 1]$, такие, что $\text{cond } A_n = [0, 1]$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что функционалы δ_x — «значение в точке x » — можно продолжить с C на все Y до соответствующих функционалов $\tilde{\delta}_x$, $x \in [0, 1]$ таким образом, что $\|\tilde{\delta}_x\| \leq 5$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество тех $x \in A_n$, для которых $|\tilde{\delta}_x(y_n)| \geq 1/2$, несчетно. Действительно, если для данного n существует функция $f_n \in C$, удовлетворяющая условию $\|f_n - y_n\| < 1/4$, то достаточно в качестве $\tilde{\delta}_x$ при $x \in A_n$ взять любые продолжения единичной нормы: в тех точках $x \in A_n$, где $|f_n(x)| > 3/4$, будет выполняться неравенство $|\tilde{\delta}_x(y_n)| > 1/2$. Если же $\text{dist}\{y_n, C\} \geq 1/4$, то существует функционал $y_n^* \in Y^*$, такой, что $\|y_n^*\| \leq 4$, $\text{Ker } y_n^* \supset C$ и $y_n^*(y_n) = 1$. В этом случае для $x \in A_n$ сначала продолжим δ_x до $\delta_x^* \in Y^*$ с сохранением нормы, а затем положим $\tilde{\delta}_x = \delta_x^* + \text{sign } \delta_x^*(y_n) \cdot y_n^*$ (считаем, что $\text{sign } 0 = 1$).

Требуемый оператор U определим равенством $(Uy)(x) = \tilde{\delta}_x(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ввиду леммы 1 достаточно показать, что $(C, m^0) \in D$: требуемую норму на Y определим формулой $\|y\| = \|Uy\|$. Пусть $T: C \rightarrow m^0$ — компактный оператор, $\varepsilon > 0$, $f \in S(C)$, $\|Tf\| > \|T\| - \varepsilon$. Положим $g = Tf$. С точностью до замены f на $-f$ можем считать, что существует несчетное множество $A \subset [0, 1]$, на котором $g > \|T\| - \varepsilon$. Выделим $t_n \in \text{cond } A$ и непересекающиеся окрестности $\Delta_n = (a_n, b_n)$ точек t_n . Построим функции $h_n \in C$, такие, что $\text{supp } h_n \subset \Delta_n$ и $\|h_n\| = h_n(t_n) = 1 - f(t_n)$, и положим $f_n = f + h_n$. Тогда $f_n(t_n) = 1$, $\|f_n + g\| \geq 1 + \|T\| - \varepsilon$ и $h_n \xrightarrow{w} 0$, $\|Th_n\| \rightarrow 0$,

$\|f_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\|J + T\| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|(J + T)f_n\| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f_n + Tf\| \geq 1 + \|T\| - \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство проходит и для слабо компактного оператора T , так как по теореме Данфорда–Петтиса он также будет переводить слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим противное, т.е. что Y обладает безусловным базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Обозначим координатные функционалы через $\{e_n^*\}_1^\infty$ и рассмотрим операторы $T_n \in L(X, Y)$, определенные формулой $T_n x = e_n^*(x)e_n$. Ряд $\sum_{n=1}^\infty T_n$ поточечно безусловно сходится к оператору вложения J , и величина

$$\alpha = \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in V} T_n \right\| : V \in \mathbb{N}_f \right\},$$

где $\mathbb{N}_f$ — семейство всех конечных подмножеств натурального ряда, конечна. Если $W \subset \mathbb{N}$ — произвольное подмножество, то, исчерпывая его конечными, получаем, что $\left\| \sum_{n \in W} T_n \right\| \leq \alpha$. С другой стороны (равенство Даугавета!), если $V \in \mathbb{N}_f$, то

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus V} T_n \right\| = \left\| J - \sum_{n \in V} T_n \right\| = 1 + \left\| \sum_{n \in V} T_n \right\|.$$

Сопоставляя эти формулы, получаем противоречие:

$$\alpha \geq \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus V} T_n \right\| : V \in \mathbb{N}_f \right\} \geq \alpha + 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сопоставив замечание 1 и предыдущее рассуждение, нетрудно получить, что пространство C не только не вкладывается в пространство с безусловным базисом, но и не может служить подпространством безусловной прямой суммы рефлексивных пространств. Последнее утверждение нам в литературе не встречалось. Кроме того, на описанном выше пути можно доказать различные теоремы о неразложимости некоторых операторов в поточечно безусловно сходящиеся ряды операторов из специальных классов (например, тождественного оператора в C или L_1 в ряд из слабо компактных или строго сингулярных, или операторов Данфорда–Петтиса и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет И. К. УМН, **18**, вып. 5, 157–158 (1963).
2. Foias C., Singer I. Math. Z., **87**, 434–450 (1965).
3. Бабенко В. Ф., Пичугов С. А. Укр. матем. ж., **33**, №4, 374–376 (1981).
4. Holub J. R. Proc. Amer. Math. Soc., **97**, 396–398 (1986).
5. Holub J. R. Proc. Amer. Math. Soc., **100**, 295–300 (1987).
6. Abramovich Yu. J. Operator Theory, **25**, 331–345 (1991).
7. Wojtaszczyk P. Proc. Amer. Math. Soc., **115**, 1047–1052 (1992).
8. Ansari S. I. Houston J. Math., **19**, 587–601 (1993).
9. Кадец В. М., Попов М. М. Алгебра и анализ, **8**, №4 (1996).